Math. a. 330 h

UB Augsburg
N8<28290085
N8<28290085
Neue Signatur
N IV ob 4/1
<36603722080011
<36603722080011
Bayer. Staatsbibliothek

[illegible]

1781.
P. H. C. R. in Beuerberg.
1 fl. 42 Xr.

Jens Krafts,

vormaligen Königl. Däniſchen Juſtizraths und öffentlichen Lehrers der Mathematik auf der Ritterakademie zu Sorøe,

Mechanik,

aus der lateiniſchen mit Zuſätzen vermehrten Ueberſetzung

des Herrn Prof. Tetens

ins Deutſche überſezt und hin und wieder verbeſſert

von

Johann Chriſtian Auguſt Steingrüber.

Mit XV. Kupfertafeln.

Dresden, 1787.

In der Waltheriſchen Hofbuchhandlung.

Math. a. 330 h

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK · AUGSBURG ·

Ausgeschieden
UB Augsburg

95 / G

Dem

Durchlauchtigſten Fürſten und Herrn,

Herrn

Ludwig Günther,

Fürſten zu Schwarzburg, der vier Grafen des Reichs, auch Grafen zu Hohenſtein, Herrn zu Arnſtadt, Sondershauſen, Leutenberg, Lohra und Clettenberg ꝛc. ꝛc.

Bayerische Staatsbibliothek München

Meinem gnädigſten Fürſten und Herrn.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Durchlauchtigſter Fürſt,
Gnädigſter Fürſt und Herr!

In tiefſter Ehrerbietung wag ich es, Ew. Hochfürſtl. Durchl. dieſe Erſtlinge meines mathematiſchen Fleißes zu Höchſtdero Füßen niederzulegen. Wem könnte ich ſie mit beſſerm Rechte widmen, als Höchſtdenenſelben, durch deren huldreichſte Unterſtützung ich im Stand geſezt wurde, den mir von der Vorſehung tief eingepflanzten Trieb zu den Wiſſenſchaften nach Wunſch zu befriedigen? Ew. Hochfürſtl. Durchl. geruhen demnach, ſie als Merkmal meiner

ehrfurchtsvollſten Dankbarkeit, einer Dankbarkeit, die meinem Herzen ewig theuer, ewig unvergeßlich ſeyn wird, gnädigſt auf- und anzunehmen. Die darinn enthaltenen Lehren ſind, wie Ew. Hochfürſtl. Durchl. wiſſen, der Grund von jeder Bequemlichkeit, jeder Annehmlichkeit des Lebens. Durch ſie wird der Staat in Aufnahme gebracht, Glück und Wohlſtand unter den Nationen verbreitet. Mögen Schwarzburgs Bewohner, die dieſe Vortheile unter Höchſtdero wohlthätigen Regierung vorzüglich genießen, Höchſtdieſelben und Höchſtdero ganzes Durchlauchtigſtes Haus noch lange in beſtem Wohlergehen verehren! Dies wünſcht in tiefſter Devotion

Ew. Hochfürſtl. Durchl.

unterthänigſt-gehorſamſter Knecht
Johann Chriſtian Auguſt Steingrüber.

Vorbericht
des deutſchen Ueberſetzers.

Es würde überflüßig ſeyn, zu dem, was der lateiniſche Ueberſetzer von dem Werthe gegenwärtigen Werks bereits geſagt hat, noch mehreres hinzuzufügen. Jeder, der lateiniſchen Sprache auch noch ſo kundige Liebhaber der gemeinen und höhern Mechanik, deren Studium durch die in unſern Tagen entdeckte Aeronautik noch allgemeiner werden muß, wird doch allemal, wenigſtens nach meinem Gefühl, dieſe Wiſſenſchaft lieber noch in ſeiner vaterländiſchen, als in einer fremden Sprache ſtudiren. Und wie viel unlateiniſche Mathematiker giebt es nicht heut zu Tage! Vorzüglich dieſen hoff' ich, durch gegenwärtige Ueberſetzung, einen nicht unangenehmen Dienſt geleiſtet, und zugleich das Werk zu akademiſchen Vorleſungen brauchbarer gemacht zu haben. Man hat es nicht blos beym Ueberſetzen bewenden laſſen; durchgängig hat man die lateiniſche Ueberſetzung von den häufigen Druck- auch einigen Uebereilungsfehlern zu reinigen, die analytiſchen Formeln beſtimmter auszudrücken, und die Be-

weiſe, nebſt dem Kalkul, wenn der Verfaſſer für den Anfänger zu jählinge Sprünge that, noch beſſer aus einander zu ſetzen geſucht. Beyſpiele von leztern findet man unter andern in den Zuſätzen §. 153. 168. 169. 299. Mehrers hinzuzuthun hat man ſich, um den Preis des ohnedem durch des Herrn Prof. Tetens ſchätzbare Zuſätze bereits ſehr vermehrten Werks, nicht noch mehr zu vergrößern, enthalten.

Sollte meine Arbeit das Glück haben, den Beyfall des Publikums zu erhalten, ſo wird mir dies Aufmunterung ſeyn, die mir von Gott verliehenen Kräfte demſelben fernerhin zu widmen. Gegründete Urtheile einſichtsvoller Kenner werde ich dankbar benutzen, unbillige mit Stillſchweigen überſehen.

Vorrede des Verfaſſers.

Daß die mathematiſchen Wiſſenſchaften unter den übrigen menſchlichen Kenntniſſen vorzüglich nützlich und unentbehrlich ſind, iſt dergeſtalt allgemein anerkannte Wahrheit, daß es überflüßig iſt, ſie mit vielen Gründen zu beweiſen. Kürzlich will ich daher nur die Vortheile zeigen, die für den Menſchen, wir mögen ihn als Bürger, oder als ein durch Vernunft und Verſtand ſich auszeichnendes Weſen betrachten, aus der Mathematik entſpringen.

Der Nutzen dieſer Wiſſenſchaften für den Staat iſt ſogleich einleuchtend. Wem iſt unbekannt, daß zur Beſchützung und Erhaltung deſſelben ſehr vieles erfordert wird, das ohne Kenntnis der Geometrie nicht zu Stande gebracht werden kann? Wer weiß nicht, wie nützlich die Anordnung der Maſchinen und die Wiſſenſchaft, dergleichen zu bauen, iſt? Wollten wir nur auf kurze Zeit den Gebrauch der gemeinen Maſchinen abſchaffen, ſo würde nichts geringers zu erwarten ſeyn, als Verwirrung in allen Geſchäften, Unordnung im bürgerlichen Leben. Wie viel Aerme und Hände ruhen nicht in unſern Tagen, oder werden mit vielem Vortheil zu andern Verrichtungen angewendet, da wir Wind und Waſſer dasjenige aufgetragen haben, worauf wir größere Leibeskraft und unmäßige Anſtrengung hätten verwenden müſſen.

Nicht

Nicht allein die Nothwendigkeiten, ſondern auch die Bequemlichkeiten und Annehmlichkeiten des Lebens bedarfen auf vielerley Art des Beyſtandes der Mathematik. Hiervon geben unſere Wohnungen die deutlichſten Beweiſe; obgleich die Baukunſt unter den Wiſſenſchaften, womit die Geometrie den Menſchen beſchenkte, nur den unterſten Rang einnimmt: wenn man nicht vielleicht unter dieſem Namen zugleich die ganze Wiſſenſchaft von Anordnung der Maſchinen beym Berg= und Waſſerbau begreifen will. Die Baukunſt in dieſem allgemeinern Sinne genommen, erfordert allerdings eine vorzügliche Kenntnis der Mathematik.

Die Kunſtwerke haben beynahe alles, was zu ihrer Hervorbringung und Verfertigung am meiſten nothwendig iſt, der Mathematik zu danken. Auf ihr beruht die Feldmeßkunſt, die Steuermannskunſt, und die Verfertigung der Land= und Seekarten. Wird daher der Mathematik das verdiente Lob verſagt, wird ihr Nutzen und ihre Vortheile verkannt, ſo geſchieht dieſes zuverläßig aus keiner andern Urſache, als der gewöhnlichen Trägheit der Menſchen in Betrachtung der Dinge, die einzig auf den Genuß der Bequemlichkeiten begierig, ſich weder um die Quellen derſelben bekümmern, noch ſie ſchätzen.

Will man aber im gemeinen Leben von der Mathematik Gebrauch machen, oder, welches einerley iſt, zu der ſogenannten angewandten Mathematik ſchreiten, ſo muß man zuförderſt mit dem theoretiſchen Theil derſelben, welcher die Geometrie und Analyſis enthält, bekannt ſeyn. Erſtere und zwar die

Elemen=

Elementargeometrie iſt die kürzeſte, aber zugleich, welches ſie mit allen den Wiſſenſchaften, die die erſten Gründe der Wahrheiten enthalten, gemein hat, für den übrigen von der größten Wichtigkeit. Sie handelt von der geraden und der Kreislinie, deren Eigenſchaften ſie auf die Beſtimmung der körperlichen Größen anzuwenden lehrt. Sie iſt gleichſam das A. B. C. des angehenden Mathematikers: in kurzer Zeit lernt er es, da der menſchliche Verſtand an ihrer Erfindung und Entwickelung ganze Jahrhunderte gearbeitet hat. Je enger aber die Gränzen dieſes Theils der Mathematik ſind, deſto weitläuftiger, ja unermeßlich beynahe iſt das Gebiete der Analyſis. Sie erſtreckt ſich auf alle meßbare Gegenſtände: ohne die Sache zu übertreiben, iſt ſie der Ruhm der neuern Zeiten, der Schlüſſel zu jeder erhabenen Entdeckung, der Leitfaden Ariadnens, der uns ohn' Anſtoß aus dem Labyrinth der verwickelteſten Betrachtungen führt. Diejenigen irren daher ſehr, welche die Kenntnis der Elementargeometrie, der Buchſtabenrechenkunſt und einiger Anfangsgründe der angewandten Mathematik zur Bildung des vollkommenen Geometers für hinlänglich halten. Nichts hindert gewiß die Erweiterung der Wiſſenſchaften mehr, als dieſer Wahn. Wer ſich damit begnügt, wird beynahe ohne Mühe Geometer: aber Anfangsgründe der Wiſſenſchaften und gründliche Erlernung dieſer Wiſſenſchaften ſelbſt ſind von einander unterſchieden; ſo lange beydes für einerley gehalten wird, iſt kein großes Wachsthum der Mathematik zu erwarten. Wenn ich aber auch zugebe, daß die Analyſis, und die Anwendung ihrer Entdeckungen in den übrigen Theilen der Mathematik

nicht

nicht ohne mühſame Anſtrengung erlernt wird, ſo kann ich doch der Meynung derjenigen nicht beytreten, die dieſe Wiſſenſchaft für ſo ſchwer halten, daß ſich niemand, der nicht zuvor jeder Annehmlichkeit des Lebens entſagt hätte, darauf legen könne. So fürchterlich iſt ſie in der That nicht, ob man gleich geſtehen muß, daß, ſo wie zu Erlernung anderer ſchwerern Künſte und Wiſſenſchaften, alſo auch zu dieſer Fleis und Mühe, Fähigkeit und Scharfſinn erfordert werde. Die Analyſis verdient den Namen des ſchwerſten Theils der Mathematik ſo wenig, daß ſie vielmehr weit leichtere allgemeine Erfindungs- und Verfahrungsregeln an die Hand giebt, als in der ſynthetiſchen Beweisart enthalten ſind, wodurch alſo demjenigen, der ſich dieſer leztern Art bedienet, die Arbeit anſehnlich vermindert wird. Zu geſchweigen, daß die analytiſchen Auflöſungen zuweilen auf Wahrheiten führen, auf die man nach der ſynthetiſchen Methode vielleicht nie gekommen wäre.

Kenntnis der Geometrie und Analyſis iſt alſo in mancherley Rückſicht nothwendig, damit wir ſowohl von andern im gemeinen Leben nützlichen und unentbehrlichen Wiſſenſchaften zweckmäßigen Gebrauch machen, als auch ſelbige auf einen höhern Grad der Vollkommenheit, als ſie gegenwärtig beſitzen, bringen können.

Nicht geringer iſt der Nutzen und die Nothwendigkeit dieſer Wiſſenſchaften, wenn wir den Menſchen nicht nur als Bürger, ſondern auch als ein mit Vernunft und Verſtand begabtes Weſen betrachten. Schärfen ſie nicht ſeinen Verſtand und Vernunft? Stralen ſie ihm nicht mit ganz neuem, ganz vorzüglichem Licht entgegen? Dieſes halte ich nun

zwar auſer Zweifel geſezt, läugne aber, indem ich dieſes behaupte, gar nicht, daß es vorzügliche Köpfe gebe, oder geben könne, die blos von Natur dergeſtalt gebaut und aufgemuntert ſind, daß ſie ohne Beyhülfe der Geometrie zur Vollkommenheit gelangen: vielweniger behaupte ich, daß von Natur ſchwache oder durch Lebensart abgeſtumpfte, daher tief unter andern ſtehende Köpfe, blos mit Hülfe der Geometrie erhöhet und veredelt werden können. Eigentlich verhält ſich die Sache ſo: vermittelſt der Mathematik können vorzügliche Köpfe dergeſtalt erhoben werden, daß ſie beynahe ſich ſelbſt übertreffen; mittelmäßige aber können auf eine höhere Stufe gelangen. Dieſes glaube ich ſicher behaupten zu können. Denn alles, was zur Schärfung des Verſtandes dient, was ihm Fertigkeit und Behendigkeit, deutlich zu denken, gewähret, muß ohne Zweifel ſehr viel zur Vollkommenheit deſſelben beytragen. Aber Deutlichkeit und Richtigkeit im Denken iſt die Hauptſache in der Mathematik. Und das nicht allein; die beſten Köpfe haben noch überdies mit den mittelmäſigen den Fehler gemein, daß ſie öfters entweder aus Uebereilung, oder aus Mangel an genugſamer Ueberlegung, einer Meynung Beyfall geben; ſo wie ſie von Leidenſchaften oder Vorurtheilen hingeriſſen, zuweilen nicht im Stande ſind, das Wahre von dem, was blos in der Einbildung beruht, genau genug zu unterſcheiden: die unpartheyiſche Prüfung der Wahrheit, beſonders derjenigen, wodurch unſern Leidenſchaften und Vorurtheilen Gewalt angethan wird, iſt in der That äuſerſt ſchwer und mühſam: und blos aus dieſer Urſache iſt kein Sterblicher ſo glücklich, alle Klippen des Irrthums zu vermeiden. Die-

ſer Fehler wird aber durch das Vermögen und die Fertigkeit im Urtheilen, die der Geiſt beym Gebrauch der Mathematik gewinnt, wo nicht ganz aufgehoben, doch wenigſtens ſehr vermindert. Die Mathematik iſt eine ſolche Feindin aller Erdichtungen und Ungewißheiten, daß ſie ſelbige nicht nur von ihren Gränzen ganz abweiſet und daraus verjagt, ſie zeigt uns auch, mehr als jede andere Wiſſenſchaft, den Weg, nach welchem wir auch aus den Dingen, die auſer dem Gebiete der Mathematik liegen, alle Erdichtungen verbannen können. Da alſo dieſe Wiſſenſchaft dem Verſtande die Fertigkeit, ſeine Gedanken richtig zu ordnen, und den Zuſammenhang der Wahrheiten einzuſehen; da ſie ihm das Vermögen gewähret, ſich von den Vourtheilen, die gleichſam die Peſt der Menſchheit, Schandflecke der Vernunft ſind, loszureißen; ſollte ſie nicht daher für alle überhaupt nützlich, für gute und mittelmäßige Köpfe gleich unentbehrlich zu nennen ſeyn.

Dies ſind die wichtigſten, aber noch lange nicht die Vortheile alle, die dieſe Wiſſenſchaft dem mit Vernunft begabten Menſchen verſchaft. Denken wir uns in die ältern Zeiten zurück, und forſchen nach der Urſache ſo vieler falſchen Meynungen, die damals unſere Vorfahren und die ganze Welt beynahe überſchwemmten, ſo iſt kein Zweifel, daß ſelbige aus ihren falſchen Begriffen von der Natur der Dinge entſprungen ſind. Sonne, Mond und Sterne wurden für Götter gehalten, gewiß aus keiner andern Urſache, als weil die Beſchaffenheit dieſer Köper unbekannt war. Daher der ganze Schwarm des Aberglaubens und der Afterreligionen. Ueberall dachte man ſich in der Welt gute und böſe Geiſter, weil

man

man überall in der Natur Bewegungen, aber keine Triebfedern wahrnahm. Ja, die Unwiſſenheit trieb den Menſchen ſo weit, daß er ganz ſinnlos das verächtlichſte Ungeziefer, das ſein Fuß trat, und das Kraut, ſo ihn nährte, anbetete. *) Was war es aber, wodurch die Menſchen, von dieſem Aberglauben befreyet, wieder auf den rechten Weg gelangten, ſoweit nämlich die bloſe Vernunft ſie dahin zurückführen konnte? Gewiß nichts anders, als wahre und deutliche Erklärung der Natur, welche, wie vom Anfang, ſo auch jezt noch der beſtändige Endzweck und das Geſchäft der Mathematik iſt. Dieſe, indem ſie der Natur das ihrige gab, ſtürzte, ſo weit es die Vernunft im Stande war, die Thronen der falſchen Götzen um, und eröfnete zugleich die Quellen großer und erhabner Betrachtungen. Dieſer aus der Mathematik für die Menſchheit entſpringende Vortheil, in der That der größte und der edelſte, wird minder geſchäzt, als er verdient.

Daher auch der insgemein verkannte Werth der Sternkunde. Es iſt auſer Zweifel, daß der Staat ſowohl in der Vervollkommnung der Schiffahrt, als

auch

*) Dieſen Gedanken vom Urſprunge des Aberglaubens bey den wilden Völkern, nach welchem derſelbe, nebſt allen fabelhaften Meynungen des Alterthums von den Göttern, aus der groben Unwiſſenheit der natürlichen Urſachen und Begebenheiten hergeleitet wird, hat der Herr Verfaſſer in folgendem, in Däniſcher Sprache herausgegebenen, und nun auch ins Deutſche überſezten Buche: **Kurze Beſchreibung der Sitten, Gebräuche und Meynungen der wilden Völker,** Soroe, 1760. in 8. deutlich ausgeführt, und mit wahren Gründen zu beſtätigen geſucht. Mehr von dieſer Sache zu ſagen, iſt hier der Ort nicht. (T.)

auch in der Unterſcheidung der Zeiten, dieſer im gemeinen Leben ganz unentbehrlichen Bedürfniſſe, gedachter Wiſſenſchaft und den Beobachtungen der Sternkundigen ſehr viel zu danken hat. Da ein kleiner Theil jener Wiſſenſchaft ſchon ſo wichtige Dienſte leiſtet, was darf man nicht von den übrigen größern Theilen erwarten? Allein ſo groß auch der Nutzen der Sternkunde für den Staat iſt, ſo iſt doch der für den menſchlichen Verſtand noch weit edler und größer. Keine Wiſſenſchaft zeigt uns den Herrn der Natur und den Beherrſcher des Weltalls deutlicher und lebhafter. Der Begriff, den die Sternkunde von dieſem Weltall dem Verſtande einprägt, iſt einer der fruchtbarſten und wichtigſten in der ganzen Sammlung menſchlicher Kenntniſſe. Wie ſehr irren alſo diejenigen, die ſich einbilden, die beſte Sternkunde diene blos zum Vorwitz, und von ihren Entdeckungen, wie von den Leuten im Monde, den ſie ſo wenig kennen, als jene, urtheilen.

Daher zweifle ich nicht, daß wenn jemand auf den Einfall gerathen ſollte, eine allgemeine Barbarey wieder einzuführen, er kein beſſer Mittel hierzu erdenken könne, als den Menſchen die zur Mathematik gehörigen Wiſſenſchaften zu entreißen. Dann wird es bald dahin kommen, daß alle Gründe, womit Behauptungen beſtärkt werden, auf jene leeren Machtſprüche: davor halte ich — ſo denk ich — ſo bin ich überzeugt, hinauslaufen. Und da nichts gehörig bewieſen werden kann, ſo würde diejenige Meynung, die den erſten und größten Beyfall erhielte, die Oberhand behalten, und bald würden dann, wie die Geſchichte in vielen Beyſpielen bezeuget, die abgeſchmackteſten Meynungen über die mit der Vernunft

nunft am meiſten übereinſtimmenden Wahrheiten ſiegen. Es iſt daher ausgemacht, und wird auch ausgemacht bleiben: der Menſch kann die mathematiſchen Wiſſenſchaften ſchlechterdings nicht entbehren.

Das bishergeſagte giebt uns Anlaß, von der Lehrart dieſer Wiſſenſchaften auf hohen Schulen zu reden; daß es nützlich iſt, ſie hier zu lehren, erhellt, wie ich glaube, aus vorhergehendem deutlich genug. Billig wird aber gefragt, ob die Lehren, die gewöhnlich auf hohen Schulen vorgetragen werden, im gemeinen Leben und in der Anwendung Nutzen leiſten? die, ſo die Menſchen nach dem äuſerlichen Anſehen zu beurtheilen pflegen, werden, bey Bejahung dieſer Frage zweifelhaft ſeyn: dieſen iſt es genug, wenn ſich nur einer für einen Praktiker ausgiebt, ihn auch ſogleich für einen in der wahren Praxis brauchbaren Mann zu halten: und in der That iſt bey den meiſten Menſchen die Vorzeigung eines Titels hinlänglich, um einen Rang bey ihnen zu behaupten. Diejenigen aber, ſo die Sache genau erwägen, werden der Meynung leicht beytreten, daß einer, was er nicht gelernt hat, auch nicht in Ausübung bringen kann, und da dieſe Kenntnis auf den hohen Schulen unter dem Namen der Theorie begriffen wird, ſo erhellt, daß die Ausübung ſich nicht weiter als die theoretiſche Kenntnis erſtrecken werde. Derjenige aber verdient erſt den ehrwürdigen Namen eines wahren Praktikers, der mit der Kenntnis, die nur durch lange Uebung zu erwerbende Fertigkeit, das, was er gelernt hat, in Anwendung zu bringen, verbindet: andere ſogenannte Praktiker, wenn ſie etwas in der Ausübung anzuwenden ſuchen, verfahren gewöhnlich nur nach Bequemlichkeit und Maasgabe der

Umſtände: glückts, ſo iſts gut, wo nicht, deſto ſchlimmer! Gemeiniglich geſchieht es aber bey einem glücklichen Ohngefähr, daß diejenigen, denen die Ausführung einer Sache anvertrauet iſt, ſich leicht einbilden, ſie könne nicht anders und beſſer gemacht werden: indem ſie das, was blos durch ihre Unwiſſenheit nicht zur Wirklichkeit kommt, für unmöglich halten, und wenn die Sache nur einigermaßen glücklich ausfällt, glauben, ſie ſey herrlich und aufs beſte gerathen. Und dieſer ſtumpfe Geſchmack hat ebenfalls ſeinen Urſprung aus dem Mangel an Kenntnis. Damit wir aber näher zur Sache kommen, ſo laſſet uns die Frage erwägen: ob die theoretiſche Kenntnis mehr als die ſogenannte Praxis auszurichten im Stande ſey? Dieſe muß verſchiedentlich ſowohl bejaht als verneint werden. Folgt die Praxis, wie gehörig, den Vorſchriften der Theorie, ſo muß man geſtehen, daß durch dieſe beynahe eben das, was durch jene ausgerichtet werde: denn ſo oft theoretiſche Betrachtungen für nützlich befunden werden, pflegen ſie unter gewiſſen deutlichen Regeln begriffen zu ſeyn, die man hernach in der Ausübung ſicher befolgen kann, wenn auch gleich, was öfters geſchieht, der Grund derſelben von denen, ſo ſie anwenden, nicht eingeſehen wird: alsdenn leiſtet die bloſe Kenntnis dieſer Regeln eben das, was die deutliche Einſicht derſelben aus ihren Gründen. Weil aber die theoretiſchen Betrachtungen ſich auf mehrere Gegenſtände erſtrecken, und nicht wie die Praxis beſtändig in den nämlichen Gränzen eingeſchloſſen ſind, vielmehr ſelbige ſtets erweitern, ſo begreift man, daß jene zur mehrern Vervollkommnung der Einrichtungen im gemeinen Leben ſehr viel beytragen, und die

bloſe

bloſe Praxis allein nicht zureichend ſey. Doch muß man geſtehen, daß die Anwendungen, oder die angeſtellten Verſuche, ſie mögen nun nach Wunſch ausgefallen ſeyn, oder nicht, öfters Gelegenheit zu Erweiterung der Wiſſenſchaft gegeben haben.

Daß aber diejenigen Haupttheile der Mathematik, die den Staat angehen, den höchſten Grad ihrer Vollkommenheit ſchon erreicht hätten, iſt eine Meynung, die von der Wahrheit ſehr weit entfernt iſt. In der That fehlt daran viel: in den meiſten Dingen machen die bereits vorhandenen Entdeckungen den kleinſten, die noch fehlenden den größten Theil aus. Die Mathematik iſt, wie die übrigen Wiſſenſchaften, noch ſehr unvollkommen. Mit allen unſern Arbeiten, Berechnungen, Unterſuchungen und Betrachtungen, gewinnen wir oft weiter nichts, als einen neuen Beweis von der Schwäche unſers Verſtandes, und die unangenehme Erfahrung, daß die Erforſchung der Wiſſenſchaften oftmals eine der ſchwerſten und undankbarſten Arbeiten ſey. Es iſt alſo ſoweit entfernt, daß die Theorie heut zu Tage ſchon vernachläßigt werden kann, daß ſie vielmehr noch immer beſſer bearbeitet und mit allem Fleiße erweitert werden muß: von dieſer Arbeit dürfen wir uns nicht abſchrecken laſſen, ſollten wir gleich, was gemeiniglich geſchieht, auf neue Wege gerathen, die entweder nicht ohne viele Mühe gebahnt, oder nicht ohne Schwierigkeit verfolgt werden können.

Man muß aber auch geſtehen, daß die Aufnahme dieſer Wiſſenſchaften nicht allemal in der Gewalt der Geometer und ihrem zu erwerbenden Fleiß und Scharfſinn beruhe; ſie erfordert zuweilen beſondere Veranlaſſungen, auch wohl Belohnungen, wodurch

gute Köpfe aufgemuntert werden. Da zuweilen Verſuche nöthig ſind, die ohne milde Unterſtützung der Großen nicht angeſtellt werden können, ſo begreift man, warum die Entdeckung der heut zu Tage noch größtentheils verborgenen Naturgeſetze von den Geometern allein nicht zu erwarten iſt. Zu geſchweigen, daß bey den zahlreichſten und kräftigſten Unterſtützungen der Gönner jene Wahrheiten doch ſo tief verborgen ſeyn können, daß es nicht einmal in der Menſchen Gewalt ſteht, ſie ans Licht zu bringen. In der That muß man ſich bey unſerer gegenwärtigen eingeſchränkten Kenntniß der Naturgeſetze mehr darüber wundern, daß die Wiſſenſchaften bereits ſo weit, als daß ſie nicht noch weiter gebracht worden ſind. Dieſe Fortſchritte aber haben wir den allgemeinen Beweisarten, die uns die Analyſis lehrt, zu danken, obgleich auch dieſe, wie alles menſchliche, von ihren Fehlern nicht frey ſind. Wir haben zwar neue Methoden erfunden, und bedienen uns derſelben, um einen neuen vorher noch ungebahnten Weg einzuſchlagen; nachdem wir auf demſelben ſchnell weit fortgeſchritten ſind, gelangen wir dahin, wo der weitere Fortgang anfängt, beſchwerlich zu werden: endlich erreichen wir die Gränze, über welche, wenn nicht vielleicht Glück und eine neue Methode zu Hülfe kommen, das weitere Vordringen ſchlechterdings verſagt iſt.

Unſterblichen Ruhm verdient alſo der, ſo durch die weiſeſten Anſtalten, und durch mannichfaltige Aufmunterungen die Aufnahme dieſes ſchwerſten und nützlichſten Theils menſchlicher Kenntnis befördert, und dadurch die Bedürfniſſe der Menſchheit erleichtert. Die Wiſſenſchaften können leicht zu Grunde

gehen

gehen: darzu gehören wenig Kräfte; aber ſie wieder blühend zu machen, das erfordert Kunſt. Preiſen wir demnach die Glückſeeligkeit unſerer Zeiten, da die Wiſſenſchaften blühen, und an unſerm erhabnen Friedrich einen ihrer erlauchteſten Beſchützer und Gönner verehren.

Auf hohen Schulen, dieſen feſten Wohnplätzen der Wiſſenſchaften, iſt vorzüglich dahin zu ſehen, daß den Zuhörern, beſonders in den öffentlichen Vorleſungen, diejenigen Theile der Wiſſenſchaften, die in Verbindung mit den übrigen die nützlichſten und nothwendigſten ſind, erklärt werden. Hierbey muß man ſich nach eines jedweden Talenten und Abſichten richten; dem einen mehrere und ſchwerere, dem andern nur die leichteſten Sachen vortragen; da dies aber in den öffentlichen Vorleſungen nicht angeht, muß man einen Mittelweg wählen, der dem einen nicht zu rauh, dem andern nicht zu kurz, und den doch alle gewiſſermaßen verfolgen können. Dann läßt man die, ſo ſich dieſen Wiſſenſchaften ganz widmen wollen, dasjenige erlernen, mit deſſen Beyhülfe ſie das übrige für ſich ſelbſt verſtehen können; zu welchem Ende ſolche Schriften dienen, aus denen eine ausführliche, obgleich nicht ganz vollſtändige Kenntnis der Wiſſenſchaften geſchöpft werden kann. Dieſen Rath habe ich, bey Verfaſſung gegenwärtigen von mir herausgegebenen Werks, zu befolgen und zugleich ſtets dahin zu trachten geſucht, daß die Ausführung, jenem vorgeſezten Endzweck gemäß, weder zu weitſchweifig, noch zu kurz würde. Solchergeſtalt ſchmeichle ich mir, dem gnädigſten Befehl, der mir dieſe Arbeit auftrug, ſo viel mir möglich, Genüge geleiſtet zu haben, eine Arbeit, die ich lieber

andern, die mehr Geſchicklichkeit und Kräfte beſitzen, gegönnt hätte.

Um das Werk deſto nützlicher zu machen, hab' ich es in Vorleſungen und Zuſätze abgetheilt. In jenen, die auf unſerer hohen Schule öffentlich geleſen werden, hab' ich oben erwähnten Mittelweg gewählt, den nach meinem Urtheil jeder betreten kann. Dieſe Vorleſungen wird jeder, der in der Elementargeometrie unterrichtet iſt, und mit Auflöſung quadratiſcher Gleichungen umzugehen weiß, leicht verſtehen; und weiter iſt nichts nöthig. Sie enthalten die Anfangsgründe der Mechanik, doch ſo, daß, nach meiner Ueberlegung, die meiſten Leſer nichts darinn vermiſſen werden. Ich habe darinn nicht allein das, was die Bewegung und ihre Geſetze betrift, ſondern auch einen großen Theil deſſen, was ſonſt zur Naturlehre gehört, und darunter vieles, das gleichſam den Innbegriff dieſer Wiſſenſchaft ausmacht, erläutert. Denn die **Naturlehre** iſt mit der Mechanik in den meiſten Haupttheilen ſo enge verbunden, daß jene ohne Kenntnis dieſer nicht gründlich begriffen werden kann.

In den Zuſätzen erkläre ich die Methoden, nach welchen die allgemeinſten Auflöſungen der Aufgaben, und daraus für jeden Fall beſondere leicht gefunden werden können. Jene allgemeinen Beweisarten dienen nicht allein zum Verſtande der bisher in der Mechanik gefundenen, ſie führen auch zu Entdeckung neuer noch unbekannter Wahrheiten. Vorzüglich bring' ich in den Zuſätzen dasjenige bey, ſo mit Hülfe der **Differential- und Integralrechnung** bewieſen zu werden pflegt, wobey ich die verwickelten und ſchweren ſynthetiſchen Beweiſe der alten Geometer über-

übergehe. Nicht als ob ich ſie gering ſchäzte. Nichts weniger; vielmehr glaub' ich, daß ſie dem menſchlichen Verſtande zur größten Ehre gereichen: halte ſie aber, wenn ſie gleich Lehrern dieſer Wiſſenſchaften ſehr nützlich ſind, keineswegs für Anfänger angemeſſen, und für unzweckmäßig, ſie überall in der Mathematik anzubringen. Denn daß die Schriften eines **Euklides, Archimedes** und **Apollonius** vortreflich und ſchätzbar ſind, iſt kein Zweifel. Allein beym Unterrichte der Jugend jenen Schriftſtellern folgen, und hernach ihre Methoden in der **angewandten** Mathematik anbringen, iſt in der That nichts anders, als der Erweiterung und Ausbreitung der Mathematik Hinderniſſe in den Weg legen.

Auſer den allgemeinen Methoden findet man auch in den Zuſätzen diejenigen Lehren bewieſen, davon man die Beweiſe in den Vorleſungen, um den Raum zu deutlicherer Erklärung nützlicherer Wahrheiten zu ſparen, weggelaſſen hat. Dergleichen ſind auch in den, den Vorleſungen beygefügten Anmerkungen, wo ſie ſich kurz ausführen ließen, gegeben worden, damit der Leſer, der ſelbige durchzuſehen Luſt hat, nicht genöthigt iſt, ſie erſt in den Zuſätzen aufzuſuchen, ſondern ſie, im Zuſammenhang mit den übrigen, mit einem Blick überſehen kann. Dieſes hab' ich auch in den Zuſätzen in Acht genommen, damit der Leſer, bey Anwendung der allgemeinen Regeln und Methoden auf Beyſpiele, durch ſchwerere und minder nothwendige Dinge nicht ermüdet werde. Sollte man nicht alles ſo deutlich, als man vielleicht wünſchte, aus einander geſezt finden, ſo beſchuldige man deshalb nicht den Verfaſſer, ſondern die Materie, die er abhandelt; nicht alles läßt ſich gleichverſtändlich vortragen.

In den Vorleſungen kommen einige, wiewohl ſehr wenige, folgendergeſtalt (.) bezeichnete Stellen vor; ich wollte ſie aus dem Zuſammenhang der übrigen nicht trennen; unterſchied ſie aber durch ein eignes Zeichen, weil ich ſie in den öffentlichen Vorleſungen nicht vorzutragen und zu erklären pflege. Von den angeführten §. §. iſt blos zu merken, daß eine Stelle in den Vorleſungen, worauf man ſich, wo es nöthig iſt, in den Zuſätzen bezieht, durch **Vorl.** angedeutet wird.

Alle Haupttheile der **Mechanik**, die in dieſem Werke einigen Nutzen haben können, hab' ich in den Vorleſungen mit den Zuſätzen verbunden. Der Leſer wird ſehen, daß ich bey ſchweren Materien keine Knoten vorbeygelaſſen, ſondern vielmehr die Natur derſelben erklärt und gezeigt habe, durch was für Mittel ſie aufgelößt und entwickelt werden können. Einige werden ſagen, ich ſey bey gewiſſen Materien zu weitläuftig geweſen, wovon andere hingegen eine weitere Ausführung gewünſcht hätten. Dergleichen Urtheile muß ſich jeder Schriftſteller gefallen laſſen, und von ſeiner Mühe nichts gewiſſers, als Tadel erwarten. Billig muß man aber mit dieſer Freyheit der Gelehrten, im Beurtheilen, Nachſicht haben.

Die Wiſſenſchaft, ſo bey uns den Namen der **Mechanik** führt, war in Griechenland, der Mutter der Wiſſenſchaften, nicht ſonderlich bekannt. Die Griechen, ſonſt ſehr berühmt in Anſehung ihres Scharfſinns, ſcheinen niemals über eine andere, als die gleichförmige Bewegung, nachgedacht zu haben. Die erſten Anfänge dieſer Wiſſenſchaft ſind allererſt aus dem vorigen Jahrhunderte herzuleiten, von der Zeit an nämlich, da **Galiläi** die entdeckten

Geſetze vom Falle ſchwerer Körper öffentlich bekannt machte; deſſen Lehren von der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, von den aus der Schwere entſpringenden Bewegungen überhaupt, und vom Schwerpunkte, Torricellius, Borellus u. a. hernach weiter ausgeführt und erläutert haben. Beynahe zu gleicher Zeit lebte Kepler, der das Parallelogramm der Kräfte in der Mechanik anwandte. Doch durch alles dies erhielt dieſe Wiſſenſchaft noch keinen ſonderlichen Zuwachs. Vergebens ſuchten Merſennus, Carteſius u. a. die Kräfte ſtoßender Körper und die Geſetze des Stoßes ausfindig zu machen, bis endlich gegen das Jahr 1669. Wallis, Huygens und Wren zuerſt die wahren Geſetze vom Stoße der Körper entdeckten, wodurch unſere Wiſſenſchaft beträchtlichen Zuwachs erhielt, obgleich das wahre Maas der lebendigen Kräfte zur Zeit noch unbekannt blieb. Bald darauf traten Huygens vortrefliche Entdeckungen, von der Bewegung der Pendeln, von der Bewegung in der Radlinie und vom Schwingungspunkt ans Licht. Dadurch wurde neues Licht über die Mechanik verbreitet, die, vorher in ſehr enge Gränzen eingeſchloſſen, nunmehr die Geſtalt einer Wiſſenſchaft gewann.

Groß waren dieſe Entdeckungen, größere aber blieben noch zurück, womit der erhabene Newton in ſeinen Principiis Philoſophiæ Naturalis Mathematicæ beynahe die ganze gelehrte Welt in Erſtaunen ſezte. Nun nicht mehr war die Rede von den durch Galiläi entdeckten Geſetzen unſerer Schwere; aufgeſchloſſen waren vielmehr die Geſetze der allgemeinen Schwere, nach welchen das ganze Weltgebäude regiert wird. Seitdem erſt drang der menſchliche

Verſtand in die allgemeinen Geſetze der Natur. Mit Hülfe der Centralkräfte und der allgemeinen Schwere war alles hell und klar, wovon vorher niemand ſich einen deutlichen Begriff zu machen im Stande war. **Newtons** Principia ſind ein wahrer Schatz, voll von neuen Erfindungen und Wahrheiten, reich an neuen allgemeinen Methoden, die die Quellen zur Erforſchung und Entdeckung unzähliger anderer Wahrheiten eröfnen. Zunächſt an **Newton** verdienen den größten Ruhm die beyden **Bernoulli's**, da ſie ſowohl jene allgemeinen Erfindungsmethoden noch mehr vervollkommneten, als auch **Newtons** ſchwerere ſynthetiſche Beweiſe in leichtere analytiſche verwandelten: dadurch machten ſie ſich dergeſtalt um dieſe Wiſſenſchaft verdient, daß man ſagen kann, ſie haben zur Erweiterung und Bereicherung derſelben mit neuen Erfindungen beynahe eben ſo viel, als **Newton** durch ſeine Principia, beygetragen.

Ueberdies wurden auch durch die Bemühungen der gelehren Geſellſchaften und anderer berühmten Männer die Gränzen der Mechanik erweitert, wovon einige in **Newtons** Fußtapfen traten, andere den **Bernoulliſchen** Methoden folgten. Es würde zu weitläuftig ſeyn, alle diejenigen nach Würden zu rühmen, die mit vieler Mühe und Fleis, ſowohl durch glücklichen Zufall, als durch ihre Betrachtungen, auf große, neue und nützliche Wahrheiten fielen; ſchon ihr Name ſpricht ihr Lob. Schriftſteller vom erſten Rang ſind: **Gregory, Tailor, Maclaurin, Herrmann, Euler, Clairaut, Maupertuis** und **d'Alembert**, deren Schriften, ſo lange man nur Wiſſenſchaften ehrt, geprieſen werden.

Doch

Doch hat man die Entdeckung der allgemeinen Naturgeſetze **Newton** allein zu danken, wenn gleich andere nach ihm weiter fortgeſchritten ſind. Denn ſeit der Zeit ſind viel neue allgemeine Erfindungs- und Beweisarten hinzugekommen. So kam von den Bernoulli's die Methode, die Bewegung eines jeden ganzen Körperſyſtems zu beſtimmen, hinzu, welchen ſchweren Theil vor andern Herr **Daniel Bernoulli** ins Lichte ſezte. Auch wurde eine neue Art, die Umdrehungsbewegung zu beſtimmen, von gedachten Herrn **D. Bernoulli**, und dem großen Mathematiker, **Leonhard Euler**, ausgedacht. Die Geſetze der ſchwingenden Bewegung (modus vibratorii) fand Herr **Tailor**, eine Sache von der größten Wichtigkeit in der Mechanik.

Das Maas der lebendigen Kräfte haben wir dem Scharfſinn des Herrn von **Leibnitz** zu danken. Kein Satz in der Mechanik iſt ſo beſtritten und vertheidigt worden, als dieſer. So fand auch der von **Maupertuis** angegebene **Satz der kleinſten Wirkung** viel Gegner, der auch heut zu Tage, wenigſtens, was die kleinſte Wirkung in der Bewegung betrifft, noch nicht von allen Zweifeln befreyt iſt.

Die bisher erwähnten Entdeckungen lege ich dem Leſer in dieſem Werke weiter und gewiſſermaßen vollſtändig ausgeführt dar. Meiner Abſicht nach ſollte es für ſich ein Ganzes ausmachen, damit nicht der Leſer, im Fall weiter kein Theil herauskommen ſollte, ein nur halb vollendetes Werk bekäme. Denn da Arbeiten, die erſt in langer Zeit vollendet werden können, von künftigen Zufällen und mancherley Veränderungen, die kein Menſch vorausſehen kann, abhängen;

hängen; ſo kann ich auch nichts gewiſſes verſprechen, als daß ich, wenn mir Gott Leben, Geſundheit und Kräfte erhält, die Herausgabe des zweyten Theils, welcher die **Statik**, **Hydrodynamik**, nebſt der **Maſchinenlehre** enthält, ſo viel als möglich, beſchleunigen werde.

Durchgehends hab' ich mich der Deutlichkeit befliſſen; mich aber dabey gehütet, den Leſern keinen Ekel zu erwecken. Der Benennungen, wodurch man die Sätze zu unterſcheiden pflegt, z. B. **Lehrſatz**, **Aufgabe** u. ſ. w. hab' ich mich enthalten, um deſto mehr Raum und Pappier zu erſparen, da das Werk aus andern Urſachen ſchon ſehr weitläuftig gerathen; ich glaube, der Deutlichkeit dadurch keinen Abbruch gethan zu haben. So ſehr ich mich aber auch bemüht habe, meine Meynung klar und deutlich auszudrücken, ſo ſind doch einige Zweydeutigkeiten eingeſchlichen, die hier angezeigt werden müſſen. Z. B. der in der erſten und fünften Vorleſung vorkommende Ausdruck: **abſolute Kraft**, bedeutet meiner Meynung nach, die Trägheit, oder die **Maſſe** mit der **Beſchleunigung multiplicirt**, das iſt: das **Gewicht der Körper** überhaupt. Andere nennen ſie den **relativen Druck**. Indeſſen liegt nichts an den Namen, wenn nur die Leſer ihre Bedeutung wohl einſehen; daß aber obiger Ausdruck hier richtiger gebraucht ſey, ſieht man leicht.

Die im §. 21. Zuſ. vorkommende Gleichung: $h = \frac{r^{n} a^{n-1}}{1+n}$, gilt daſelbſt nur, wo die Geſchwin-

digkeit

digkeit endlich iſt, welches auch im folgenden (2.) noch deutlicher geſagt wird.

In §. 22. 2.) kann der Leſer bey der Gleichung $gx = Pr$ zweifelhaft ſeyn. Es iſt daher zu merken, daß P hier die Centralkraft in der Entfernung vom Mittelpunkte x heißt, die in der Entfernung r unſerer Schwere gleich geſezt wird. In der Weite r aber wird die Kraft P in $\frac{Pr}{x}$ verwandelt, weil ſie der Weite proportional angenommen worden, daher $\frac{Pr}{x} = g$, und $Pr = gx$. Demnach verhalten ſich mehrere Kräfte, die in der Weite x ungleiche abſolute Größen haben, in der Weite r wie $\frac{1}{r}$; denn hier ſind g und x beſtändige, P und r aber veränderliche Größen.

In der achten Vorleſung §. 159. wird vom doppelten Schwunge der Pendeln geredet, davon der eine ſeine Richtung **nach der Grundlinie**, der andere **nach den Seiten** hat. Erſterer heißt auch der **Schwung nach der horizontalen**, der andere der **nach der vertikalen Ebene**. Jene Benennung findet dann erſt genau ſtatt, wenn der Schwung am kleinſten iſt: ich bediene mich aber derſelben auch, um die übrigen Schwingungen anzudeuten, weil alle Punkte der Figur während dem Schwunge gegen die Horizontallinie beſtändig einerley Lage behalten, ob ſie gleich durch verſchiedene Horizontalebenen gehen.

Zu

Zu §. 160. d. 2. Vorleſ. iſt anzumerken, daß r den Halbmeſſer der Kugel bedeutet.

Vielleicht iſt es auch in §. 197. Zuſ. nicht leicht einzuſehen, warum B = 2ſch. Der Deutlichkeit wegen iſt zu merken, daß hier die Ordinate y beſtändig zwo ungleiche Werthe hat, weil ſie durch die verlängerte Abſciſſe $\pm$ x gezogen, die Parabel in 2 Punkten durchſchneidet. Wenn alſo x = 0, ſo ſollte auch ſeyn y = 0: es iſt aber y = 2ſch, folglich 2ſch der beſtändige Unterſchied der Werthe für die Ordinate y. Daher auch Taf. XI. Fig. 6. 2ſch = GM = AL. Wenn alſo beydes y und x = 0, ſo wird auch ſeyn 2ſch — B = 0, und B = 2ſch.

Vorerinnerung an den Leſer.

Zwo Urſachen waren es, die mich hauptſächlich veranlaßten, gegenwärtiges vortrefliche Werk des ſeel. Herrn **Kraft**, aus dem Däniſchen ins Lateiniſche zu überſetzen, und ſelbiges dadurch gemeinnütziger zu machen. Erſtlich die Reichhaltigkeit des Buchs, nebſt der Menge und dem Umfang der Materien, die der Verfaſſer darinn zuſammengetragen; zweytens die ganz beſondere und vorzügliche Lehrart ſelbſt, deren er ſich bedienet, und die mehr, als irgend eine andere, zum Beſten derer, die ſich ſelbſt in dieſer Gattung von Wiſſenſchaften üben wollen, eingerichtet iſt. Die **Mechanik** oder die **Wiſſenſchaft von der Bewegung**, bereichert mit den Entdeckungen der Neuern, iſt mit Ausnahme der dem zweyten Theile dieſes Werks vorbehaltenen Anwendung derſelben auf die Maſchinen ſelbſt, mit allen ihren Theilen in dieſem Buche dergeſtalt ausgeführt, daß der Leſer nicht nur die erſten Gründe, ſondern auch den ganzen Umfang dieſer Wiſſenſchaft vor Augen hat. Damit will ich nicht ſagen, der Verfaſſer habe in der Theorie ganz und gar nichts unberührt gelaſſen, oder alle Haupttheile dergeſtalt erſchöpft, daß nichts mehr hinzuzuthun ſey. Keinesweges. Dazu würde ein ungeheures Werk erfordert, ſo der Herr Verfaſſer weder liefern wollte, noch jemand von ihm erwarten konnte, welcher weis, zu was für einer Größe dieſe Wiſſenſchaft in den neuern Zeiten geſtiegen, und wie groß die Menge von Entdeckun-

deckungen in derſelben iſt, die ein Buch von mäßiger Stärke unmöglich alle faſſen kann. Es iſt genug, daß mehrgedachter Herr Verfaſſer das, was entweder wegen ſeines theoretiſchen Nutzens, um andere Theile der natürlichen Philoſophie einzuſehen, oder wegen ſeines praktiſchen Gebrauchs, beym Maſchinenweſen, vor andern merkwürdig iſt, zur Befriedigung des Leſers deutlich aus einander geſezt; das übrige aber, was zu theoretiſchen Betrachtungen möglicher Bewegungen gerechnet werden kann, und nicht ohne Nutzen iſt, ſo wie die beſondern Gattungen von Bewegungen auf die Art, wie man hier ſieht, berührt und abgehandelt hat. Bey alle dieſem hat er ſich weder zu kurz noch zu lange aufgehalten, ſo daß, wer ſich ſeiner Anleitung bedient, mit leichter Mühe alles ausführlicher für ſich ſelbſt unterſuchen, oder andere Schriften darüber zu Rath ziehen kann. Nur in der Lehre von der **Umdrehungsbewegung der feſten Körper**, die bey Erklärungen der Bewegungen der Himmelskörper von großen Nutzen iſt, dürfte der Leſer eine vollſtändigere Ausführung vermiſſen. Doch übergeht er auch dieſe Materie nicht ganz mit Stillſchweigen. In der XIX. Vorleſung erklärt er die Gründe und die allgemeine Methode, dieſe zu beſtimmen, dergeſtalt, daß man das übrige in **Eulers** Theoria motus corporum rigidorum, die im Jahr 1765. herausgekommen, leicht nachſchlagen kann.

Zu der Menge der in dieſem Werke abgehandelten Materien, und der Reichhaltigkeit deſſelben ſcheint mir auch dasjenige gerechnet werden zu müſſen, was zwar auſer den eigentlichen Gränzen der Mechanik liegt, der Leſer aber mit Nutzen und Vergnügen am

gehöri-

gehörigen Orte finden wird. Der Verfaſſer erklärt die Umlaufsbewegungen der Körper in ihren Bahnen nicht nur im allgemeinen, ſondern er wendet dieſe Theorie zugleich auf die Bewegungen der Himmelskörper an, und trägt alſo noch auſer der allgemeinen Wiſſenſchaft von der Bewegung, einen der edelſten Theile der Naturlehre aufs deutlichſte vor.

Von größerer Wichtigkeit aber war mir der zweyte Grund, warum mir gegenwärtiges Werk würdig ſchien, in der allgemeinen gelehrten Sprache bekannter zu werden. Seine Lehrart iſt ganz vortreflich, ſo leicht und dergeſtalt nach der Fähigkeit der Lernenden, und der ſich ſelbſt Unterrichtenden eingerichtet, daß, wer bey nur mittelmäßiger Kenntnis der Arithmetik und Geometrie nicht im Stande wäre, ſich durch eignen Fleis aus dieſem Buche von dieſer Wiſſenſchaft gründlich zu unterrichten, oder die bereits erworbenen Kenntniſſe aus demſelben zu vervollkommnen, gewiß zu den Wiſſenſchaften ganz und gar untüchtig ſeyn müßte. Bey dieſer Deutlichkeit kömmt es nicht allein darauf an, die Materien dergeſtalt zu ordnen, daß die vorhergehenden den folgenden zur Grundlage dienen. Es wird noch mehr dazu erfordert. Denn das Feld dieſer Wiſſenſchaft kann nicht mit der Meersfläche, oder einer weitgeſtreckten Ebene verglichen werden, deren ſämmtliche Theile mit Hülfe eines gleichförmigen, jedoch dabey anhaltenden Schritts, aufs gemächlichſte durchwandelt und in Augenſchein genommen werden können. Hier und da finden ſich Ungleichheiten, Berge und Thäler, Anhöhen und Abhänge, rauhe und ſchlüpfrige Wege, die mit Mühe des Wandrers Fuß betritt, mit untermiſchten Ebenen, worauf er leichter fort-

ſchreitet. Die Hauptſache der Methode beruht alſo darauf, daß man der Fähigkeit der Lernenden, nach dieſer Verſchiedenheit der Stellen, auch auf verſchiedene Art zu Hülfe komme. Dieſes hat der Verfaſſer vortreflich geleiſtet. Theils ordnet er die Sachen ſo, wie ſich die Begriffe derſelben dem Verſtande am leichteſten darbieten, theils führt er überall von der Seite, wo der Zugang am leichteſten iſt, zu denſelben; theils entwickelt und erklärt er die Materien auf eine jedem Talente anpaſſende Art, theils weiß er auch durch eingeſtreute Erinnerungen die Aufmerkſamkeit des Verſtandes zu erregen, und den Scharfſinn deſſelben zu erhöhen, daß er mit größern Eifer die Sache einzuſehen, ſich beſtrebt. Vorzüglich zeigt ſich der Fleiß und die ungemeine Deutlichkeit des Verfaſſers bey Erläuterung ſchwerer und verwickelter Materien. Ueberall kommen in den Wiſſenſchaften, ſo auch in den mathematiſchen, wenn man über die Anfangsgründe hinaus iſt, ſolche Begriffe vor, die den Innbegriff der zu erklärenden Wahrheiten ausmachen, und die doch zugleich in ihrer Art ſo verwickelt ſind, daß ſie nicht deutlich und beſtimmt gefaßt werden können, wenn nicht eine lange Reihe anderer Gedanken, wovon jene die Schlußfolgen ſind, vorhergegangen. Daher werden auch diejenigen, die ſich in Anwendung der Theorie auf die Praxis üben, und doch keine genaue Kenntnis von jener beſitzen, viel Irrthümer begehen, weil ſie ſich von dem, worauf es bey jeder Sache ankommt, keinen richtigen und beſtimmten Begriff machen können. Kein Wunder! So wie alle unſere Entdeckungen nicht das Reſultat blos einfacher Vernunftſchlüſſe ſind, ſondern eine beſondere, den Erfindern eigne

Lebhaf-

Lebhaftigkeit des Verſtandes erfordern, der, indem er aufs höchſte geſpannt, eine lange Reihe von Begriffen und Schlüſſen auf einmal überdenkt, ſich endlich derſelben bemächtigt und dem Gebiete der Wiſſenſchaften unterwirft; ſo werden auch ſelbige von den Lernenden ſelten ohne einige lebhaftere Anſtrengung des Verſtandes richtig begriffen, wenn nicht die Geſchicklichkeit des Lehrers zu Hülfe kommt. Dieſe ſchweren Gegenſtände hat der Verfaſſer in ſeiner Mechanik nicht allein deutlich eingeſehen, ſondern auch mit vorzüglicher Deutlichkeit abgehandelt. Durchgängig ſchickt er die leichtern und einfachern Sätze voraus, und beweiſt darinnen jedes für ſich, was in den ſchwerern dunkel und verworren iſt. Dabey unterläßt er auch nicht, den Leſer jedesmal zu erinnern, wo er entweder den wahren Begriff leicht verfehlen, oder, ehe er ſelbigen vollſtändig erreicht, auf dem Wege ſtehen bleiben, oder ſonſt auf andere Art anſtoßen kann.

Aus dieſer Methode des Verfaſſers, die einzelnen Haupttheile zu behandeln, verbunden mit der zuſammenhängenden Ordnung und der natürlichen einfachen Deutlichkeit des Vortrags, ſcheint die Zierlichkeit zu entſpringen, die man in dieſem Werke wahrnimmt. Er enthält ſich, wie billig, aller gekünſtelten Wortblumen, und des redneriſchen Schmucks, womit man die Sachen auszuzieren pflegt. Dieſer hat zwar bey andern Dingen gehörig angebracht ſeinen Nutzen und Werth, wird aber aus den philoſophiſchen und mathematiſchen Wiſſenſchaften, deren einziger Endzweck die Belehrung und Ueberzeugung des Verſtandes iſt, mit Recht als fremd und überflüßig verwieſen. Es giebt aber eine

andere Zierlichkeit und Schönheit für den Verſtand, die der Natur der Wiſſenſchaften, ſo auch der mathematiſchen entſpricht, kraft welcher die vorgetragenen Wahrheiten ſich dergeſtalt einſehen laſſen, daß ſie weder eine allzu leichte noch allzu beſchwerliche Anſtrengung des Verſtandes erfordern, welches allemal mit dem angenehmen Gefühl, ſo die gehörige Uebung unſerer Kräfte bey ſich führt, verbunden iſt. Dieſe Zierlichkeit aber entſpringt aus der Art, die Sachen zu behandeln, deren ſich Herr **Kraſt**, wie wir oben geſagt haben, in ſeiner Mechanik bedient.

Endlich hat auch der Verfaſſer, meines Erachtens, darinn ſehr für den Nutzen der Leſer geſorgt, daß er die Zuſätze von den **Vorleſungen** ſelbſt ſo deutlich getrennt hat, daß ſowohl dieſe, als jene, eine beſondere Abhandlung auszumachen ſcheinen. In den **Vorleſungen** hat er dasjenige zuſammengetragen, was, ſo zu ſagen, den philoſophiſchen und geometriſchen Theil der Wiſſenſchaft von der Bewegung ausmacht, den andern analytiſchen Theil aber, der die höhern, mit Hülfe der Analyſis, gefundenen Wahrheiten enthält, trägt er in den Zuſätzen vor. Dabey iſt jener weder leer noch mager, bleibt auch nicht bey den bloſen Anfangsgründen ſtehen. Nichts weniger. Er iſt in der That der edelſte Theil dieſer Wiſſenſchaſt, ob er gleich nicht ſo tief ins Innere der Wahrheiten dringt, als der andere analytiſche, in den Zuſätzen enthaltene Theil, zu welchem ſich jener verhält, wie die Menge von Begriffen, die wir von den ſinnlichen Gegenſtänden durch das bloſe Auge, zu der, die wir durch das bewaſnete erlangen. Daß aber jener philoſophiſche und geometriſche Theil beſonders vorgetragen iſt, wird Liebhabern der Wiſſen-

ſchaften, und andern, die zwar der höhern analytiſchen Rechnungen unkundig ſind, doch aber Arithmetik und Geometrie verſtehen, nicht unangenehm ſeyn. Dieſe können durch dieſe Abtheilung jenen vortreflichen und in der übrigen Philoſophie ſehr nützlichen Theil der Mechanik durchgehen und ſich denſelben bekannt machen. Der Verfaſſer hat ſich aber auch um diejenigen, ſo des Calculs mächtig ſind, auf dieſe Art verdient gemacht. Denn da er in den Vorleſungen beſtimmte Begriffe der Dinge vorausſchickt, und ihre Eigenſchaften deutlich erklärt; ſo legt er den Grund, entwickelt die Knoten, und bringt zugleich dadurch zuwege, daß der, ſo mit Anwendung des hohen Calculs dieſe Unterſuchungen noch weiter verfolgen will, vorher hinlänglich unterrichtet iſt, und ſieht, zu was für Abſicht und auf welchem Weg die Rechnung ſelbſt zu führen ſey. Ich läugne nicht, daß daher zuweilen einige Weitſchweifigkeit entſtanden, und der Verfaſſer an vielen Orten kürzer hätte ſeyn können, wenn er ſtatt der aus der Geometrie hergenommenen Beweiſe und Erläuterungen analytiſche Formeln gebraucht und gerechnet hätte. Daß er er aber dieſes nicht gethan, muß man ihm, meines Erachtens, vielmehr Dank wiſſen.

Denn gleichwie eine gewiſſe Würde und Vollkommenheit unſers Verſtandes ſowohl in der Art und Weiſe, wie wir die Sachen erkennen, als in der Erkenntnis ſelbſt liegt, ſo ſcheint auch allerdings ein Unterſchied zu ſeyn, zwiſchen dem philoſophiſchen Mathematiker, der ſich des hohen Calculs zu Vervollkommnung und Erweiterung ſeiner Rechnungen bedient, und dem Rechenkundigen, der ſeine Kunſt auf Unterſuchung philoſophiſcher Wahrheiten anzu-

wenden weiß. Dies geht nicht auf unſere erhabenen Erfinder, die die Analyſis dergeſtalt anwenden, daß ſie mehr Rechnungen, als Beweiſe zu führen ſcheinen. Dieſe hätten gewiß das nicht leiſten können, was ſie wirklich geleiſtet haben, wenn ſie nicht mit der größten Fertigkeit des Calculs zugleich das höchſte ins Innere der Wahrheiten tief eindringende Vermögen, Schlüſſe und Beweiſe zu führen, verbunden hätten. Welches ſich doch bey andern nicht allemal ſo verhält, die jener Formeln entlehnen, und ſie ohne Einſicht ins Innere der Sachen anwenden. Zwar ſind der menſchlichen Kenntniſſe unendlich viel, und es muß uns daher ſehr oft genügen, wenn wir zu der Kenntnis der Dinge ſelbſt am kürzeſten und leichteſten, es ſey nun auf was für einem Weg es wolle, gelangen können; nicht weniger giebt es auch unzählige Wahrheiten, die ſich blos durch Rechnung angeben laſſen, und die durch unſere, jener Hülfsmitmittel entblößte, Vernunft herausbringen zu wollen, in der That nur, wär es auch möglich, die Sache eines Menſchen wäre, der weder ſein Leben noch ſeine Kräfte dabey zu Rathe zöge. Hingegen fehlt es auch nicht an Beyſpielen, in welchen der Calcul auf einen längern Weg und durch Umſchweiſe führt, wo man kürzer geht, wenn die aus den Begriſſen und den Grundwahrheiten hergeleiteten Schlüſſe angewendet werden. Nicht allein in dieſen, ſondern auch in andern Beyſpielen, wo entweder keine oder nur ſehr geringe Zeiterſparung vom Gebrauch des Calculs erwartet werden kann, ſcheint mir der Würde der Wiſſenſchaften Abbruch zu geſchehen, wenn die analytiſchen Formeln, durch deren Behandlung unſer Verſtand weniger geübt wird, ſtatt der Vernunftſchlüſſe,

ſchlüſſe, die mehr Anſtrengung erfordern, gebraucht werden. Dieſes findet meines Erachtens am meiſten ſtatt, in ſolchen mathematiſchen Wiſſenſchaften, wie die Mechanik, die auch in andern Theilen der Philoſophie einigen Nutzen haben, und nicht blos zu Vervollkommnung der Bequemlichkeiten im bürgerlichen Leben dienen. Bey dieſen würde, wie ich glaube, der Gebrauch des Calculs ſehr unzweckmäßig ſeyn, den auch der Verfaſſer ganz bey Seite ſetzt, und vielmehr in ſeinen Vorleſungen, nach Anleitung der Erfahrung, über die Natur der zu unterſuchenden Wahrheiten, ausführliche Betrachtungen anſtellt, ehe er ſie in den Zuſätzen dem Calcul unterwirft; deſſen ganze Macht er hernach, ſelbige noch weiter für ſeinen Zweck zu unterſuchen, anwendet.

Es iſt noch übrig, von meinen, zu dieſem Werke gemachten Zuſätzen kürzlich Rechenſchaft zu geben. Da ich mich ſchon bey Lebzeiten des Verfaſſers zu dieſer Ueberſetzung entſchloſſen hatte, ſo nahm ich mir damals zugleich vor, nichts von den meinigen hinzuzuthun, ſondern blos zu überſetzen. Der zu Anfang des Jahrs 1765. erfolgte tödtliche Hintritt deſſelben ſchien mir in der Einrichtung ſeines Werks mehr Freyheit zu verſchaffen. Unterdeſſen kam auch der zweyte Theil des Werks hinzu, der den erſten an Größe weit übertrift, und die übrigen Vorleſungen des Verfaſſers, nämlich die ſtatiſchen, die hydrodynamiſchen, pnevmatiſchen und hydrauliſchen, nebſt der ganzen Maſchinenlehre enthält. Dieſem ſind ſauber in Kupfer geſtochene Abbildungen der vornehmſten Maſchinen in ſo großer Menge beygefügt, daß ſie gewiſſermaßen als ein Schauplatz von Maſchinen gebraucht werden, und auch als ſolcher in

der Praxi vielfältige Dienſte leiſten können. Unter göttlichem Beyſtande hab' ich mir vorgenommen, dieſes ganze **Kraftſche** Werk in drey Theilen herauszugeben, und hier und da von dem meinigen hinzuzuſetzen, was, nach meinem Urtheil, zur Vollkommenheit deſſelben gereichen kann, und zugleich von dem Zweck des Verfaſſers nicht allzu weit entfernt iſt. Ich bin der Meynung, daß ein Werk von dieſer Art, Liebhabern der mathematiſchen Wiſſenſchaften, um ſo viel mehr ſehr angenehm ſeyn werde, da noch kein anders vorhanden iſt, in welchem die Theorie mit der Anwendung derſelben auf die Praxis auf gleiche Art verbunden iſt. Es hält das Mittel zwiſchen den weitläuftigen und koſtbaren praktiſchen Werken eines **Leupolds, Belidors** und anderer, und den kleinern, die, ob ſie gleich eine ſchärfere und deutlich ausgeführte Theorie enthalten, dennoch, wegen Mangel der Figuren, den Wünſchen derjenigen nicht ganz entſprechen, die, bey Erfindung und Beurtheilung der Maſchinen, ſich ſelbſt daraus unterrichten wollen. Die lateiniſche Sprache zog ich hauptſächlich deswegen vor, weil ich dieſes vortrefliche Werk für würdig hielt, der ganzen gelehrten Welt bekannt gemacht zu werden; und ferner, weil es meines Erachtens kaum einen, der Luſt hat, dieſe Wiſſenſchaft zu ſtudiren, an der zum Verſtande ſolcher Schriften erforderlichen leichten Kenntnis dieſer Sprache fehlen wird. Dieſes war, wie geſagt, mein Vorhaben, ob ich es ganz werde ausführen können, darüber getraue ich mir nichts gewiſſes zu verſprechen. Bey der Herausgabe dieſes erſten Theils fanden ſich ſo viel Hinderniſſe, daß er gegenwärtig erſt ans Licht tritt, da er bereits vor länger als ſieben Jahren hätte heraus-

kommen

kommen können. Denn ſo lange lag meine Ueberſetzung fertig, obgleich in den Zuſätzen einiges vorkommt, ſo ich alsdenn erſt beyfügte, da der Verleger ſich von neuem zum Druck derſelben entſchloß. Was aber auch aus dem andern Theil wird, ſo hat dieſes auf den Gebrauch dieſes erſten, welcher die Mechanik enthält, keinen Einfluß. Dieſer iſt ein beſonders Werk für ſich, von dem Verfaſſer dergeſtalt ausgearbeitet, daß er, wenn auch der lezte Theil nicht darzu gekommen wäre, doch allein ein vollſtändiges Ganzes ausgemacht hätte.

Den größten Theil deſſen, was ich hinzugethan habe, findet man in dem, der XV. Vorleſung beygefügten Zuſatze, welcher die Anfangsgründe der **Dynamik** enthält. Da der Verfaſſer mit vorzüglichem Fleiße die Natur der **bewegenden Kräfte** unterſucht, und die berühmte Frage vom Maas der Kräfte aus einander geſezt, jedoch, meines Erachtens, nicht ganz erſchöpft hatte, ſo hielt ich für dienlich, an dieſem Orte alles beyzufügen, was mir zu deutlicher Erklärung und Entwicklung derſelben nöthig zu ſeyn ſchien. Nach meiner Ueberlegung iſt ſelbige vorzüglich im phyſiſchen, oft auch im analytiſchen Theile der Mechanik von nicht geringer Wichtigkeit, und ob ich gleich dieſe Materie bereits anderswo abgehandelt habe, ſo habe ich ſie doch von neuem wieder vorgenommen, und ſelbige auf die erſten Grundbegriffe dieſer Wiſſenſchaft zurück zu führen geſucht. Ich zog daher mit Beyſeitſetzung der gewöhnlich angenommenen Begriffe und Grundſätze von den **bewegenden Kräften** und ihren **Wirkungen**, die Erſcheinungen ſelbſt zu Rathe, und unterſuchte, was bey ſelbigen verſchiedentlich auszumeſſen

vorkommt. Bey jeder bewegenden Kraft ſind drey Ausmeſſungen zu unterſcheiden, die Größe, Richtung und der Weg, die ſich auch bey den Wirkungen, wenn ſie gehörig durch die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten ausgedrückt werden, ergeben, wovon man aber die beyden erſten öfters unter den Namen der Kräfte, oder der Intenſitäten zu begreifen pflegt. Nachdem ich die Sache ſelbſt aus der Uebereinſtimmung der Erſcheinungen erwieſen, hab' ich mich bemüht, die Begriffe anderer von den Kräften, ſowohl den lebendigen als den todten, wie auch von den Reizungen, den Preſſungen u. a. deutlich und beſtimmt zu erklären. Hierauf zeige ich im zweyten Theile, wie die Rechnung geführt werden muß, damit überall in jedem Theile der Mechanik, wo von der Größe der Kräfte und Wirkungen gehandelt wird, erhellt, daß gedachte Größe aus einerley allgemeinen Grundſätzen, auf einerley Art und nach einerley Regel beſtimmt und gemeſſen werden können.

Dem 13. Zuſatz des Verfaſſers, vom Satz des Kleinſten, in deſſen Erläuterung er ſelbſt vielen Fleis angewendet, hab' ich dasjenige beygefügt, was die richtige Beſtimmung dieſes Satzes, und die Allgemeinheit deſſelben betrift. Hiervon hab' ich zwar in meiner 1769. herausgegebenen Abhandlung mit mehrern gehandelt. Hier aber hab' ich dieſe Materie von neuem betrachtet, und ſo aus einander zu ſetzen geſucht, wie ſie am leichteſten und deutlichſten in die Augen fällt. Jenes in der Bewegung vorkommende Kleinſte, ſo durch dieſen Satz beſtimmt wird, gehört weder zu dem reſpektiven Kleinſten, das in Rückſicht auf eine gewiſſe Gattung von Größen

das Kleinſte, in Rückſicht anderer aber das Größte iſt, noch zu dem relativen, das, nachdem die veränderlichen Größen, wodurch es ausgedrückt iſt, größer oder kleiner angenommen werden, bald das Kleinſte, bald das Größte wird, wie Sinus der Kreiſe. Denn das Kleinſte, das in unſerm gehörig beſtimmten Satze enthalten iſt, kann auf keine Weiſe und in keinem Falle ins Größte übergehen; es iſt vielmehr durch die allgemeinen Geſetze der Bewegung dergeſtalt beſtimmt, daß wenn man an die Stelle dieſer kleinſten Größe eine andere auſer jener, worinn ſie durch hinzukommende Umſtände verwandelt wird, oder die mit ihr in gleichem Verhältnis ſteht, ſetzen wollte, ſo würde man einen andern von jenem verſchiedenen Satz erhalten, deſſen Allgemeinheit alsdann auch, wo möglich, aus andern Gründen dargethan werden müßte, die von derjenigen verſchieden ſind, nach welchen die Allgemeinheit unſers Geſetzes aus den erſten Grundwahrheiten erwieſen worden. Von dieſen erſten Grundwahrheiten iſt gedachtes Geſetz eine Folge, ein daraus hergeleiteter Satz, der in der Ausübung und Berechnung den nämlichen Vortheil leiſtet, wie andere beſondere Sätze, welche darzu dienen, daß man in den Beweiſen nicht auf die erſten Gründe der Wiſſenſchaften zurückgehen darf.

Das übrige, was ich hier und da angemerkt, beſonders zu erzählen, iſt unnöthig. Ob ich meine Mühe wohl oder übel angewendet habe, mag der Leſer urtheilen. In dem Texte des Verfaſſers ſelber hab' ich nichts geändert, den 53. §. 3. Zuſatz ausgenommen, wo ich zugleich den Grund zu dieſer Aenderung angebe.

Auſer-

Auſerdem würde ich auch noch zu dem §. 181. in der 9ten Vorleſung vorgetragenen Satz kürzlich etwas erinnert haben, wenn mir die Sache damals, da der Bogen noch nicht abgedruckt war, beygefallen wäre. Da dieſes nicht geſchehen iſt, will ich das, was mir dort anzumerken ſcheint, hier mit beyfügen. Der Verfaſſer nimmt an, eine Kugel könne von der Erde mit ſo großer Geſchwindigkeit geworfen werden, daß ſie nie wieder dahin zurückkehrt, ſondern einmal in Bewegung geſezt, als ein Trabant ſich um ſelbige herumbewegt. Dieſes iſt ganz richtig, dabey aber wohl zu merken, daß der Punkt des Wurfs, von welchem in der Oberfläche der Erde die Kugel geworfen würde, in der Bahn ſelbſt liegt, worinn ſich der Körper um die Erde bewegt. Sind alſo die am angeführten Orte hinzugefügten Bedingungen vorhanden, ſo kann die Kugel als Trabant um die Erde herumlaufen, ſie muß aber nothwendig in jedem einzelnen Umlauf zu dem Punkt zurückkehren, von welchem ſie geworfen die Bewegung in ihrer Bahn begann. Bey jeder Bewegung geworfener Körper muß die Bahn der Bewegung durch den Punkt gehen, aus welchem der Wurf geſchieht, mit was für einer Geſchwindigkeit auch der Körper geworfen wird, und was es für ein Geſetz der Centralkräfte auch ſey, die den Körper von der geraden Linie zurückziehen und ihn nöthigen, eine krumme Linie zu beſchreiben. Iſt alſo die Bahn, worinn ſich der Körper bewegt, ein Kreis, eine Ellipſe, oder eine andere in ſich ſelbſt zurücklaufende krumme Linie, ſo muß er bey jedem Umlauf zu dem Punkt zurückkehren, von welchem er zuerſt ausgegangen iſt. Iſt die Bahn eine Spirallinie, dergleichen

gleichen ſie, das Geſetz der Schwere angenommen, nicht ſeyn kann; iſt ſie eine Parabel, Hyperbel, oder eine andere in ſich ſelbſt nicht zurücklaufende Kurve, ſo wird dennoch der Punkt des Wurfs in der Bahn ſelbſt liegen, obgleich der Körper nie zu ſelbigen zurückkehrt. Aus dieſem Satz des Verfaſſers ſieht man auf den erſten Blick, daß die Hypotheſe, die der Graf **von Büffon** in ſeiner Kosmogenie, vom Urſprung der Planeten unſers Sonnenſyſtems, vorträgt, und die andere als ſehr wahrſcheinlich mit Beyfall aufgenommen haben, mit den Geſetzen der Natur keinesweges übereinſtimmt. Dieſer berühmte und ſcharfſinnige Naturforſcher nimmt an, die Planetenkörper wären durch gewaltſamen Stoß eines Kometen von der Sonnenmaſſe losgeriſſen, und durch die weiten Himmelsräume geſchleudert worden; hier hätte ſie in großen Entfernungen ihre Schwere gegen die Sonne genöthigt, diejenigen Bahnen um ſelbige zu beſchreiben, worinnen ſie ſich noch heut zu Tage bewegen. Allein prüft man dieſe ſonſt ſehr witzig ausgeſonnene Hypotheſe nach den Geſetzen der Bewegung, ſo fällt ſie ſogleich über den Haufen. Fände ſie Statt, ſo müßten gleichfalls alle Planeten in ihren einzelnen Umläufen zur Sonne wieder zurückkehren.

Inhalt.

Inhalt.

Erſter Theil der Mechanik. Von der Bewegung.

Vorl. I. Allgemeine Anfangsgründe. Seite: 1

§. 2. 3. Gegenſtand der Mechanik. §. 4. 5. Eigenſchaften der materiellen Dinge. §. 6. Geſchwindigkeit, Richtung, Zeit. §. 7 — 11. Trägheit und ihre Eigenſchaften. §. 12 — 16. Gleichförmige Bewegung. §. 16. Kräfte, verſchiedene Gattungen derſelben, Preſſungen, lebendige Kräfte, beſchleunigende Kraft. §. 17 — 26. Grundregeln der drückenden Kräfte. §. 27. 28. Größe der Bewegung. §. 29 — 32. Entgegengeſezte Preſſungen und ihre Effekte.

Zuſ. I. Von den beſchleunigenden Kräften überhaupt, und der Beſtimmungsart derſelben. 32

§. 1. 2. Methode, das Verhältnis der beſchleunigenden Kräfte zu finden, und zwar entweder aus den Geſchwindigkeiten, oder aus den Räumen, oder aus den Kräften ſelbſt, oder aus den Widerſtänden, die ſich ihnen entgegenſetzen.

Vorl. II. Von der Schwere und den davon abhängenden Naturgeſetzen. 36

§. 33. Schwere und Gewicht der Körper. §. 35. 36. Die Schwere wirkt, wie eine innere Kraft der Körper, gleichförmig in alle, auch die kleinſten Theilchen der Materie. §. 37 — 39. Der freye Fall der Körper ſtrebt beſtändig gegen den Mittelpunkt der Erde. §. 40. Die ſchweren Körper ſinken in vertikaler Linie zum Mittelpunkt der Erde. §. 41. 42. Methode, den Unterſchied der wahren Horizontallinie von der ſcheinbaren zu finden. §. 43. 44. Die Schwere verhält ſich in größern Entfernungen umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen. §. 45. Die von der frey wirkenden Schwere

Schwere erzeugte Bewegung iſt eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung. §. 46 — 48. Fangen die Körper von der Ruhe an zu fallen, ſo verhalten ſich die Zeiten wie die Geſchwindigkeiten, und der Räume wie die Quadraten der Zeiten, oder die Geſchwindigkeiten. §. 49. Mit der am Ende des Falls erlangten Geſchwindigkeit kann der doppelte Raum, wodurch der Körper gefallen, in gleicher Zeit mit gleichförmiger Bewegung zurückgelegt werden. §. 50. Die in den einzelnen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten ſich wie die ungeraden Zahlen. §. 51 — 57. Beym freyen Falle die Geſchwindigkeiten aus den Räumen, und umgekehrt dieſe aus jenen zu finden.

Zuſ. II. Allgemeine Bewegungslehre, nebſt Anwendung auf die geradlinigte Bewegung, und Berechnung beſonderer in der freyen geradlinigten Bewegung vorkommender Fälle. ; ; ; Seite: 56

§. 3 — 5. Allgemeine Gleichung für Beſchleunigung, Geſchwindigkeit und Zeit. §. 6. 7. Gleichung für Kräfte, Räume und Geſchwindigkeiten. §. 8. Mittelpunkt der Kräfte. §. 9 — 14. Anwendung jener Gleichungen, die gegebenen Geſchwindigkeiten durch Räume in Fußen ausgedrückt zu finden, die bey unveränderlicher Beſchleunigung in einer Sekunde durchlaufen werden können. §. 15 — 18. Weitere Anwendung, die Zeiten zu finden. Gebrauch, der den Geſchwindigkeiten zugehörigen Höhen, ſtatt der Geſchwindigkeiten ſelbſt. §. 19. Von einer gleichförmig beſchleunigenden Kraft erzeugte Bewegung, bey ſchon im Anfang des Falles vorhandenen Geſchwindigkeit. §. 20. Bewegung, wenn ſich die Kräfte umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt. §. 21. Desgleichen, wenn ſich die Kräfte verkehrt verhalten, wie die Potenzen n der Entfernungen. §. 22. Insbeſondere, wenn ſich die Kräfte gerade verhalten wie die Entfernungen vom Mittelpunkt. Dieſe Bewegung iſt bey einerley Kräften allemal gleichzeitig: bey ungleichen Kräften aber verhalten ſich die Zeiten verkehrt

kehrt wie die Quadratwurzeln der Centralkräfte. §. 23. Verhält ſich die Schwere umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, ſo verhalten ſich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Entfernungen. §. 24 — 27. Allgemeine Hypotheſen über die Eigenſchaften der Bewegung. §. 28 — 29. Methode, die Kräfte aus einigen gegebenen Eigenſchaften der Bewegung zu finden.

Vorl. III. Vom Gleichgewicht der Kräfte und dem Fall ſchwerer Körper durch geneigte Linien und Ebenen. ſ ſ Seite: 97

§. 58 — 69. Parallelogramm der Kräfte. Zerlegung und Zuſammenſetzung der Kräfte. §. 70. Geneigte Ebene. §. 71. Was für ein Theil der Schwere auf die geneigte Ebene wirkt, und in welcher Richtung? §. 72 — 82. Verhältnis der Geſchwindigkeiten und Räume; gleichzeitiger Fall durch die Sehnen des Kreiſes; Geſchwindigkeit am Ende des Falles, ſowohl durch die gerade als krumme Linie; Verhältnis der Zeiten des Falles u. ſ. w.

Zuſ. III. Vom Fall durch krumme Linien, insbeſondere vom Fall ſchwerer Körper. 116

§. 30. Fall, durch geneigte Ebenen überhaupt. §. 31 — 33. Kraft der Schwere in den Kurven überhaupt. §. 34. Beym Fall durch Kurven geht keine Geſchwindigkeit verloren. §. 35. 36. Geſchwindigkeit und Zeit im Fall durch Kurven überhaupt. §. 37 — 40. Anwendung auf die gleichzeitige Bewegung in der Radlinie. §. 40 — 42. In ſehr kleinen Kreisbögen. §. 43. In andern Kurven. §. 44. Geſetz der Kräfte, mehrere gerade Linien in gleicher Zeit zurück zu legen. §. 45 — 47. Andere gleichzeitige Linien zu finden. §. 48 — 50. Allgemeine Beſtimmungsregeln der Kräfte in den Kurven. §. 51. Aus der Beſchaffenheit des Falles, die Kurve, worinn der Fall geſchieht, zu erkennen. Gleichungen für die paracentriſche gleichzeitige Linie. §. 53. Durch iſoperimetriſche Rechnung, die Linie des geſchwindeſten Falles zu finden.

Vorl. IV. Geſetze der Schwere durch Verſuche beſtätigt. Gleichförmig verminderte Bewegung. Bewegung ſchwingender Körper. = = = = 163

§. 83 — 87. Geſetze der Schwere, mit Hilfe der Radlinie aus dem Fall ſchwerer Körper gefolgert. §. 87. Geſchwindeſter Fall. §. 88 — 91. Regeln der gleichförmig verminderten Bewegung. §. 92 — 97. Bewegung der Pendeln in der Radlinie und in kleinen Kreisbogen. Warum die Schwingung der Pendeln in kleinen Kreisbogen beſſer von Statten geht, als bey den, zwiſchen cykloidalen Blechen ſchwebenden Pendeln?

Vorl. V. Vom Schwerpunkt. = = 176

§. 98. Schwerpunkt. §. 99. Wie er in den Körpern mechaniſch gefunden wird. §. 100 — 102. Ruht der Schwerpunkt, ſo kann ſich der Körper nicht bewegen. §. 103. Wie es ſich verhält, wenn die Körper auf geneigten Ebenen liegen. §. 104. Lage der Körper, worinn ſie am meiſten zum Fallen geneigt ſind. §. 105. Schwerpunkt im Dreyeck. §. 106. In Kreisbogen. §. 107. In Kreisabſchnitten. §. 108. Mittelpunkt der Größe und Schwere in Prismen, Pyramiden und Kegeln. §. 109. Auf einer geneigten Ebene ſteigender Cylinder. §. 110. Warum durch geneigte Ebenen fallende Körper bald rollen, bald in unveränderter Lage durch die Ebene fallen. §. 111. Für ſich aufwärts rollender doppelter Kegel.

Vorl. VI. Vom Gleichgewicht ſchwerer Körper. 209

§. 112 — 118. Hebel; Grundregel des Gleichgewichts. Dieſes iſt vorhanden, wenn die Gewichte der Maſſen ſich verkehrt verhalten wie die Geſchwindigkeiten, womit ſie ſich gleichförmig bewegen können. §. 119 — 121. Wie mehrere Körper ruhen können, deren Schwerpunkt auſerhalb ihrer Oberfläche fällt. §. 122 — 124. Den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt mehrerer Körper zu finden §. 125 — 131. Gleiche Momente der Preſſungen auf beyden entgegengeſezten Seiten im Zuſtand

der Ruhe. Beſtimmung des Uebergewichts beym Mangel des Gleichgewichts.

Zuſ. IV. Von Körpern, die mit einer gegebenen Geſchwindigkeit ſteigen. Vom Schwerpunkt. = • = - Seite: 221

§. 54 — 56. Steigen ſchwerer Körper. §. 57. Allgemeine Regeln, den Schwerpunkt zu finden. §. 58 — 60. In geraden Linien. §. 61 — 63. In Figuren mit einer Axe, worinn der Schwerpunkt liegt. Ingleichen §. 64. in Fällen, wo Theile der Figur auf eine andere Axe bezogen werden, die auf die erſte ſenkrecht iſt. §. 65. Allgemeine Methode, aus dem gegebenen Schwerpunkt des Ganzen, und dem Schwerpunkt des einen Theils, den Schwerpunkt des andern zu finden. §. 66. Allgemeine Methode, den Schwerpunkt in Figuren, mit zwo Axen zu finden. §. 67. 68. Den Schwerpunkt in Figuren zu finden, deren Aeſte ungleich ſind. §. 69. In abgekürzten und abgeſchnittenen Figuren. §. 70. In Kreisbogen. §. 71. In Bogen überhaupt. §. 72 — 74. Allgemeine Methode, den Schwerpunkt der Körper zu beſtimmen. §. 75. Mittelpunkt der Größe. §. 76 — 79. Den Schwerpunkt in Körpern zu finden, worinn die Linie, darinn er liegt, gegeben iſt. §. 80. Beſtimmung des Schwerpunkts in jeder Gattung von Körpern, worauf in der Ausübung das meiſte ankommt. §. 81. In Kegelſchnitten. §. 82 In elliptiſchen Afterkugeln. §. 83. Es entſteht einerley Moment, man mag die Körper einzeln in ihre Entfernungen von einer wagerechten Ebene, oder ihre Summe in die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von dieſer Ebene multipliciren.

Vorl. VII. Fortſetzung von den Pendeln. 260

§. 132. Wird vermittelſt der Pendeln erwieſen, daß ein ruhender Körper in einer Sekunde durch $15\frac{1}{12}$ Pariſer Fuß fällt, welches auch §. 133. durch Verſuch beſtätigt wird. §. 134. Die Längen der Pendeln verhalten ſich wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Daher §. 135. 136. aus den Zeiten die Längen, und umgekehrt

aus dieſen jene zu finden. §. 137 — 139. Aus der Anzahl der Schwingungen in gegebener Zeit die Länge des Sekundenpendels zu finden. §. 140 — 145. Nutzen der Pendeln, vorzüglich bey Uhren; aus der Länge des Sekundenpendels ein allgemeines unveränderliches Längenmaas zu verfertigen.

Vorl. VIII. Von der Veränderung der natürlichen Schwere in verſchiedenen Erdgegenden, und vom Schwingungspunkt zuſammengeſezter Pendeln. ꞉ Seite: 272

§. 146. 147. Die Schwere iſt nicht in der ganzen Welt einerley. Erfahrung hiervon, vermittelſt der Pendeln. §. 148. Die Schwere des Körpers iſt der Materie proportional. §. 149 — 151. Die Veränderung der natürlichen Schwere aus der verſchiedenen Länge des Pendels zu ſchlieſen. §. 152 — 154. Schwingungspunkt zuſammengeſezter Pendeln. §. 155. Wie mit einander verknüpfte Maſſen in einem einzigen Punkt übergetragen ſich denken laſſen. §. 156 — 158. Allgemeine Regeln für den Schwingungspunkt. §. 159 — 161. Beſtimmung des Schwingungspunkts in, ſowohl nach den Seiten, als nach der Grundlinie bewegten Figuren, wie auch in Körpern. Die wichtigſten und nützlichſten Beyſpiele hiervon.

Zuſ. V. Von den Pendeln überhaupt, insbeſondere den zuſammengeſezten. ꞉ 295

§. 84 — 91. Die Gröſze der Materie iſt dem Gewicht der Körper proportional. Die Schwere iſt in verſchiedenen Erdgegenden verſchieden. §. 92. Mittelſt der Radlinie die Zeit in gleichzeitigen Bewegungen auf eine allgrmeine Art zu beſtimmen. §. 93. 94. Näherer Beweis der Regel für den Schwingungspunkt. §. 95 — 101. Anwendung dieſer Regel bey geraden Linien. §. 103 — 114. Bey Figuren, wenn ſie wagerecht ſchwingen. §. 115. Die Länge des mit dem zuſammengeſezten gleichzeitigen einfachen Pendels iſt beſtändig einerley, ſo lange die Entfernung des Schwerpunkts vom

Aufhängepunkt in eben dem zuſammengeſezten Pendel oder Körperſyſtem einerley bleibt. §. 117. Der Schwingungspunkt liegt überall unter dem Schwerpunkt, und die Entfernung dieſer Punkte verhält ſich allemal umgekehrt wie die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt. §. 118. 119. Anwendung hiervon in Beyſpielen. §. 120. Der Aufhängepunkt läßt ſich mit dem Schwerpunkt verwechſeln, obgleich die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels einerley bleibt. §. 121. Regeln der Schwingung nach den Seiten. §. 122. 123. Beſtimmung des Schwingungspunkts in Parallelogrammen. §. 124 — 126. In Dreyecken. §. 127. In ſchief aufgehängten Figuren. §. 128. In Parabeln. §. 129. 130. In Abſchnitten und Ausſchnitten des Kreiſes. §. 131. Regeln, den Schwingungspunkt in Körpern überhaupt zu finden; insbeſondere §. 132. 133. in Kugeln. §. 134. In Kegeln. §. 135. In Cylindern. §. 136. In paraboliſchen Afterkegeln.

Vorl. IX. Von den Centralkräften in der Kreisbewegung. = = Seite: 350

§. 162 — 166. Deutliche Erklärung der Centralkräfte. Durch eine Geſchwindigkeit gehinderte Wirkung der Schwere. §. 167 — 169. Beſtätigender Verſuch. §. 170 — 172. Unterſchied der Schwer- und Fliehkräfte. §. 173 — 177. Die Centralkräfte verhalten ſich wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten durch die Halbmeſſer dividirt. §. 177. 178. Weiter ausgeführte Geſetze der Centralkräfte. §. 180. Geſchwindigkeit, wenn die Fliehkraft der Schwere gleich ſeyn ſoll. §. 181 — 190. Bewegung geworfener Körper in krummen Linien. Anwendung hiervon auf die Bewegung der Planeten überhaupt. §. 191. 192. Geſetz der Geſchwindigkeiten, wenn die Kräfte ſich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen. §. 193. In wiefern die Centralkräfte auf der Größe der Materie beruhen.

Zuſ. VI. Allgemeinere Entwickelung der Centralkräfte. Kegelförmige oder Wirbelbewegung der Pendeln. = Seite: 374

§. 137 — 139. Aus den gegebenen Kräften in der Kreisbewegung die Geſchwindigkeit und die Umlaufszeit, und umgekehrt § 140. 141. aus der Zeit die Centralkraft zu finden. §. 142 — 145. Kegelförmige oder Wirbelbewegung der Pendeln. §. 147 — 149. Beſtimmung der Geſchwindigkeit und der Zeit dieſer Bewegung. §. 150. 151. Gleichzeitigkeit dieſer Bewegungen. §. 153 — 157. Wenn die Fliehkraft der Schwere gleich iſt. Vergleichung dieſer Umlaufsbewegung mit den Schwingungen der Pendeln ꝛc.

Vorl. X. Von dem aus der Kenntnis der Centralkräfte entſpringenden Nutzen, und ihrem Gebrauch, bey Erklärung der Bewegungen der Weltkörper, und der Kräfte, von welchen dieſe Bewegungen hervorgebracht werden. = = = 394

§. 194 — 197. Die Erde ſelbſt iſt nicht mit eben der Schwere verſehen, die ihre Theile beſitzen. §. 197. Urſache der Bewegungen der Himmelskörper. §. 198. 199. Regeln, die Natur und Eigenſchaften der Centralkräfte zu finden. §. 199 — 203. Weitere Ausführung davon.

Vorl. XI. Von den Geſetzen der Centralkräfte in der Natur. = = = 403

§. 204 — 207. Die Centralkräfte in der Natur verhalten ſich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen. Erweis aus den Eigenſchaften der Kegelſchnitte. §. 207. 208. Nach dieſem Geſetz richtet ſich auch die Schwere in unſern Gegenden. §. 209. Die Erde ſelbſt iſt, nebſt den übrigen Planeten, gegen die Sonne ſchwer. §. 210. Die Schwere drückt den Mond gegen die Erde, und verurſacht den Fall der Körper. §. 211. Geſchwindigkeit, womit der Körper geworfen werden

muß, um dieſen oder jenen Kegelſchnitt zu beſchreiben. §. 212. 213. Die Centralkräfte richten ſich nach verſchiedenen Geſetzen, wenn die Punkte, nach welchen ſie die in eben der Bahn liegenden Körper drücken, verſchieden ſind.

Zuſ. VII. Von den Centralkräften. Seite: 417

I.) Von den Centralkräften überhaupt. §. 158. Sie unterſcheiden ſich in Normal- und Tangentialkräfte, deren Werthe allgemein beſtimmt werden. §. 159 — 161. Die Geſchwindigkeit in der Centralbewegung, und §. 162. die Zeit zu finden. §. 163. Allgemeine Beſtimmungsregeln der Bahnen. §. 165 — 169. Die für die Bahnen gefundenen unbequemen Gleichungen in andere zu verwandeln, die das Verhältnis der ſenkrechten Coordinaten ausdrücken. §. 170 — 172. Die Bewegung muß in einem Kegelſchnitt geſchehen, ſo oft die Centralkraft ſich umgekehrt verhält wie die Quadrate der Entfernungen. §. 173. Bey eben dieſem Geſetz der Kräfte verhalten ſich die Umlaufszeiten in Ellipſen wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der großen Axen. §. 174. Verhalten ſich die Kräfte wie die Entfernungen, ſo ſind die Bahnen Ellipſen, in deren Mittelpunkt, der Kräfte Mittelpunkt ſelbſt liegt; die Bewegung geſchieht aber in Spirallinien, wenn die Kräfte ſich verkehrt verhalten wie die Würfel der Entfernungen.

II.) Das Geſetz der Centralkräfte aus der bekannten Natur der Bahnen zu finden, 1.) wenn die Bahn unbeweglich, und ſich ſelbſt um den Mittelpunkt der Kräfte herumdreht. §. 175. 2.) Wenn die Bahnen beweglich, und ſich um den Mittelpunkt der Kräfte herumdreht.

Zuſ. VIII. Vom ſenkrechten Druck der Körper auf die Kanäle, worinn ſie ſich bewegen. Seite: 462

§. 178 — 193. Senkrechter Druck ſteigender und fallender Körper auf die Kanäle, worinn ſie ſich durch die natürliche Schwere, und §. 194. aus andern Kräften bewegen.

bewegen. §. 195. Beſtimmung der Kurve, die überall von fallenden Körpern mit einer, dem Gewicht des Körpers gleichen Kraft gedrückt wird.

Vorl. XII. u. XIII. Von der Bewegung geworfener ſchwerer Körper. = Seite: 476

§. 214 — 220. Geworfene Körper beſchreiben durch den Trieb der Schwere bey ungehinderter Bewegung Parabeln. §. 221 — 223. Den, dem Durchmeſſer der Parabel zugehörigen Parameter, die größte Höhe des Wurfs, und den Parameter der Axe zu finden. §. 224. Bey gleichen Geſchwindigkeiten im Anfang der Bewegung verhalten ſich die Horizontalweiten wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel. Verhältnis der Parameter der Axen in dieſen Parabeln, und der größten Höhen. §. 225. Die Horizontalweite iſt am größten, wenn der Erhöhungswinkel 45°. §. 226. Aus einem gegebenen Wurfe die Horizontalweiten unter andern Erhöhungswinkeln zu finden. §. 227. Der Parameter der Parabel unter dem Winkel 45°, iſt der doppelten Horizontalweite gleich. §. 228 — 230. Die Geſchwindigkeit, womit die Körper geworfen werden, iſt die, ſo im Fall durch den vierten Theil des Parameters erlangt wird. §. 231. Zeit der Bewegung geworfener Körper. §. 232. Anwendung des Kalkuls auf die über den Horizont erhöhten, nicht im Horizont ſelbſt liegenden Körper. §. 233 — 236. Eben dieſes läßt ſich auch durch geometriſche Verzeichnung finden. §. 237. Uebereinſtimmung dieſer Lehre mit der Erfahrung.

Zuſ. IX. Fortſetzung von der Bewegung geworfener Körper. = = Seite: 498

Was in der vorhergehenden Vorleſung abgehandelt worden, wird hier weiter und allgemeiner entwickelt, und einige Anmerkungen beygefügt. §. 196 — 205.

Vorl. XIV. Von der Bewegung im widerſtehenden Mitteln. = = 504

§. 238. 239. Der von der Materie des Flüßigen abhängende Widerſtand verhält ſich wie die Quadrate der

Geſchwindigkeiten. §. 240. Hingegen der von der Zähigkeit der Theile, wie die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers ſelbſt. §. 241. 242. Erſterer Satz ſtimmt mehr mit der Erfahrung bey großer Geſchwindigkeit des bewegten Körpers; lezterer bey geringer Bewegung; keiner aber genau mit den Beobachtungen überein. §. 243 — 253. Hauptregeln der Bewegung in Flüßigkeiten bey erſterer Vorausſetzung, und zwar 1.) wenn Körper ſich blos mit ihrer Geſchwindigkeit fortbewegen, und keine andere Kraft, wie die Schwere, vorhanden. 2.) Wenn Körper zugleich von der Schwere getrieben ſteigen. 3.) Wenn Körper fallen. §. 254. 255. Verſchiedene Größe des Widerſtandes in dichtern oder dünnern Flüßigkeiten, und deſſen Wirkungen auf größere und kleinere Maſſen. Ueberall iſt dieſe Bewegung von der freyen ungehinderten Bewegung verſchieden, welches auch beym Fall durch krumme Linien Statt findet. Die Gleichzeitigkeit in der Radlinie iſt bey gehinderter Bewegung nicht anzutreffen.

Zuſ. X. Vom Widerſtand der Mittel, wodurch ſich Körper bewegen.

Erſter Theil. Von der geradlinigten Bewegung in widerſtehenden Mitteln. . Seite: 520

§. 207 — 220. Regeln der geradlinigten Bewegung im überall gleichdichten Mittel, wenn der Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit bewegt, und von keiner andern Kraft gereizt wird. §. 208. Die Geſchwindigkeit geht hier nur in unendlicher Zeit, und nach zurückgelegten unendlichen Weg verloren. §. 209 — 213. Vom Widerſtand im größern Verhältnis, als des Quadrats der Geſchwindigkeit. §. 214. 215. Die Geſchwindigkeit des Körpers verliert ſich ganz durch einen endlichen Raum, wenn der Widerſtand ſich verhält wie die Geſchwindigkeit, oder wie eine Dignität der Geſchwindigkeit, die kleiner als 1. §. 216 — 220. Zeit der Bewegung überhaupt bey jeglichen Geſetzen des Widerſtands; wo ſie unendlich, wo endlich? §. 221 — 231. Natur des Falles im Mittel von gleichförmiger Dichtig-

Dichtigkeit, das im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit widerſteht. §. 223. 224. Größte Geſchwindigkeit, die durch den Fall zu erlangen. §. 228. Fall, wenn die Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit anfangen, ſich zu bewegen. §. 229 — 231. Zeit des Falles, der Körper mag im Anfang eine Geſchwindigkeit beſitzen, oder nicht. §. 232 — 244. Steigen im widerſtehenden Mittel. §. 234. f. f. Geſchwindigkeit. §. 237 — 239. Zeit. §. 244 — 248. Geradlinigte Bewegung im Mittel, das nicht überall gleich dicht. §. 249 — 256. Geradlinigte Bewegung im widerſtehenden Mittel, wenn die Körper zugleich von Centralkräften getrieben werden.

Zweyter Theil. Von der krummlinigten Bewegung in widerſtehenden gleichförmigen Flüßigkeiten. . . . . . Seite: 583

1.) Bey parallelen Richtungen der Kräfte.

§. 257. 258. Allgemeine Regeln. §. 259 — 275. Kalkul überhaupt, wenn die Kräfte beſtändig, und der Widerſtand ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit. Wurflinie, die geworfene Körper in der Luft beſchreiben. §. 275. Bey beſtändigen Kräften aus der bekannten Natur der Wurflinie das Geſetz des Widerſtands zu finden. §. 277. Eben dieſes allgemeiner. §. 278. Aus den widerſtehenden Kräften und der Wurflinie das Geſetz der beſchleunigenden Kräfte zu finden.

2.) Bey nicht parallelen Richtungen der Kräfte.

§. 279 — 282. Geſchwindigkeit, Zeit und Wurflinie überhaupt. §. 283. Das Geſetz der Kräfte zu beſtimmen, um eine Wurflinie zu beſchreiben, die frey ſich bewegende Körper beſchreiben würden. §. 284. Aus dem gegebenen Widerſtand und der Wurflinie, die Kräfte, und §. 285. aus den gegebenen Kräften und der Kurve, das Geſetz des Widerſtaudes zu beſtimmen.

Dritter Theil. Vom Fall und Steigen ſowohl durch krumme als gerade Linien in widerſtehenden Mitteln, wo die beſchleunigenden Kräfte beſtändig, und ihre Richtungen parallel ſind. Seite: 606

§. 287 — 289. Fall und Steigen bey jedwedem Widerſtand, insbeſondere den im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit. §. 290 — 300. Fall und Steigen durch geneigte Ebenen. §. 300. Allgemeine Eigenſchaft der Bewegung in Kurven. §. 301. Die gröſte Geſchwindigkeit des fallenden Körpers iſt hier nicht im Punkt der Linie, wo die Tangente horizontal, ſondern in einem andern. §. 302. Zeit der Bewegung. §. 303. 304. Steigen im widerſtehenden Mittel überhaupt. §. 305. Die Bewegung in der Radlinie im widerſtehenden Mittel iſt nicht gleichzeitig, wo nicht die Geſchwindigkeit des Körpers ſehr klein.

Vorl. XV. Von den lebendigen Kräften. 627

§. 260 — 278 Maas der lebendigen Kräfte. Unterſchied zwiſchen Preſſungen und lebendigen Kräften. §. 279. Zerlegung der Kräfte in andere, und Zuſammenſetzung mehrere in eine.

Zuſ. zur XV. Vorl. — Anfangsgründe der Dynamik. : : : : 657

§. 1 — 6. Kräfte und ihre Wirkungen überhaupt. §. 7. 8. Lebendige und tode Kräfte — Verſchiedene andere Gattungen Kräfte. §. 9. Kalkul der Kräfte. §. 10. Zuſammengeſezte Kräfte — reſpektive Wirkungen der Kräfte. §. 11. f. f. Gegenſeitige Wirkungen der Kräfte, Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. §. 17. f. f. Zuſtand des Gleichgewichts entgegengeſezter Preſſungen. §. 19. Grundſatz der Hydroſtatik. §. 20. f. f. Gegenſeitige Wirkung im Fall der Bewegung. §. 23. Erzeugung und Zerſtörung der lebendigen Kräfte. §. 24 — 30. Verſchiedene Wirkungen lebendiger Kräfte; gegenſeitige Wirkung beym Zuſammenſtoſt derſelben.

ſelben. §. 31. Erhaltung der lebendigen Kräfte. §. 33. Größe der Bewegung nach einerley Richtung. §. 34. Grundſatz der Stätigkeit in der Wirkung der Kräfte. §. 35 — 38. Maas der Preſſungen; erſter Grundſatz der Statik. §. 39 — 43. Maas der lebendigen Kräfte und der bewegenden Wirkungen. §. 44 — 47. Maas der zuſammengeſezten Kräfte. §. 48. 49. Maas der reſpektiven Wirkungen.

Vorl. XVI. Vom Zuſammenſtoß ſich bewegender Körper, und den daher entſtehenden Bewegungen. . . Seite: 804

§. 280 — 285. Zuſammenſtoß harter, weicher und elaſtiſcher Körper. Das allgemeine und beſondere hierbey. §. 286 — 294. Allgemeine Regeln des geraden Stoßes, woraus ſich der Erfolg in beſondern Fällen beſtimmen läßt. Die §. 294. beygefügte Anmerkung erklärt einen hier vorkommenden widerſinnigen Satz.

Zuſ. XI. Von der relativen Bewegung der Körper. . . . 825

§. 309. Relative Bewegung. §. 310 — 313. Beſtimmung des Raums und der Zeit bey der geradlinigten relativen Bewegung, und §. 314. wenn die Körper ſich parallel bewegen. §. 315. 316. Relative Bewegung in concentriſchen Kreiſen. §. 317 — 319. Relative Bewegung, wenn die Körper ſich in zuſammenſtoßenden Linien bewegen, und der eine Körper ruht, und §. 320 — 326. Wenn kein Körper ruht.

Vorl. XVII. Fortſetzung vom Zuſammenſtoß der Körper. . . . 837

§. 295. Aus den allgemeinen Geſetzen des Stoßes hergeleitete Regeln der Bewegung elaſtiſcher Körper, ſowohl der, deren Richtung einerley, als die entgegengeſezte Bewegung haben. §. 297. Wenn der eine Körper ruht. §. 298 — 301. Wenn die Geſchwindigkeiten vor dem Stoß gleichgros, u. ſ. w. §. 302. 303. Regeln

Regeln des Stoßes harter und weicher Körper. §. 303 — 306. Die Größe der Bewegung bleibt nicht überall einerley, kann folglich nicht das wahre Maaß der Kräfte ſeyn. §. 308. 309. Die Summe der lebendigen Kräfte wird durch deu Stoß allein nicht verändert. §. 310. Die lebendigen Kräfte erhalten ſich beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper.

Vorl. XVIII. Aus den Regeln des Zuſammenſtoßes der Körper hergeleitete Folgen. Seite: 853

§. 311. Die Bewegung des Schwerpunkts ändert ſich nicht beym Stoß; auch nicht §. 312. die relative Geſchwindigkeit der Körper. §. 313—316. Aenderung der Geſchwindigkeit in beyden Körpern nach dem Stoß. §. 317. Die Geſchwindigkeit beym mittelbaren Stoß, läßt ſich durch mehrere Zwiſchenkörper vermehren.

Zuſ. XII. Verſuch, wodurch das, was von den Kräften ſich bewegender Körper geſagt worden, beſtätigt wird. Mittelbarer Stoß. = = = 866

§. 327 — 334 Uebereinſtimmung der Erfahrung mit dem, was von den Kräften ſtoßender Körper in vorigem erwieſen worden. §. 334. 335. Weitere Entwickelung deſſen, was vom mittelbaren Stoß zunächſt geſagt worden.

Vorl. XIX. Vom Mittelpunkt des Stoßes. Vom Zurückprallen anlaufender Körper. Vom Stoß, der nicht durch den Schwerpunkt geht, und vom ſchiefen Stoß. 878

§. 319. Der Mittelpunkt des Stoßes iſt mit dem Schwingungspunkt einerley. §. 320. Bewegung, wenn Körper an unbewegliche Hinderniſſe anlaufen. §. 321 — 324. Zurückprallen der Körper. §. 325. Winkel, unter welchem die Körper anlaufen müſſen, um einen in einem gegebenen Ort liegenden Körper zu treffen. §. 326. Maas der unvollkommenen Elaſticität. §. 327 — 332. Schiefer Stoß; bey

ihm wird §. 333. 334. die Bewegung des Schwerpunkts der Körper nicht verändert. §. 336 — 338. Eccentriſcher Stoß. Aus ihm wird die Umdrehungsbewegung erzeugt. Hiervon in der beygefügten Anmerkung mehr. Die Umdrehungsbewegung hindert die fortrückende Bewegung nicht.

Zuſ. XIII. Vom Grundſatz der kleinſten Wirkung vorzüglich beym Stoß der Körper. Seite: 901

§. 336. Der ſogenannte Grundſatz der kleinſten Wirkung, nach welchem die natürlichen Veränderungen die möglichſt kleinſten ſind, iſt nicht in der Mechanik zu Hauſe. §. 337. Doch findet ſich dieſes Kleinſte bey der kleinſten Größe der Kräfte, die beym Stoß harter und weicher Körper verloren geht; wie auch §. 338. beym eccentriſchen Stoß. §. 339 — 341. Aus dieſem Satz läßt ſich die Regel, die Trägheit in einem Syſtem aus einer Stelle in eine andere zu verſetzen, und daraus umgekehrt §. 342 — 348. die Regeln des eccentriſchen Stoßes folgern. §. 349. Die Regeln des Zurückprallens und Zurückſpringens der Körper werden eben daraus hergeleitet. §. 350. Dergleichen Kleinſtes kommt bey jedem Gleichgewicht der Körper vor. §. 351. Auch wird daraus hergeleitet, daß der Schwerpunkt eines ruhenden Körpers ſich entweder in der möglichſthöchſten oder tiefſten Lage befindet. §. 352. Kleinſtes bey jeder freyen Bewegung.

Vorl. XX. Von der ſchwingenden Bewegung elaſtiſcher Körper. = = = 935

§. 340. Man bemerkt faſt keinen Effekt der Elaſticität an Saiten, wenn ſie von unendlichkleinen, auch nicht §. 341. wenn ſie von überaus großen, ſondern nur, wenn ſie von mittlern Kräften geſpannt werden. §. 342 — 351. Natur dieſer Effekte, und der davon abhängenden gleichzeitigen Bewegung. Schwingende Bewegung elaſtiſcher Bleche.

Zuſ. XIV. Von der ſchwingenden Bewegung elaſtiſcher Körper. = = Seite: 943

§. 353 — 355. Schwingende Bewegung einer Saite, die immateriell angenommen wird und eine einzige widerſtehende Kraft oder Trägheit beſitzt. §. 356 — 358. Wenn zwo Trägheiten vorhanden. §. 359 — 362. Wenn deren drey da ſind. §. 363 — 369. Allgemeine Regeln für ſo viel Trägheiten, als man will. Dann für materielle Saiten, deren Dicke ſehr gering iſt. Beſtimmung der Kurve, die eine ſolche Saite während dem Schwingen beſchreibt. Sie iſt die ſogenannte Socia Cycloidis.

Erſter

Erſter Theil. Von der Mechanik.

Von der Bewegung.

Erſte Vorleſung.

Allgemeine Anfangsgründe.

Inhalt.

§. 2. 3. Gegenſtand der Mechanik. §. 4. 5. Eigenſchaften der natürlichen Dinge. §. 6. Geſchwindigkeit, Richtung, Zeit. §. 7 — 11. Trägheit und ihre Eigenſchaften. §. 12 — 15. Gleichförmige Bewegung. §. 16. Kräfte, verſchiedene Gattungen derſelben, Preſſungen, lebendige Kräfte, beſchleunigende Kraft. §. 17 bis 26. Grundregeln der drückenden Kräfte. §. 27. 28. Größe der Bewegung. §. 29 — 32. Entgegengeſezte Preſſungen und ihre Effekte.

§. 1.

Sowohl in der Natur überhaupt, als in ihren einzelnen Theilen, vom größten bis zum kleinſten, ſehen wir unzählige Veränderungen vorgehen, die in ſteter ununterbrochener Ordnung auf einander folgen, und ſämmtlich durch die Bewegung bewirkt werden. Die Urſachen ſowohl dieſer als jener, die uns unbekannt ſind, und die wir

mit dem Namen: **Kräfte**, zu benennen pflegen, gleichen den Gewichten in unſern Maſchinen, und vertreten die Stelle unaufhörlich geſpannter Federn. Sie beleben jeden Stoff; durch ſie erhält der Schauplatz der Schöpfung ſeine Dauer, durch ſie gewinnt er täglich eine neue Geſtalt. Neue Körper entſtehen, wachſen und vermehren ſich, indem ältere abnehmen, ihre Stellen andern überlaſſen, und zu Grunde gehen. Dies alles, wie und warum es geſchieht, einzuſehen, müſſen wir die Naturkräfte und die von ihnen hervorgebrachten Bewegungen unterſuchen. Denn erſt lernen wir das Verfahren der Natur und die ihr vorgeſchriebenen Regeln und Geſetze kennen, von welchen ſie niemals abweicht, und die ſie überall und ſtandhaft in ihren Werken befolgt.

§. 2. Mit Recht hält man daher die Wiſſenſchaft, die wir **Mechanik** zu nennen pflegen, oder die Wiſſenſchaft von der Bewegung und der bewegenden Kräfte, für den Schlüſſel der Natur. Sie iſt es, womit wir uns in gegenwärtigen Vorleſungen beſchäftigen werden: theils um uns mit der Natur einigermaßen bekannt zu machen, theils um zu lernen, wie wir uns ihrer Geſetze und Kräfte bedienen, und auf was Art wir ihre heilſamen Wirkungen anwenden können, um daraus Nutzen für das bürgerliche, Beyſtand für das menſchliche Leben zu erlangen.

Ehe wir weiter fortgehen, laßt uns anmerken, daß man dieſe Wiſſenſchaft in die **Mechanik** und **Statik** einzutheilen pflegt. Jene erklärt die Geſetze der Bewegung und ihre Folgen; dieſe handelt vom **Gleichgewicht** der Kräfte, oder von denjenigen Zuſtand derſelben, wo jede die Bewegung der andern

dern aufhebt. Beyde werden wir in dieſem Buche betrachten, dabey aber derjenigen Ordnung folgen, nach welcher der Zuſammenhang der Wahrheit am leichteſten in die Augen fällt.

§. 3. Zuerſt müſſen wir einige allgemeine Erinnerungen über die materiellen Dinge vorausſchicken; dabey werden wir uns aber in keine langen Betrachtungen über die urſprüngliche Natur der Dinge einlaſſen. Dieſe gehören zum Theil in die **Naturlehre**, zum Theil in die **Metaphyſik**. Wir erinnern daher, daß hier blos von der Körperwelt, und den körperlichen und materiellen Theilen gehandelt wird, woraus ſie beſteht.

§. 4. Das Wort: **Materie** bedarf einer Erklärung. In dem Augenblick, da die ganze Natur, was für Veränderungen ſie auch durch die Bewegung leidet; ſo wie ſie iſt, hervorgebracht wird, äuſſern alle ihre Beſtandtheile vom größten, bis zum kleinſten, einen Widerſtand gegen die Bewegung, gleichſam eine natürliche Trägheit und Beſtreben, einer jeder Veränderung zu widerſtehen. Will man z. B. einen Körper aus ſeiner Stelle bewegen, ſo wird er unfehlbar mit gleicher Kraft widerſtreben. Die Pferde ziehen den Wagen, und dieſer zieht gleichmäßig die Pferde. In der That ſind die gemeinen alle Augenblicke vorkommenden, höchſt einfachen Erfahrungen hinreichend, uns von der Wahrheit dieſes erſten und allgemeinen Grundſatzes zu überzeugen. Ja es läßt ſich ſchlechterdings keine Wirkung auf dasjenige gedenken, ſo dieſer Wirkung keinen Widerſtand leiſtet, im Grunde nichts als ein Unding, ein Schatten, den Bildern gleich, die wir in freyer Luft vor dem Spiegel ſchweben ſehen, ſeyn würde. Die

vorhandenen Dinge ſind eben dadurch, daß ſie einer Wirkung widerſtehen können, **wahre Dinge**; dadurch unterſcheiden ſie ſich zugleich von Theilen des leeren Raums, die in Anſehung der Ausdehnung mit jenen übereinkommen. Das erſte Grundgeſetz der Natur iſt alſo: **Wirkung und Gegenwirkung ſind einander gleich.** In ſo fern ein Ding auf ein anders nicht zurück wirken kann, kann es auch von jenem keine Veränderung leiden. Trifft daher ein Körper auf einen andern, und ſezt ihn in Bewegung, ſo leidet er von demjenigen Theile der Kraft, die der nachfolgende Körper durch die, beyden gemeinſchaftliche, Geſchwindigkeit erhält, und die blos von dieſer abhängt, keine Veränderung.

Anmerkung. Es iſt nicht zu leugnen, daß in dieſem allgemein ſo ausgedrückten Geſetz: **Wirkung und Gegenwirkung werden einander gleich geſezt,** einige Zweydeutigkeit und Dunkelheit liegt. Daher auch nicht alle in der Erklärung deſſelben übereinſtimmen. Dieſe Zweydeutigkeit zu heben, und zugleich zu zeigen, auf was für Art die Wahrheit deſſelben aus der Uebereinſtimmung der Erſcheinungen erkannt, mit was für Recht es für ein allgemeines Geſetz gehalten, und unter den erſten Grundwahrheiten dieſer Wiſſenſchaft aufgeſtellt werden kann, will ich den Sinn deſſelben etwas deutlicher aus einander ſetzen:

1.) **Jede Wirkung eines Körpers** A (oder einer der Maße A beywohnenden bewegenden Kraft) **auf einen andern Körper** B **iſt gegenſeitig;** das iſt: wenn ein Körper A in einen andern Körper B wirkt, und mit dieſer Wirkung in B entweder eine Bewegung nach irgend einer Richtung, oder wenigſtens

ſtens ein Beſtreben zur Bewegung hervorbringt; ſo entſteht zugleich eine Bewegung oder ein Beſtreben zur Bewegung in dem Körper A nach der entgegengeſezten Richtung. So wie die Wirkung in B der bewegenden Kraft des Körpers A, und ſeiner Wirkung, zugeeignet wird, ſo wird auch die Bewegung oder das Beſtreben des ſtoßenden Körpers A der zurückwirkenden Kraft und der Gegenwirkung des geſtoßenen Körpers B zugeeignet.

Die Bewegung, oder das Beſtreben zur Bewegung, ſo in einem Körper nach einer gewiſſen Richtung neu entſteht, **iſt einerley mit dem Verluſt und der Vernichtung der Bewegung nach der entgegengeſezten Richtung.** Läuft z. B. ein Körper A rechts mit einer Bewegung = 10 fort, und ihm wird eine neue Bewegung = 2 nach der entgegengeſezten Richtung eingedrückt, ſo iſt das eben ſo viel, als hätte man ſeine erſtere Bewegung = 10 um ihren Theil = 2 vermindert, ſo daß der andere Theil = 8 übrig bliebe.

2.) **Der Bewegung, die in B von der Wirkung des anſtoßenden Körpers A entſteht, iſt die andere, die in dem Körper A nach der entgegengeſezten Richtung entſteht, der Größe nach, gleich,** ſo daß, wenn man das Produkt aus der Maſſe in die Geſchwindigkeit des Körpers für das Maas der Bewegung annimmt, eben ſo viel in dem wirkenden Körper A nach der entgegengeſezten Richtung durch die **Gegenwirkung** des Körpers B hervorgebracht wird, als durch die **Wirkung** des Körpers A in dem Körper B nach der Richtung der bewegenden Kraft bewirkt worden. Daher ſagt man:

die **Gegenwirkung** ſey der **Wirkung** gleich; ſie iſt es auch **wirklich**, wenn ſowohl die Bewegung, als die die Bewegung erzeugende Wirkung beſagtermaßen erklärt wird. Ob eben das behauptet werden kann oder nicht, wenn auf alles, was ſowohl bey der Bewegung der Körper, als bey der Wirkung der bewegenden Kräfte auszumeſſen vorkommt, Rückſicht genommen wird, werde ich unten in den **Anfangsgründen der Dynamik** aus den Erſcheinungen unterſuchen.

3.) Es erhellt aber theils überhaupt der Zuſammenhang der **Gegenwirkung** mit der **Wirkung**, theils die Gleichheit in der Größe der nach entgegengeſezten Richtungen ſowohl in dem wirkenden Körper A, als dem leidenden B hervorgebrachten Bewegungen.

a) In den Fällen, wo ſich **beyde** Körper A und B vor dem Stoß **in Ruhe** und **freyer Lage** befinden, wobey alle äuſſerlichen Hinderniſſe ihrer Bewegung und die andern Kräfte der Elaſticität, des Zuſammenhängens, des Zurückſtoßens u. dergl. bey Seite geſezt werden. Stellt man ſich zwey Kähne auf dem Waſſer vor, und in dem einen einen Menſchen, der den andern Kahn zieht oder fortſtößt, ſo entſteht in beyden eine gleiche Bewegung nach entgegengeſezten Richtungen; die Kähne nähern ſich entweder, oder entfernen ſich von einander. Wird ein Schiff von einem Kahn fortgetrieben, oder der Kahn von dem Schiffe, ſo geſchieht eben das: es entſteht in beyden Körpern eine Bewegung, ſowohl in demjenigen, wo ſich die wirkende Kraft befindet, als auch in dem andern: die Größe derſelben iſt nach den entgegeſezten Richtungen einerley; die Geſchwindigkeit aber des einen Körpers um ſo viel kleiner oder größer, als

die

die Geſchwindigkeit des andern, ſoviel umgekehrt die Maſſe des erſtern größer oder kleiner iſt, als die Maſſe des andern.

Gleiches geſchieht, wenn der Magnet das Eiſen anzieht; auch das Eiſen zieht den Magneten. Losgebrannte Stücke ſpringen zurück, weil die Gewalt des entzündeten Schiespulvers ſowohl rückwärts gegen das Stück, als gegen die abgeſchoſſene Kugel wirkt. Liegen A und B zunächſt bey einander, wirkt alsdenn eine elaſtiſche oder ſonſt eine andere Kraft auf A gegen B, und ſezt dieſen nach einer gewiſſen Richtung in Bewegung, ſo muß nothwendig A ſelbſt ſich rückwärts oder nach der entgegengeſezten Richtung gleichmäßig bewegen.

b) **Berührt der bewegte Körper A in ſeiner Bewegung einen andern freyliegenden B,** ſo empfängt zwar B die Bewegung in der Richtung, nach welcher A ſtrebt; ſo viel aber B in dieſer ſeiner Richtung an der Bewegung empfängt, ſo viel verliert der berührende A in eben derſelben, d. i. er gewinnt ſo viel in widriger Richtung.

Eben das geſchieht, wenn A dergeſtalt mit einem Faden, oder auf andere Art mit B verbunden, ſich fortbewegt, daß er ſeinen Weg nicht verfolgen kann, wenn nicht zugleich B aus ſeiner Stelle nach der nämlichen Richtung weicht. Denn ſo empfängt B beſtändig Bewegung, aber nicht ohne Verminderung der Bewegung in A nach eben der Richtung, oder, nicht ohne Erzeugung einer neuen Bewegung in A nach der Richtung, die der in B bewirkten Bewegung gerad entgegengeſezt iſt.

Dieſes iſt der Fall, wenn die Pferde den Wagen ziehen. Die bewegende Kraft, die ſich bey den Pfer-

den befindet, und ihre Körper fortbewegt, wird der Maſſe des Wagens mitgetheilt. Dieſe Kraft wirkt alſo in den Wagen. So viel Bewegung ſie aber in dem Wagen hervorbringt, ſo viel weniger kann ſie bey den Körpern der Pferde ſelbſt hervorbringen. Hier iſt eine Veränderung der Kraft und der Bewegung in ihrer Richtung, welche einerley iſt mit einer neuen Kraft und neuen Bewegung in der entgegengeſezten Richtung, und dieſes wegen der Gegenwirkung des Wagens, der in der Richtung der Kraft ſelbſt gezogen wird.

4.) **In keinem Fall aber bewegt ſich der zurückwirkende Körper** B **während der Wirkung des Körpers** A **wirklich in der Richtung, nach welcher er zurückwirkt.** Er empfängt die Wirkung des Körpers A; zu Folge derſelben bewegt er ſich auch wirklich in der Richtung, nach welcher ihn die bewegende Kraft des Körpers A antreibt. Er **wirkt** aber **dadurch**, daß er dem Körper A eine gerad entgegengeſezte Bewegung eindrückt, **zurück.** Doch geſchieht dieſes auch bey dem ſtoßenden Körper A, wenn er vor der Wirkung in Ruhe war; wie bey dem Kahn, der den andern fortſtößt oder anzieht. In dieſem Fall nämlich wirkt der Körper A gegen B, und ſezt dieſen in Bewegung; er ſelbſt aber weicht nicht aus ſeiner Stelle gegen B, ſondern empfängt vielmehr eine Bewegung nach der entgegengeſezten Richtung. Bewegte ſich aber A vor ſeiner Wirkung in B ſchon gegen B zu, und trifft in dieſer ſeiner Bewegung auf B; ſo fährt er zwar fort, ſich gegen B zu bewegen, aber mit verminderter Geſchwindigkeit. Denn er empfängt durch die Gegenwirkung eine gegenſeitige Bewegung, das heißt: ſeine Bewegung wird vermindert. Doch

Doch iſt zwiſchen dem **wirkenden** und dem **zurückwirkenden** Körper dieſer Unterſchied: Bey dem **wirkenden** Körper befindet ſich eine **bewegende Kraft.** Und dieſe **muß ſich durch einen gewiſſen Raum gegen den leidenden Körper** B **bewegen,** ſo lange die Wirkung dauert, alsdenn wird B in Bewegung geſezt; obgleich die **Maſſe** A ſelbſt, oder ihr **Schwerpunkt** ſich nicht nothwendig B nähern muß. **Denn kein Körper empfängt Bewegung, wenn ihm nicht die bewegende Kraft durch einen gewiſſen Raum zuſezt.** Wenn der Menſch im Kahn den andern Kahn fortſtößt, ſo muß ſich der Menſch oder die Stange, womit er ſtößt, ſowohl gegen den Kahn, den er fortſtößt, als auch zugleich mit dem, worinnen er ſich befindet, bewegen: obgleich der Kahn ſelbſt, worinnen der Menſch iſt, zurück geht. Eben ſo verhält es ſich in andern ähnlichen Fällen. Die **bewegende Kraft,** z. B. der Elaſticität u. a. bewegt ſich, und ſezt ſowohl dem Körper, worauf ſie wirkt, als auch ihrer Maſſe ſelbſt, der die Kraft beywohnt, zu. Eben ſo muß der Körper A, wenn er mit ſeiner Bewegung in den andern B wirkt, während der Wirkung in B ſich in ſeiner Richtung gegen B bewegen, und dieſem zuſetzen; der zurückwirkende B aber bewegt ſich nicht zurück gegen A, ſezt ihm auch nicht zu; er wirkt nur dadurch, daſz er die Bewegung aufnimmt, und in A vernichtet, entgegen.

5.) Iſt der Körper B, worauf A wirkt, auſſer ſeiner Trägheit mit andern bewegenden Kräften, z. B. der anziehenden, der Federkraft u. ſ. f. oder mit ſolchen, welche die Bewegung verhindern, wie die Schwere in Vermehrung des Gewichts, das Zuſam-

menhängen u. a. verſehen, oder bewegt ſich B nach einer Richtung, die der Bewegung des Körpers A entgegengeſezt iſt; findet eins von dieſen ſtatt, ſo iſt in der That allezeit eine **doppelte Wirkung und doppelte Gegenwirkung** vorhanden. Denn alsdenn wirkt ſowohl A als B, und zugleich wirken beyde zurück; aber **dieſe doppelte gegenſeitige Wirkung kann als Eine betrachtet werden**; und beyder Wirkung nach entgegengeſezten Richtungen iſt beyder Gegenwirkung gleich.

6.) Die Wahrheit dieſes Geſetzes lehren die überall vorkommenden Erſcheinungen; dieſe beſtätigen zugleich die daraus als Hauptſatz hergeleitete Folgerungen, die ſämmtlich ſowohl mit den Grundſätzen der Naturlehre, als auch mit allen Erfahrungen übereinſtimmen. Man kann daher dieſes Geſetz mit **Huygens**, als eine allgemeine Hypotheſe annehmen, deren Wahrſcheinlichkeit unendlich groß iſt, das heißt: die für gewiß und unzweifelhaft gehalten werden kann. Oder vielmehr, mit **Newton**, als ein allgemeines aus der Uebereinſtimmung der Erſcheinungen hergeleitetes, und durch Induktion beſtätigtes Geſetz. Was aber die Beweiſe dieſes Grundſatzes a priori betrifft, d.i. die aus der Natur der Materie und der **bewegenden** Kräfte durch nothwendige Folge hergeleitet werden, und aus welchen man die Nothwendigkeit der **Gegenwirkung** und ihre Gleichheit mit der **Wirkung** zu erweiſen ſucht; dieſes gehört nicht hieher. Hierbey kommen Schwierigkeiten vor, die entweder nicht gänzlich gehoben, oder wenigſtens nicht aus dem Wege geräumet werden können, wenn nicht andere Sätze, die mit Recht in die Metaphyſik verwieſen werden, vorausgeſezt ſind. (T.)

§. 5.

§. 5. Wir nennen daher dieſe Dinge: **materielle**, nicht nur, weil ſie aus andern zuſammengeſezt ſind, ſondern auch, weil ſie ein gewiſſes Vermögen äuſern, der Bewegung zu widerſtehen, welches man die **Trägheit** nennt. Dieſe natürliche innere Kraft der Materie zu widerſtreben, äuſert ſich nur dann erſt, wenn wirkende Urſachen ihren Zuſtand zu verändern ſich beſtreben.

§. 6. Die **erſten Gründe** dieſer Wiſſenſchaft hängen ſo genau mit einander zuſammen, daß man ſelbige mit einem Blick auf einmal überſehen muß, um alles übrige deſto deutlicher einzuſehen. Die **Bewegung** iſt das Gegentheil der **Ruhe**, ſo wie die **bewegende Kraft** das Gegentheil der **Trägheit**; um ſich von dieſer einen Begriff zu machen, muß man erſtlich jene kennen lernen.

Laßt uns daher von der Bewegung folgendes bemerken:

1.) Man ſagt, ein Körper ſey **in Bewegung**, wenn er beſtändig nach einer gewiſſen Linie fortrückt, welche Linie jederzeit **gerade** iſt, wenn nur eine Kraft beſtändig auf einerley Art in den Körper wirkt. In dieſem Zuſtande bleibt der Körper niemals in einerley Stelle, in jedem Augenblick verändert er ſeinen Ort.

2.) Bey dem Begriff der Bewegung ſind demnach zwey Stücke gehörig zu unterſcheiden: das erſte nennen wir die **Richtung**; das andere: die **Geſchwindigkeit**. Die **Richtung** iſt eine **gerade Linie**, nach welcher der Körper ſich entweder ſtets bewegt, oder ſich zu bewegen beſtrebt. Aendert ſich gleich dieſe Linie während der Bewegung beſtändig, welches geſchieht, wenn mehrere, von einander verſchiedene,

ſchiedene Kräfte den Körper nach verſchiedenen Seiten anſtoßen: ſo kann doch in einer unendlich kleinen Zeit keine Bewegung gedacht werden, die nicht in gerader Linie geſchieht; daß man daher allgemein ſagen kann: **jede Bewegung geſchieht in gerader Linie**; doch mit der Bedingung, daß die endliche Bewegung als der Innbegriff der Bewegungen angeſehen wird, die alle in **unendlich** kleinen Zeiten zurückgelegt werden. Die Richtung aller dieſer kleinen Bewegungen iſt alſo eine gerade Linie, deren Lage ſich aber während der endlichen Bewegung ändern kann.

3.) Zweytens iſt bey der Bewegung die **Geſchwindigkeit** zu betrachten: Dieſe beſteht in dem Vermögen des bewegten Körpers, nach welchem er **in einer gegebenen Zeit einen gegebenen Raum durchläuft**. Sie iſt alſo das Verhältniß des zurückgelegten Raums gegen die Zeit, worinnen er durchlaufen wird.

Anmerkung. Die Geſchwindigkeit iſt eine **innere** und abſolute Eigenſchaft des Körpers; ſie iſt ein gewiſſer Zuſtand, eine Modifikation der Materie, die ſich durch einen gewiſſen Trieb bewegt. Was ſie aber ſo für ſich in dem Körper betrachtet ſey, ſehen wir nicht ein, haben auch davon keinen deutlichen Begriff. Auf der Geſchwindigkeit beruht die mehrere oder e mindere Aenderung der Lage eines Körpers gegen andere, und die Folge davon iſt, daß er in einer gegebenen Zeit einen gegebenen Raum zurück legt. Hieraus kann die Geſchwindigkeit ſelbſt durch das Verhältniß des Raums zu der Zeit beſtimmt und gemeſſen werden. (T.)

4.) Drittens, kömmt bey der Bewegung auch die Zeit vor. Bewegt ſich ein Körper von einem Ort zum andern, ſo entſtehet eine Folge von Veränderungen, und dieſe iſt es, was man Zeit nennt.

§. 7. Ein jeder **Körper** enthält alſo auf ſeiner äuſern Oberfläche Theile, die der Bewegung widerſtreben, und ſie auch empfangen können. Dieſe Theile ſind dasjenige, was wir in der Folge **Materie** oder **Maſſe** nennen werden. Die Theilbarkeit derſelben überſteigt, ſo viel wir aus der Erfahrung erkennen, unſere ganze Einbildungskraft, wobey wir uns aber hier nicht aufhalten werden. Laßt uns vielmehr bemerken, daß **die der Materie von den bewegenden Kräften mitgetheilte Bewegung durch alle Theile derſelben gleich vertheilt wird.** Wäre nach geſchehenem Eindruck die Geſchwindigkeit nicht in allen, auch den kleinſten Theilen, einerley; ſo würde der Körper zerreißen, und ſeine langſamer oder mit minderer Geſchwindigkeit bewegten Theile würden von den mit größerer Gewalt vorrückenden zurückgelaſſen werden. Ueberdies erhellt auch, daß alle Theile, da ſie die Bewegung gleichförmig empfangen, ihr auch durch ihre Trägheit gleichförmig widerſtehen müſſen. Daher iſt **die Trägheit der Maſſe proportional,** ſo daß doppelte Maſſe einerley Kraft, doppelte, dreyfache Maſſe dreyfachen Widerſtand u. ſ. f. entgegenſezt.

§. 8. Eben ſo erhellt auch, daß **jeder Körper aller Grade der Bewegung gleich empfänglich ſey.** Stößt man z. B. eine, in dieſem Augenblick ruhende Kanonenkugel mit dem Fuß, ſo rollt ſie langſam auf der Erde; ſie bewegt ſich aber im Ausgang

gang aus dem Geſchütz, wenn dieſes nur mäßig mit Pulver geladen wird, mit großer Geſchwindigkeit. Demnach kann Ruhe und jeder Grad von Bewegung bey dem nämlichen Körper statt finden. **Ruhe** iſt nichts anders, als Abweſenheit der Bewegung. Da alſo jeder Körper an ſich gleich geſchickt iſt, dieſen oder jenen Zuſtand anzunehmen; ſo folgt auch, daß kein Körper für ſich weder ſeine Geſchwindigkeit mit einer andern, noch die Bewegung mit der Ruhe, noch hinwiederum dieſe mit jener verwechſeln kann. Aus der Natur der Trägheit §. 4. folgt alſo: **jede Veränderung in der Materie kömmt von einer äuſern Urſache her.** Die Trägheit bringt demnach ſo wenig einen Zuſtand in der Materie hervor, daß ſie ſich vielmehr jeder Veränderung widerſezt.

§. 9. **Auch ändert der Körper für ſich ſeine Richtung nicht.** Geſezt, es wäre möglich: Aus was für Grund ſollte denn a (Taf. I. Fig. 1.) das ſich nach fa bewegt, ſich vielmehr nach der Richtung ab, als nach der entgegengeſezten ae, oder einer andern ad wenden? Eben das gilt vom Zuſtande der Ruhe; daher haben die Körper ſchlechterdings von Natur kein Vermögen, ſich ſelbſt zu verändern.

Anmerkung. Zwey allgemeine und erſte Grundſätze hat die Wiſſenſchaft von der Bewegung. Der eine iſt jener von der Gleichheit der Gegenwirkung mit der Wirkung, wovon oben geſagt worden. Der andere iſt der, den der **Verfaſſer** hier erklärt, und **Newton** ſo ausdrückt: **jeder Körper beharret in ſeinem Stand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung nach einer gewiſſen Richtung, wofern er nicht von eingedrückten Kräften**

geno-

genöthigt wird, dieſen Stand zu verändern.

Dieſer leztere Grundſatz, ob er gleich nur hauptſächlich von derjenigen Gattung Körper gilt, die der innern thätigen Kräfte beraubt ſind, dergleichen man ſich unter der blos trägen Materie vorſtellt; kann eben ſo wie obiger Grundſatz von der Gegenwirkung auch auf andere Gattungen Körper angewendet werden, dergleichen die **Automaten** und die mit eingepflanzten bewegenden Kräften verſehenen **belebten Körper** ſind, die die eigentlichen Quellen der Bewegungen bey ſich ſelbſt führen. Kein Körper in der Natur, welcher es auch ſey, wirkt in einen andern ohne Gegenwirkung des leidenden. Eben ſo kann auch kein Körper, der ſich in Ruhe, oder in einem gewiſſen Orte befindet, dieſen Ort verlaſſen, wenn er nicht einen andern Körper antrifft, worauf er wirkt, und deſſen Gegenwirkung empfängt. Selbſt die Thiere können ſich nicht von der Stelle bewegen, wenn ſie nicht mit ihren Körpern gegen die Erde auftreten; noch die Vögel im luftleeren Raume fliegen. Auch kann kein Körper, wenn er in Bewegung iſt, aus eigner innerer Macht willkührlich ſeine Geſchwindigkeit und Richtung ändern, wenn er nicht einen andern Körper auſſer ſich antrifft, auf den er wirken, und durch deſſen Gegenwirkung eine neue Bewegung und veränderte Geſchwindigkeit empfangen kann. Die Federkraft kann zwar ihre Materie, der ſie beywohnt, ausdehnen und die Theile von einander abſtoßen; ſie kann aber nicht die ganze Maſſe und den Schwerpunkt aus ſeinem Ort verrücken, wenn nicht ein äuſſerer Körper hinzukömmt, deſſen Kraft ihr durch Zurückwirken eingedrückt wird. Da jedoch bey dergleichen

chen aus eingepflanzten Kräften ſich verändernden Körpern, die erſte Urſache der Veränderung in ihnen ſelbſt liegt; ſo wird unſer Grundſaz gemeiniglich nur auf jene Gattung von Körpern eingeſchränkt, die eigenthümlicher eingepflanzter Kräfte beraubt ſind, oder als ſolche gedacht werden.

Die Wahrheit dieſes Grundſatzes erhellt und beſtätigt ſich eben ſo, wie der vorige aus der Uebereinſtimmung der Erſcheinungen. Die unmittelbaren Beweiſe deſſelben a priori aus tranſcendenten Begriffen und den nöthigen Wahrheiten aufzuſuchen, ſo ich kaum für möglich halte, gehört nicht in die Grenzen der natürlichen Philoſophie. Jede Wiſſenſchaft hat ihre eigenthümlichen Grundwahrheiten, die, wenn ſie gleich aus höhern Wiſſenſchaften hergeleitet werden können, doch in jener als ſolche zum Grunde gelegt werden müſſen. Die natürliche Philoſophie iſt ſo beſchaffen, daß ſie durch die Uebereinſtimmung und die innere Harmonie ihrer Wahrheiten, wie durch gegenſeitige Anziehung und Zuſammenhang, ſich ſelbſt im Verſtande befeſtigt und unterſtüzt, und keiner äuſſerlichen und fremden Unterſtützung bedarf. (T.)

§. 10. Die Richtungen a e und a b heißen entgegengeſezte. Wirken zwo Kräfte in der nämlichen geraden Linie, jedoch in Theilen derſelben e a und b a, die nach verſchiedenen Seiten liegen, und ſich einander begegnen, in einander; ſo heißen dieſe Theile e a und b a entgegenſezte Richtungen. Dieſes vorausgeſezt läßt ſich die Art und Weiſe, wie ſich die Trägheit äuſert, nunmehr weit beſſer begreifen. In dem Augenblick, da etwas auf einen materiellen Gegenſtand wirkt, wirkt dieſer in der entgegengeſezten

Richtung

Richtung auf dasjenige, ſo in ihm eine Veränderung hervorzubringen, ſich beſtrebt, gleichförmig zurück. Allein obgleich die Materie der Bewegung wirklich in dem Augenblick, da ſie ihr beygebracht wird, widerſteht, ſo erſtreckt ſich dieſes doch nach dem, was oben §. 4. geſagt worden, nicht weiter, als daß ſie ihre Veränderung von der wirkenden Kraft deſto beſſer empfängt. Denn die Bewegung wird ganz eingedrückt, wenn der ganzen widerſtanden wird.

Ueberdies wird aus bisher geſagtem leicht geſchloſſen, daß **Richtungen** der Kräfte **übereinſtimmend** zu nennen ſind, wenn ſie ihre Wirkungen in der nämlichen Linie, und an dem nämlichen Theile derſelben äuſern, welches z. B. ſtatt hätte, wenn mehrere Kräfte zugleich nach e a wirkten.

§. 11.) Demnach iſt die **Trägheit**, oder das natürliche Beſtreben, der Materie zu widerſtehen, jederzeit **dem Effekt gleich, der in der Materie, der ſie beywohnt, hervorgebracht wird.** Der Widerſtand eines leicht berührten Körpers iſt beynahe nichts; eben dieſer Körper, heftiger geſchlagen, rächt gleichſam das Unrecht durch Verſetzung eines gleichen Schlags. Schlagen wir ihn daher, ſo empfinden wir eben das, was der Körper empfinden würde, wenn er der Empfindung fähig wäre. Ferner iſt zu merken, daß **die Trägheit den übrigen bewegenden Naturkräften ſchlechterdings nicht beygezählt werden kann**, ob man ſie gleich mit dem Namen der **Kraft** zu benennen pflegt. Denn durch die Trägheit beſtreben ſich, wie geſagt, die Körper, ſich in dem Zuſtande, worinnen ſie ſind, zu erhalten. Wären

ren daher alle Theile der Natur in Ruhe, und kåme, auſer der Trågheit, keine andere Kraft hinzu, wodurch die Natur ermuntert und wieder belebt würde, ſo würden alle dieſe Theile ihre Ruhe in alle Ewigkeit, ohne einige, auch die mindeſte Verånderung, beybehalten.

Anmerkung. **Daß die Trågheit der Materie eine wahre bewegende Kraft ſey,** verneinen einige, bejahen andere. Laßt uns ſehen, was uns die Erſcheinungen lehren:

1.) Keine Trågheit iſt ſo groß, daß ſie eine, auch die gróßte Maſſe hindert, einige Bewegung von der Wirkung, auch der kleinſten bewegenden Kraft zu empfangen: wenn nur der gereizte Kórper frey liegt. Die Trågheit des Kórpers beſteht alſo nicht in einem Widerſtreben deſſelben gegen die Bewegung, wie die Trågheit eines arbeitſcheuen Menſchen, der, obgleich ermuntert, doch ófters wieder von freyen Stücken in den Zuſtand der Ruhe zurückſinkt. **Jeder blos durch ſeine Trågheit widerſtehende Kórper empfångt und behålt allemal Bewegung bey.**

2.) **Indem der Kórper** von der bewegenden Kraft **die Bewegung empfångt, wirkt er mit ſeiner Trågheit zurück,** und dieſes **Zurückwirken der Trågheit** bringt eben ſo, wie **die bewegende Kraft,** eine Bewegung nach der entgegengeſezten Richtung in dem Kórper hervor. Hierbey wird nicht nur Bewegung vernichtet, ſondern zuweilen auch neue, zuvor nicht da geweſene, in dem wirkenden Kórper von dem zurückwirkenden erzeugt. (Vergl. §. 4. Anmerk. n. 3. a.) Es entſteht daher eine Verånderung in dem wirkenden Kórper, die ohne dem Widerſtand

ſtand von der Trägheit des gereizten Körpers nicht erfolgen kann. Wenn alſo A wirkt, und der durch ſeine Trägheit widerſtehende B die Bewegung empfängt, ſo würde die ganze Veränderung in dem Zuſtande des Körpers A und B, die durch dieſe gegenſeitige Wirkung zuwege gebracht wird, auch erzeugt worden ſeyn, wenn in dem Körper B, der blos mit ſeiner Trägheit widerſteht, die wirkende Kraft, und dagegen in A, wo die bewegende Kraft war, die bloſe Trägheit vorhanden geweſen wäre. Bey der gegenſeitigen Wirkung der Körper iſt es einerley, ob man ſich vorſtellt, das Eiſen ziehe den Magneten, oder umgekehrt, dieſer jenes. Der Erfolg iſt in beyden Fällen einerley. Daher behaupten einige: **Wirkung und Gegenwirkung, wirkende Kraft und gegenwirkende Trägheit** wären an ſich einerley, und nur **beziehungsweiſe** verſchieden.

3.) **Trägheit und bewegende Kraft folgen einerley Geſetz, dieſem nämlich: ein mit bewegender Kraft verſehener Körper wirkt nichts, wo er nicht genöthigt wird, aus dem Zuſtande ſeiner Bewegung oder Ruhe, worinnen er ſich befindet, zu weichen; er wirkt aber,** und erzeugt ein Beſtreben zur Bewegung, oder Bewegung ſelbſt in einem andern Körper, ſobald er ſeinen Zuſtand, **wenn nicht der andere Körper aus ſeinem Ort oder Zuſtand weicht, nicht fortſetzen kann. Eben dies iſt das Geſetz der Trägheit.** Der ruhende blos träge Körper wirkt ſich ſelbſt überlaſſen nichts, nur, wenn er genöthigt wird, ſeinen Zuſtand zu verlaſſen, wird er durch Zurückwirken wirkſam.

Da man ſich aber doch die **Trägheit** dem ſich ſelbſt überlaſſenen Körper dergeſtalt beywohnend vorſtellt, daß ſie nichts, weder in dem Körper ſelbſt, dem ſie beywohnt, noch in einem andern auſer jenem wirkt; dagegen angenommen wird, daß **die thätige und bewegende Kraft** bereits in dem Körper ſelbſt, dem ſie beywohnt, wirkt, ehe ſie in einen andern auſerhalb wirkt; ſo kann auch die **Trägheit** als ein **leidendes** Vermögen Bewegung zu empfangen, und, indem dieſes geſchieht, auf andere Körper zurück zu wirken, betrachtet werden. Streitet man aber hier nur über das Wort: **Kraft**, und deſſen Gebrauch, ſo ſehe ich nicht, mit was für Recht die **Trägheit** nicht **eine bewegende Kraft** heiſen könne, d. i. ſo etwas, worinnen der Grund liegt, warum bey einem andern Körper eine Veränderung in ſeinem Zuſtande der Bewegung oder Ruhe erfolgt. Denn ſetzet, die Wirkung des Körpers A in die Maſſe B geſchehe ſo, daß die bewegende Kraft ſelbſt und ihre Wirkung aus A gleichſam in den leidenden Körper B übergeht, ſo liegt doch in dieſer leztern Maſſe B etwas, ſo davon die Urſache und der Grund, folglich eine **Kraft** zu nennen iſt. Worzu aber der Wortſtreit, da die Sache aus den Erſcheinungen ſelbſt, ſo viel hier wenigſtens genug iſt, erhellt? Mehrers von der Natur der gegenſeitigen Wirkung ſage ich unten in den Anfangsgründen der Dynamik, wohin ich den Leſer verweiſe, den ich hierbey nicht länger aufhalten will. (T.)

§. 12. Der menſchliche Verſtand hat die Eigenſchaft, daß er durch ſorgfältige Unterſuchung der einfachen Wahrheiten ſich den Weg zur Einſicht in die verwickelten bahnt. Dieſes findet auch bey unſerm gegen-

gegenwärtigen Geſchäfte ſtatt. Keine Bewegung iſt einfacher, als die gleichförmige Bewegung, die durch den ganzen Zeitraum, in dem ſich der Körper bewegt, unveränderlich iſt, und in jeder Rückſicht ſich gleich bleibt. Es iſt klar, daß folgende Sätze bey dieſer Gattung von Bewegung ſtatt finden.

1.) **Wenn die Geſchwindigkeiten zweyer Körper gleich ſind, ſo verhalten ſich die von ihnen durchlaufenen Räume, wie die Zeiten, worinn ſie ſich bewegen.**

2.) Umgekehrt: **Sind die Zeiten, worinnen ſich beyde Körper bewegen, gleich, und ihre Geſchwindigkeiten ungleich, ſo verhalten ſich die durchlaufenen Räume, wie die Geſchwindigkeiten.**

§. 13. Heißt alſo der in der Bewegung durchlaufene Raum S, die Geſchwindigkeit C, die Zeit T: ſo verhält ſich der durchlaufene Raum, wie die Geſchwindigkeit mit der Zeit multiplicirt. Welches Verhältniß ſo ausgedrückt wird: $S = C.T.$ §. 12.

§. 14. Daher iſt auch 1.) $\frac{S}{T} = C$, **oder die Geſchwindigkeit verhält ſich wie der Raum, durch die Zeit dividirt.** Eben ſo iſt 2.) $\frac{S}{C} = T$, **oder die Zeit verhält ſich, wie der Raum durch die Geſchwindigkeit dividirt.**

§. 15. Man begreift ferner: wenn die mit gleichförmiger Bewegung zurückgelegten Räume gleich ſind, und S in unſerer Formel $\frac{S}{T} = C$ beſtändig und ei-

nerley in mehrern mit einander zu vergleichenden Beyſpielen; T und C aber ungleich und veränderlich angenommen werden: ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten umgekehrt wie die Zeiten: d. i. $C = \frac{1}{T}$

3.) Eben ſo erhellt, daß die Zeiten ſich umgekehrt verhalten, wie die Geſchwindigkeiten, wenn die durchlaufenen Räume gleich ſind, oder $T = \frac{1}{C}$.

§. 16. Nachdem wir die Regeln der gleichförmigen Bewegung, ſo die leichteſte iſt, erklärt haben, müſſen wir nun auch die Art und Weiſe unterſuchen, wie die Bewegung in der Natur erzeugt wird, die wir wenigſtens zum Theil deutlich begreifen müſſen.

1.) Zwo Urſachen ſind es nur, deren ſich die Natur zu Hervorbringung der Bewegung bedient. Die Bewegung wird entweder von Körpern eingedrückt, die ſelbſt, was dieſe Wirkung hervorzubringen betrifft, aller Bewegung beraubt ſind, und die in einem gewiſſen Zeittheile auch keine merkliche Bewegung hervorbringen, oder von bereits ſich bewegenden Körpern, die durch ihre Bewegung ſelbſt andern dergeſtalt Veränderungen eindrücken, daß nach überwundener Trägheit in dem Augenblick ſelbſt ſogleich eine merkliche Bewegung entſteht. Jene Urſachen heißen: **drückende Kräfte**, und ihr Effekt: **Druck** oder **Preſſung**. Die Effekte dieſer geſchehen durch den **Stoß**. Dies ſind die Hauptgattungen von Kräften und Wirkungen, die wir in der Natur wahrnehmen. Auſer dieſen kennen wir keine andern Wirkungen der Materie; und daraus

raus erklären und begreifen wir auch alles, was in der Mechanik vorkommt. Die drückenden Kräfte heiſen auch **todte**; die ſtoßenden: **lebendige Kräfte**; und zwar in ſoferne man auf die Kraft zu wirken, und die Gewalt in der Wirkung ſieht. Ihren Unterſchied werden wir unten deutlicher erklären. Die **drückenden** Kräfte ſind hier zuerſt, und vorzüglich von dem, der die Geſetze der Natur einſehen will, zu merken, aus dieſer Urſache wollen wir ſie hier auch zuerſt abhandeln.

Man begreift aber 2.) daß **beyderley Kräfte bewegende Kräfte ſind**: denn unter dieſer Benennung verſteht man alles, was entweder Bewegung hervorbringen oder verändern kann.

3.) Die drückenden Kräfte heiſen: **beſchleunigende**, wenn ihre ſtete Wirkung in einer gegebenen Zeit eine beſtimmte Geſchwindigkeit in dem Körper erzeugt.

4.) Demnach iſt der **Druck** ſelbſt, der auch die **abſolute Kraft** heißt, als eine wirkende innere Kraft der Körper, von was für einer Urſache er auch herrührt, anzuſehen. Bewegte ſich auch gleich die drückende Kraft zugleich mit dem widerſtehenden Körper, ſo würde dennoch der Druck eben ſo, als wenn beyde ruheten, fortdauern. §. 16. 1. Die **beſchleunigende Kraft** aber iſt alsdenn als ein Effekt deſſelben anzuſehen, wenn der Druck in allen Theilen der Materie eine gewiſſe Geſchwindigkeit hervorbringt. Denn der Effekt des Drucks wird durch alle Theile der Materie gleich vertheilt, §. 7. und dieſe werden in gleicher Zeit gleich ſtark fortgeſtoßen, und zwar mit geringerer oder größerer Geſchwindigkeit, nach-

dem dieſer Druck ſelbſt, oder die innere Kraft ſchwä- cher oder ſtärker iſt. Man merke überdies, daß die Preſſungen ſchwerer Körper mit ihren Gewichten einerley ſind, und daß allgemein die Preſſungen, wenn die Trägheiten gleich ſind, ſich erhalten, wie die beſchleunigenden Kräfte.

§. 17.

Die **Kräfte** und ihre Größen müſſen **aus ihren ganzen** oder **vollen Effekten** begriffen werden. Ihre Natur iſt uns unbekannt. Sie ſind daher nach der Größe der widerſtehenden Kraft, die ſie in gleicher Zeit überwinden, oder nach dem Stoße, den ſie in gleicher Zeit einerley Materie mittheilen können, zu ſchätzen. Dieſe **Gleichheit der Zeit** muß um ſo vielmehr in acht genommen werden, da die **drückenden Kräfte**, die in der Natur vorkommen, und überall in den Totaltheilen eine beſtändige Bewegung, in den kleinen ein Beſtreben zur Bewegung hervorbringen, wie auch alles dasjenige, was unter dem Namen der **Schwere** begriffen wird, einen Druck äuſert, der ohne Aufhören fortdauert. Daraus erkennt man, **daß die drückenden Kräfte ſich unter einander erhalten, wie die in gleicher Zeit in dem widerſtehenden Körper erzeugten Effekte.**

§. 18.

Dieſen Druck der drückenden Kräfte ſtellen wir uns, die Wahrheit zu ſagen, als etwas augenblickliches, nur durch einen unendlich kleinen Zeittheil wirkendes, vor, deſſen Wirkung aber, wenn der Lauf der Natur nicht gehindert wird, in jedem auf einander folgenden Augenblicke wiederholt wird. Auf dieſe Art drücken die ſchweren Körper; denn ihre Wirkungen

gen laſſen ſich in Gedanken trennen, ob ſie gleich in den Körpern ſelbſt ununterbrochen fortdauern, wie bey der Waage zu ſehen, deren Schaalen ſich einander ſchwebend erhalten, wovon in die eine ein neues Gewicht gelegt, die andere von dieſem Gewichte durch eine ſtete Bewegung niedergedrückt wird. Wenn aber die **drückenden Kräfte** wirken, ſo muß eins von dieſen beyden ſtatt haben. Entweder das, was dem Drucke widerſtehet, kann überwunden werden oder nicht. Jenes wird nach §. 4. 10. überall ſtatt haben, wenn nicht äuſere Urſachen hinzukommen, die die Bewegung hindern. In der That wird die größte Maſſe von dem geringſten Drucke mit einer, obgleich unendlich kleinen Geſchwindigkeit fortgerückt werden, und daher eine gewiſſe Bewegung erlangen, wofern nur auſer der natürlichen Trägheit dieſer Bewegung nichts im Wege ſteht. Das leztere kann ſich zutragen, wenn ein anderer Widerſtand hinzukommt. Der eine Druck wird von dem andern, ihm entgegengeſezten und gleichen, vernichtet. Daher **wird ein Druck, der im erſten Moment keine Bewegung hervorbringt, ſelbige niemals, wenn ſich nicht die äuſern Umſtände ändern, hervorbringen.**

§. 19.

Hindern demnach keine äuſern Urſachen, ſo wird allezeit aus der Wirkung der drückenden Kräfte eine Bewegung erzeugt werden, und, obgleich nur nach und nach, zunehmen, da ſie, anfangs ſehr gering, durch fortgeſezten ununterbrochenen Druck größer und merklich, und endlich überaus groß wird. Auf dieſe Art entſteht eine **unendliche** oder **lebendige**

Kraft der Materie, die aber auf ähnliche Art, wie ſie erzeugt worden, von einem andern entgegengeſez-ten Druck wiederum gänzlich vernichtet wird. Wir reden hier von den in der Natur ſtets fortdauernden Preſſungen, dergleichen die Schwere iſt. Allein in der Mechanik, ſofern ſie die Statik zugleich begreift, iſt noch eine andere Gattung von Preſſungen zu be-trachten, derjenigen nämlich, deren Natur nicht ver-ſtattet, daß ſie ihre Wirkung unbeſtimmt fortſetzen können. Hieher gehören z. B. die Kräfte der Men-ſchen und Thiere. Dabey wollen wir uns aber vor-jezt länger nicht aufhalten, da die Betrachtung der-ſelben in die Statik gehört, und die eigentlich ſoge-nannte Mechanik nur von den ſtets fortdauernden Naturkräften handelt.

§. 20.

Der Effekt des Drucks wird durch alle Theile der Materie gleich vertheilt; daher erhellt, daß die in verſchiedenen Maſſen erzeugten Effekte eines und deſſelben Drucks, ſich umgekehrt verhalten wie die Maſſen.

§. 21.

Eben ſo iſt klar, daß, wenn auch die Preſſun-gen für ſich betrachtet, d. i. ſo viel ihr inneres Ver-mögen, in gleicher Zeit auf gleiche Trägheiten zu wir-ken, betrifft, ungleich ſind, ſich ſelbige verhalten, wie die in einerley Maſſe erzeugten Effekte. Denn es iſt kein Zweifel, daß ſich die Urſachen ver-halten, wie ihre vollen ungehinderten Wirkungen.

§. 22.

Wir haben im §. 17. geſagt, daß die Kräfte nach ihren vollen Effekten zu ſchätzen ſind. Dieſe müſ-

ſen

ſen aber aus der Größe der Trägheit, die von jenen bewegt wird, beurtheilt werden. Durch die Trägheit verſtehen wir hier, wie in folgenden, einen widerſtehenden materiellen Gegenſtand, und durch den vollen Effekt, die ganze Veränderung, die jener Körper leidet; dieſe Veränderung mag nun aus der Größe des Raums oder der Geſchwindigkeit zu ermeſſen ſeyn; denn aus einem von beyden muß ſie ermeſſen werden.

§. 23.

Daraus folgt die allgemeine Wahrheit, daß **alle Kräfte, wenn man ihre vollen Effekte betrachtet, ſich unter einander verhalten, wie die bewegten Trägheiten mit dem Raum, durch den ſie gleichförmig fortrücken, multiplicirt,** wofern ſie nur in gleicher Zeit wirken, und in ihrer Wirkung ihre ganze Kraft anzuwenden, nicht gehindert werden. Iſt die Trägheit gleich, der Raum doppelt, ſo iſt auch der Effekt doppelt; iſt ferner bey gleichem Raume, durch den ſich die Trägheit bewegt, die Trägheit doppelt, ſo iſt ebenfalls der Effekt doppelt. Es iſt daher auſer Zweifel, daß ſich der volle Effekt verhält, wie die Größe der Trägheit oder der Maſſe, mit dem Raum, wodurch ſie ſich bewegt, multiplicirt. Eben ſo verhalten ſich auch die Kräfte ſelbſt: denn nach ihren ganzen Effekten müſſen ſie geſchäzt werden.

§. 24.

Hieraus iſt deutlich, daß die in gleicher Zeit durch den Druck wirkenden ganzen Kräfte ſich unter einander verhalten, wie die Trägheiten, die ſie bewegen, und der Raum, wodurch die Trägheiten von den

Kräften fortgerückt werden. Daraus folgt aber ferner, wenn die Kräfte P und p, die Maſſen, worinnen ſie wirken, M und m, und die Räume, wodurch ſich die Maſſen bewegen, S und s heiſen, daß

$$P : p = MS : ms.$$

Hieraus fließt folgende höchſtmerkwürdige Regel:

Wenn die Trägheiten, worauf die Kräfte wirken, ungleich, oder wenn M und m ungleiche Größen, die Kräfte P und p aber gleich ſind, ſo wird $MS = ms$, und $M : m = s : S$, d. i.

Die Trägheiten, die den Kräften widerſtehen, verhalten ſich verkehrt, wie die Räume, wodurch ſie ſich bewegen.

§. 25.

Umgekehrt ſind die Kräfte gleich, wenn die Trägheiten, oder die Widerſtände, die ſie bewegen, ſich verkehrt verhalten, wie die Räume, wodurch ſich die Trägheiten in gleicher Zeit bewegen.

§. 26.

Mehrere ſehr nützliche Regeln kann ein jeder, der nur einigermaßen mit Auflöſung der Gleichungen und Entwickelung der Verhältniſſe umzugehen weiß, aus der Gleichung $Pms = pMS$ ohne Mühe herleiten; denn es kann ſowohl $P = p$, als $s = S$ geſezt werden. Dabey wollen wir uns aber weiter nicht aufhalten, ſondern nur dieſes hinzufügen, daß jene Regel, wo der ganze Effekt der Kräfte angenommen wird, allgemein iſt. Daß aber die Kräfte aus den Geſchwindigkeiten, die ſie hervorbringen, zu beurtheilen ſind, wird alsdenn richtig behauptet, wenn die Bewegung vom Anfang der Zeit, da die Kraft wirkt, bis zu

Ende

Ende derſelben, als gleichförmig angeſehen werden kann: alsdenn verhalten ſich die Kräfte, wie **die Trägheiten in die Geſchwindigkeiten**, oder, wie wir §. 24. geſagt haben, wie die Trägheiten in die durchlaufenen Räume multiplicirt. Denn in der gleichförmigen Bewegung verhalten ſich die Räume, wenn die Zeiten gleich ſind, wie die Geſchwindigkeiten, §. 12. 2. und daher fallen dieſe beyden Verhältniſſe in eins zuſammen.

Da wir uns alſo die **Preſſungen** beſtändig als Kräfte vorſtellen, die in unendlich kleiner Zeit wirken, §. 18. ſo iſt es auch einerley, ob man ſagt, dieſe ſogenannten **todten** Kräfte verhalten ſich wie die Maſſen in die durchlaufenen Räume, oder wie die Maſſen in die Geſchwindigkeiten multiplicirt. Die Kraft, die in einem untheilbaren oder unendlich kleinem Zeitmomente wirkt, kann der Maſſe keine größere Bewegung im Anfang, als am Ende dieſes Zeittheilchens eindrücken. Bey den **lebendigen** oder ſolchen Kräften, die durch den Stoß wirken, verhält es ſich anders. Von dieſen, wenn ſie auch in gleichen Zeiten gleiche Effekte hervorbringen, kann dennoch nicht behauptet werden, daß die Bewegung, die ſie der Trägheit mittheilen, im Anfang der Zeit, da ſie wirken, mit der am Ende derſelben einerley ſey, obgleich, wie wir im folgenden zeigen werden, das Zeittheilchen, in welchem der Stoß eingedrückt wird, ſehr klein ſeyn kann. Denn die von **lebendigen** Kräften erzeugten Effekte nehmen beſtändig ab; andere Schwierigkeiten bey Vergleichung der von **lebendigen** Kräften in gleicher Zeit erzeugten Effekte zu geſchweigen. Wir ſchließen daraus, daß **die Wirkungen der drückenden Kräfte vom Stoß, oder die drückenden**

Kräfte

Kräfte von den lebendigen ſorgfältig unterſchieden werden müſſen.

§. 27.

Die Frage, ſo die Naturlehrer über die Größe der Bewegung hier aufzuwerfen pflegen, können wir nicht übergehen, da dasjenige, was in gegenwärtiger Vorleſung von der Bewegung geſagt worden, uns darauf führt. Hier ſieht man ohne Mühe ein, daß die ſich bewegenden und an andere anſtoſſenden Körper in dieſe nicht allein mit ihrer Geſchwindigkeit, ſondern auch mit ihrer ganzen Maſſe wirken. Denn die Bewegung iſt durch alle Theile der Materie dergeſtalt vertheilt, daß allen gleiche Kraft beywohnt. Daher iſt die eingepflanzte Kraft des ganzen Körpers, oder die Größe der Bewegung proportional der Maſſe, die ſich bewegt, in die Geſchwindigkeit, womit ſie ſich bewegt, multiplicirt.

§. 28.

Einige ſehen dieſe Größe der Bewegung als das Maas der Kräfte an, womit die ſich bewegenden Körper verſehen ſind, und lange genug hat man ſie auch dafür gehalten. Hiervon unten mehr. Hier erwähnen wir dieſes nur, um den falſchen Begriffen zuvorzukommen, die man ſich von den erſten Gründen der Bewegungslehre zu machen pflegt, und zu zeigen, worauf es bey der Behauptung ankommt: daß nur die Preſſungen, nicht aber die ganzen Kräfte, noch die vom Stoß der Körper herrührenden Effekte, durch dieſe Größe der Bewegung zu meſſen ſind.

§. 29.

§. 29.

Ehe wir dieſe Vorleſung endigen, laßt uns diejenigen Preſſungen betrachten, die in widrigen Richtungen einander entgegengeſezt ſind. Hier erhellt aber ſogleich, daß ſelbige, wenn ſie gleich ſind, einander vernichten, ſo daß keine Bewegung daraus entſteht. Und hieraus ſchließt man allemal auf die Gleichheit der Preſſungen.

§. 30.

Wirkt die drückende Kraft in ein Hinderniß, das aus ſeinem Orte nicht weichen kann, ſo wirkt dieſes mit ſeiner Trägheit in jene Kraft mit gleicher Kraft zurück, §. 11. Hier geht eben das vor, was wir §. 29. angezeigt haben. Daraus erkennt man, wie der Effekt eines Hinderniſſes, das aus ſeiner Stelle nicht bewegt werden kann, zu ſchätzen ſey.

§. 31.

Sind aber zwo nach entgegengeſezten Richtungen in einander wirkende Kräfte oder Preſſungen ungleich; wirken z. B. zwo ungleich große Kräfte in einander nach ea und ba (Taf. I. Fig. 1.) ſo wird die kleinere völlig, und ein gleich großer Theil der größern vernichtet. Alsdenn wird eine Bewegung vom Unterſchied der Preſſungen in der Richtung der ſtärkern erzeugt.

§. 32.

Dieſe wenigen Grundſätze ſind hinreichend, eine unendliche Menge anderer Wahrheiten, die in der Mechanik, einer Wiſſenſchaft von ſehr weitläuftigen Umfang, vorkommen, darauf zu bauen. Der zu

dieſer

dieſer Wiſſenſchaft gehörigen Beweiſe und Aufgaben, die von den berühmteſten Geometern bereits größtentheils unterſucht worden ſind, iſt eine unglaublich große Zahl. Wir werden davon in den **Vorleſungen** ſowohl, als in den Zuſätzen, nur diejenigen durchgehen, die vor andern von vorzüglichem Nutzen und Wichtigkeit, und ſo beſchaffen ſind, daß das übrige aus ihnen leicht verſtanden werden kann. Hier bietet ſich uns ein Feld dar, das mit den ſchönſten Blumen ohne Zahl geſchmückt iſt: laßt uns ihre Schönheit und Mannigfaltigkeit bewundern, für uns ſelbſt aber nur die nützlichſten Früchte ausſuchen.

Erſter Zuſatz.

Von den beſchleunigenden Kräften überhaupt und der Beſtimmungsart derſelben.

Inhalt.

§. 1. 2. Methode, das Verhältniß der beſchleunigenden Kräfte zu finden, und zwar entweder aus den Geſchwindigkeiten, oder aus den Räumen, oder aus den Kräften ſelbſt, oder aus den Widerſtänden, die ſich ihnen entgegen ſetzen.

---

§. 1.

Auf dem in voriger **Vorleſung** erklärten beruht faſt alles, was bey Auflöſung der mechaniſchen Aufgaben zum Grunde gelegt werden muß. Wir können daher nicht umhin, zum Beſten derjenigen, die weiter zu gehen Luſt haben, folgendes hinzuzuſetzen:

Die

Die Größe des in einer beſtimmten Zeit wirkenden Drucks iſt nach §. 26. Vorleſ. aus der Größe der bewegten Materie und der Geſchwindigkeit, womit ſelbige in dem Augenblick, da die drückende Kraft in ſie wirkt, ſich bewegt, zu ſchätzen. Die Preſſungen aber wirken nach §. 18. Vorleſ. nur in einer unendlich kleinen Zeit, und können daher in dieſer Zeit nur eine unendlich kleine Geſchwindigkeit hervorbringen. Hieraus wird aber geſchloſſen, daß, wenn das unendlich kleine Zeittheilchen, oder das Element derſelben dt; das unendlich kleine Wachsthum der Geſchwindigkeit dv; der Druck p; und die Materie m heißt, (§. 17. 26.)

$$pdt = mdv$$

d. i. die Preſſungen in das Zeitmoment, wodurch ſie dauern, multiplicirt, verhalten ſich wie die Größen der Elementarbewegung, die ſie hervorbringen. Das Zeitmoment aber, worinnen der Druck wirkt, muß hier ganz genommen werden, da das Maas der vollen Wirkung des Drucks und der Elementarbewegung davon abhängt. Demnach iſt ſowohl pdt als mdv der volle Effekt des Drucks, folglich

$$pdt = mdv,$$ welches

die Hauptgleichung iſt, wodurch das Wachsthum der Bewegung allgemein ausgedrückt wird.

§. 2.

Aus dieſer Gleichung laſſen ſich mehrere Folgerungen herleiten, die uns lehren, wie die drückenden Kräfte ſowohl für ſich, als in Rückſicht ihrer Effekte betrachtet, zu ſchätzen und zu vergleichen ſind. Denn

ſezt man die Zeit dt in der vorigen Gleichung pdt = mdv beſtändig, ſo verhalten ſich die Elemente der Geſchwindigkeiten, (§. 12. 2.) die von den drückenden Kräften in unendlich kleinen Zeittheilen erzeugt werden, wie die durchlaufenen Räume. Sezt man alſo dy für das Element des Raums, oder für den unendlich kleinen Theil deſſelben, ſo geht die Verhältniß pdt = mdv in eine andere.

$$pdt = mdy$$ über,

woraus folgende Sätze, die zum Theil ſchon in der Vorleſung ausgeführt worden, und zu den erſten Grundlehren der Mechanik zu rechnen ſind, hergeleitet werden:

a) Wenn in gleicher Zeit ungleiche Maſſen von drückenden Kräften durch gleiche Räume bewegt werden, ſo verhalten ſich dieſe Kräfte wie die bewegten Maſſen. Denn in dieſem Fall ſind dt und dy beſtändig, und daher p = m. Denn hier ſieht man blos auf das Verhältniß der veränderlichen Größen; daher man die beſtändigen, mit Beybehaltung der veränderlichen, bey Seite ſetzen kann.

b) Sind hingegen in der Gleichung pdt = mdy die bewegten Maſſen gleich, ſo werden nur p und dy veränderliche Größen ſeyn: daher verhalten ſich die drückenden Kräfte, die in gleicher Zeit wirken, wie die Räume.

c) Sind ſowohl Räume als Maſſen ungleich; die Zeiten aber gleich; ſo verhalten ſich die drückenden Kräfte wie die Produkte aus den Maſſen in die durchlaufenen Räume, oder, welches einerley iſt, ſie ſtehen in der zuſammengeſezten Verhält-

niß aus der Verhältniß der Maſſen und der Verhältniß der Räume. Es iſt nämlich p = mdy.

d) Fragt man, unter welchen Bedingungen bey gleicher Zeit die drückenden Kräfte, was ihre Effekte betrifft, gleich ſind; ſo erhellet, daß in der Gleichung pdt = mdy, auſer der beſtändigen dt, die Größe mdy ebenfalls beſtändig ſey. Demnach muß ſich dy verhalten wie $\frac{n}{m}$, oder dy ſteht in beſtändiger verkehrter Verhältniß der bewegten Maſſe. Denn es iſt $pdt = mdy = \frac{mn}{m}$, daher p = n, d. i. p iſt eine beſtändige Größe, weil n unveränderlich iſt; daraus ſchließen wir, daß

die Preſſungen, die in verſchiedene Maſſen wirken, gleich ſind, wenn die in gleicher Zeit durchlaufenen Räume ſich umgekehrt verhalten wie die Maſſen.

c) Hieraus läßt ſich auch die Größe der Trägheiten beurtheilen. Denn wenn die Zeiten gleich ſind, ſo verhalten ſich die Trägheiten gerade wie die Preſſungen, und verkehrt wie die durchlaufenen Räume. Hierbey iſt aber zu merken, daß, wo auf den Raum geſehen wird, die Rede von augenblicklichen Preſſungen, nicht aber von ſolchen iſt, deren Wirkung eine Zeitlang fortdauert.

Zweyte Vorleſung.

Von der Schwere und den davon abhängenden Naturgeſetzen.

Inhalt.

§. 33. Schwere und Gewicht der Körper. §. 35. 36. Die Schwere wirkt, wie eine innere Kraft der Körper, gleichförmig in alle, auch die kleinſten Theilchen der Materie. §. 37 — 39. Der freye Fall der Körper ſtrebt beſtändig gegen den Mittelpunkt der Erde. §. 40. Die ſchweren Körper ſinken in vertikaler Linie zum Mittelpunkt der Erde. §. 41. 42. Methode, den Unterſchied der wahren Horizontallinie von der ſcheinbaren zu finden. §. 43. 44. Die Schwere verhält ſich in größern Entfernungen umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen. §. 45. Die von der frey wirkenden Schwere erzeugte Bewegung iſt eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung. §. 46 — 48. Fangen die Körper von der Ruhe an zu fallen, ſo verhalten ſich die Zeiten wie die Geſchwindigkeiten, und die Räume wie die Quadrate der Zeiten oder der Geſchwindigkeiten. §. 49. Mit der am Ende des Falls erlangten Geſchwindigkeit kann der doppelte Raum, wodurch der Körper gefallen, in gleicher Zeit mit gleichförmiger Bewegung zurückgelegt werden. §. 50. Die in den einzelnen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten ſich wie die ungeraden Zahlen. §. 51 — 57. Beym freyen Falle die Geſchwindigkeiten aus den Räumen, und umgekehrt dieſe aus jenen zu finden.

---

§. 33.

Die allgemeinen Eigenſchaften der drückenden Kräfte ſind in voriger Vorleſung erklärt worden. Diejenige Kraft aber, die man die

Schwere nennt, müſſen wir, weil ſie von der größten Wichtigkeit iſt, hier nur zuerſt betrachten. Dieſe iſt das Leben und die Seele der ganzen Mechanik, ſo wie auch der ganzen Natur. Damit aber deſto beſſer erhellt, was darunter zu verſtehen ſey, ſo laſſet uns die zweyte Figur betrachten, wo der Kreis GHI die Erde vorſtellt. Wir nehmen aber hier an, was wir unten, um keinen Cirkel in Beweiſen zu begehen, mit Beyſeitſetzung der hieſigen Sätze erweiſen werden, daß die **Erde rund iſt, und ihre Geſtalt für vollkommen kugelhaft gehalten werden kann.** Laſſet uns daher eine Materie, entweder innerhalb der Erde, oder in ihrer äuſern Oberfläche, oder ganz auſer ihr, z. B. in A gedenken; ſo lehren uns alle vorkommenden Erfahrungen, daß dieſe Materie ſtets und überall niederwärts gegen den Mittelpunkt der Erde gedrückt wird. **Dieſe verborgene Kraft, die zu jeder Zeit und an jedem Ort die Materie beſtändig niederwärts gegen den Mittelpunkt der Erde drückt, benennt man mit dem Namen der Schwere.** Dieſe drückt alſo allen Körpern in einer unendlich kleinen Zeit eine **gewiſſe Elementargeſchwindigkeit** ein, womit ſie ſich gegen die Erde herunter bewegen, §. 18. Und dieſe Elementargeſchwindigkeit iſt es, was wir das **Gewicht der Körper** nennen; folglich iſt das Gewicht der Körper einerley mit der **Elementar**- oder unendlich kleinen Geſchwindigkeit, womit ſie ſich mit allen ihren Theilen gegen den Mittelpunkt der Erde zu bewegen ſtreben. Iſt aber ein Hinderniß vorhanden, ſo wird der Effekt des Drucks entweder ganz, oder zum Theil vernichtet, ſo daß in den Körpern nichts als das bloße Beſtreben übrig bleibt; **und alsdann erſt**, wenn ſich

dies trifft, heißt der Effekt der Schwere: **das Gewicht der Körper.**

§. 34.

Die Unterſuchung der Natur und Beſchaffenh[eit] dieſer Kraft gehört in die Naturlehre. Wir behau[p]ten hier nur als ausgemacht, daß ſie ihre Wirkun[g] nicht allein auf der Oberfläche der Erde, im Innern derſelben, und iu den Gegenden zunächſt um dieſelbe; ſondern auch in den Planeten, und überall durch das ganze Weltgebäude äuſert, ſo weit wir, mit Hülſe der Erfahrung und darauf gebauten Kalkuls, die Geſetze der Natur verfolgen, und ihre geheimen Wirkungen aufſuchen können. Dies bewegt uns noch mehr, die Geſetze der Schwere deſto genauer zu erforſchen und einzuſehen, da ihr Nutzen in der Haushaltung der Natur ſo groß iſt, daß ſie ihr rechter Arm zu heiſen verdient.

§. 35.

Laßt uns hinzuſetzen, daß **dieſe drückende Kraft**, die wir die Schwere nannten, **innerhalb den Dingen, und überall in ihnen wahrgenommen wird;** ſie zeigt ſich nicht nur auf der Oberfläche der Körper, ſondern auch in ihren kleinſten Theilen. Dies iſt der Grund, warum im luftleeren Raume eine Flaumfeder ſowohl, als ein Goldſtück, d. i. der leichteſte Körder ſowohl, als der ſchwerſte, mit einer und derſelben Geſchwindigkeit zu Boden ſinken: denn alle kleinſten Theilchen der Körper werden mit gleicher Kraft von der Schwere getrieben. In freyer Luft aber kann dies nicht erfolgen: denn die Luft hindert die Bewegung der leichtern Maſſe mehr, der unter eben dem Umfang ſchwerern weniger. Die weitere Unterſu-

chung

chung dieſer Sache gehört in die Naturlehre. Laſſet uns wenigſtens dieſe Wahrheit, die wir im Folgenden zum Grunde legen wollen, aus dem Geſagten ſchließen: **das Gewicht, ſo von der Schwere in dem Körper hervorgebracht wird, iſt beſtändig ihrer Maſſe proportional.** Ein Körper alſo, deſſen Gewicht doppelt ſo groß iſt, enthält eine doppelte Menge Theilchen; iſt jenes dreymal ſo groß, ſo wird auch dieſe dreymal größer ſeyn u. ſ. f. Anders kann ſich es auch nicht verhalten, da die Schwere einen innern und gleichförmigen Druck auf alle kleinſten Theilchen der Körper äuſert, und zwar auf jedes beſonders, als wären ſie auf keine Art unter einander verbunden.

§. 36.

Dieſes höchſtwichtige Geſetz, daß **die Schwere eine innere Kraft der Körper iſt**, wollen wir, ſo viel möglich, deutlich erklären. Wenn z. B. ein Stück Wachs 20 mal leichter iſt, als ein gleich großes Stück Gold, (wie man insgemein annimmt;) ſo folgt auch, daß die Maſſe des Wachſes, wenn ſie der Maſſe des Goldes gleich, d. i. wenn beyder Gewicht einerley ſeyn ſoll, einen 20 mal größern Raum, als das Gold, einnehmen muß. Wäre nun die Schwere eine Kraft, die auf den Körper in der äuſern Oberfläche wirkte, ſo würde 1 lb. Wachs in jedem Augenblick mit einer 20 mal größern Kraft gegen den Mittelpunkt der Erde getrieben werden, als 1 lb. Gold, wegen der 20 mal größern Oberfläche des Wachſes, worauf die Schwere wirkt. Daher müßten auch die ſchwerern Körper langſamer fallen, als die leichtern, dem doch alle Erfahrungen widerſprechen. Denn kein Körper ſinkt langſamer oder geſchwinder, als der andere, zu

Boden; die leichteſten und ſchwerſten fallen mit gleicher Geſchwindigkeit: und im luftleeren Raume herunter gelaſſen, begleiten ſie ſich einander zu den Seiten. Die Schwere wirkt alſo nicht nach dem Umfang; ſie wirkt im Innern des Körpers, und zwar in ſeine kleinſten Theile, die ſämmtlich für ſich getrieben werden: wäre dies nicht, ſo ließe ſich das, was wir geſagt haben, auf keine Weiſe zuwege bringen.

Anmerkung. Das Gewicht des Körpers bleibt einerley, wie auch ſeine Geſtalt und Oberfläche beſchaffen iſt. Daher wirkt die Schwere nicht im Verhältniß der Oberfläche. Die von der Schwere hervorgebrachte Geſchwindigkeit aber iſt einerley, wie auch das Gewicht des Körpers ſich ändert. Daher richtet ſich die Wirkung der Schwere in die einzelnen Theilchen weder nach dem ganzen Gewicht, noch nach der Oberfläche. Eben ſo wenig kann die Schwere, da ſie jedem kleinſten Theilchen gleiche Geſchwindigkeit mittheilt, im Verhältniß der Oberflächen dieſer Theilchen wirken; wo nicht vielleicht ihre Oberflächen mit der von der Schwere zu bewegenden Materie beſtändig einerley Verhältniß haben. Demnach **iſt es ausgemacht, daß ſich die Schwere nicht nach den Oberflächen richtet; ob ſich aber daraus ſicher ſchließen läßt, daß ſie auch nicht auf die Oberflächen der kleinſten Theilchen wirkt,** wag ich nicht zu behaupten. Denn dieſe ſcheinen mir ſehr verſchieden zu ſeyn. (T.)

§. 37.

Die Schwere drückt eben ſo, wie die übrigen drückenden Kräfte, (§. 18. 19.) durch ihre Wirkung,

den

den Körpern Bewegung ein, wo nicht ihr Elementareffekt in jedem Augenblick von einem Hinderniſſe vernichtet wird. Iſt aber dieſe Bewegung erzeugt worden, ſo ſagen wir: die Körper fallen; dieſen freyen Fall und die Geſetze deſſelben wollen wir unterſuchen. Um ſie aber deſto füglicher aus einander zu ſetzen, wollen wir folgendes voraus ſchicken:

1.) Die **Horizontallinie** iſt eine Linie AF, deren Punkte vom Mittelpunkt der Erde alle gleichweit entfernt ſind.

2.) Die **Vertikallinie** iſt jedes Loth auf die Horizontallinie, wie BT, CT.

§. 38.

Da in großen Kreiſen ein Stück der Tangente AC vom Kreisbogen wenig abweicht, ſo läßt ſich hier dieſe Tangente als ganz mit dem Bogen zuſammenfallend betrachten, ſo daß dieſer und jene eine und dieſelbe gerade Linie ausmachen. Daher pflegt auch die Tangente AC die **Horizontallinie**, und zwar die **ſcheinbare**, zum Unterſchied von der **wahren**, AF, zu heißen.

So heißen auch die auf die ſcheinbare Horizontallinie ſenkrechten Linien ED, AE, ſcheinbare **Vertikallinien**: die auf die **wahre** Horizontallinie ſenkrechten, BT, CT aber, **wahre Vertikallinien**.

§. 39.

Aus §. 37. 38. folgt:

1.) Die wahre Horizontallinie iſt der Umfang oder ein Bogen eines Kreiſes, deſſen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde iſt.

2.) Die wahren Vertikallinien ſind, ſo weit es nöthig iſt, verlängerte Durchmeſſer der Erde.

3.) In geringen Entfernungen kann man ſowohl die ſcheinbare **Horizontal**: als die ſcheinbare **Ver**tikallinie an die Stelle der **wahren**, ohne merklichen Irrthum ſetzen. Die **wahren Vertikallinien** lauſen zwar im Mittelpunkt der Erde zuſammen; aber der halbe Erddurchmeſſer iſt ſo groß, daß man den Winkel ATD, wenn die Entfernung des Punkts D von A gering iſt, für nichts, und daher die Linien AT, DT für gleichlaufend halten kann.

§. 40.

Die Oberfläche der Erde iſt zwar rauh und ungleich; aber deſto genauer findet man die Horizontallinie in der Oberfläche des Waſſers. Daher kann auch die **Horizontallinie** mit Recht die **waſſerrechte** Linie heißen. Ja daraus, daß die ſchweren Körper auf das Waſſer ſenkrecht niederfallen, erkennen, und werden wir erſt wirklich überzeugt, daß ihr Fall in vertikaler Linie geſchieht, die folglich ein **Loth auf die Oberfläche des Waſſers** heißen wird.

§. 41.

Da wir von dem Unterſchiede der **wahren** u. **ſcheinbaren** Horizontallinie ſchon einiges beygebracht haben; ſo laſſet uns wegen dem, was unten geſagt werden ſoll, dieſe Sache hier weiter ausführen. Wir ſehen aber leicht, daß in großen Entfernungen der Unterſchied der Tangente AC, und des Bogens AF ziemlich merklich wird. So iſt z. B. der Punkt C von der wahren Horizontallinie um die Linie CF entfernt. Dieſen Unterſchied findet man aber aus dem bekannten halben Erddurchmeſſer. Es ſey AF ein Bogen vom Umfang der Erde, ſo wird ſeyn

$$CK \cdot CF = AC^2.$$

FC wird aber in den Weiten, in welchen wir dieſen Unterſchied beſtimmen können, allemal ein unendlich kleiner Theil der Linie KF oder des Erddurchmeſſers ſeyn; daher kann man ſetzen CK = FK, und folglich

$$FK.\ CF = AC^2,\ \text{oder}\ \frac{AC^2}{FK} = CF,$$

welches die geſuchte Linie iſt; denn ſie iſt der Unterſchied der im Punkt C begränzten ſcheinbaren Horizontallinie von der wahren im Punkt F.

§. 42.

Die Art und Weiſe, nach welcher der Erddurchmeſſer gefunden wird, wollen wir in den geographiſchen Vorleſungen erklären. Wir haben ſeine Länge 6538594 franzöſiſche Toiſen angenommen, und folgende Tafel verfertigt, die, wenn die Länge der ſcheinbaren Horizontallinie nicht über 1000° geht, für vollkommen richtig gehalten werden kann, obgleich eigentlich der Erddurchmeſſer $\frac{1}{464}$ ungefähr länger iſt, als wir in unſerer Rechnung angenommen haben. Der Fuß iſt in 12 Zoll getheilt:

Länge der ſcheinbaren Horizontallinie.	Unterſchiede CF.			
Ruthen.	Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien.
50	0.	0.	0.	$\frac{1}{3}$
100	0.	0.	0.	$1\frac{1}{3}$
150	0.	0.	0.	3
200	0.	0.	0.	$5\frac{1}{3}$
250	0.	0.	0.	$8\frac{1}{3}$
300	0.	0.	1	0

Länge der ſcheinbaren Horizontallinie.	Unterſchiede CF.			
Ruthen.	Ruthen.	Fuß.	Zoll.	Linien.
350	0.	0.	1	$4\frac{1}{3}$
400	0.	0.	1	$9\frac{1}{3}$
450	0.	0.	2	3
500	0.	0.	2	9
550	0.	0.	3	6
600	0.	0.	4	0
650	0.	0.	4	8
700	0.	0.	5	4
750	0.	0.	6	3
800	0.	0.	7	1
850	0.	0.	7	$11\frac{1}{2}$
900	0.	0.	8	11
950	0.	0.	10	0
1000	0.	0.	11	0

Man ſieht zugleich ohne Mühe, wie dieſe Tafel weiter, und ſo weit als man will, fortzuſetzen iſt. Denn da $FC = \frac{AC^2}{FK}$, und FK beſtändig iſt, indem nur AC^2 und FC ſich ändern; ſo wird ſich FG beſtändig wie AC^2 verhalten, oder die Unterſchiede der ſcheinbaren und wahren Horizontallinien werden ſich unter einander verhalten wie die Quadrate der ſcheinbaren Horizontallinien.

§. 43.

In der **Naturlehre** wird folgendes, wovon wir den Grund in dieſer Vorleſung ſelbſt legen, erwieſen: **die Schwere nimmt auſerhald der Erde umgekehrt zu und ab, wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde.** Um dieſes deutlicher einzuſehen, ſey T (Taf. I. Fig. 2.) der Mittelpunkt der Erde, LT eine Entfernung vom Mittelpunkt; AT 3 mal ſo groß als LT, ſo wird ſich die Schwere in L zur Schwere in A umgekehrt verhalten, wie TL^2 zu TA^2, oder wie 9 : 1, d. i. der Druck der Schwere in A iſt nur $\frac{1}{9}$ des Drucks in L. Wäre AT = 4 TL, ſo würde die Schwere in A, $\frac{1}{16}$ der Schwere in L ſeyn, oder die Schwere in L würde ſich zu der in A verhalten, wie 16 : 1. Daraus folgt, wenn der Fall der Körper durch die Linie AM geſchieht, die, mit AT oder MT verglichen, für nichts zu achten, daß durch den ganzen Fall $\frac{1}{AT^2} = \frac{1}{MT^2}$, und der Druck der Schwere durch dieſe ganze Linie überall einerley und gleichförmig iſt. In jedem in der Mechanik vorkommenden Beyſpiele, ja wo nur immer die Schwere in der Ausübung ſich anwenden läßt, verſchwindet die Linie AM gegen die Linie AT, oder gegen die ganze Entfernung vom Mittelpunkt der Erde. **Daher iſt auch in jeder Höhe, wodurch die ſchweren Körper in unſern Gegenden fallen, der Druck der Schwere überall durch den ganzen Fall für gleichförmig zu halten.** Demnach läßt ſich **die Schwere**, wie ſie in unſern Gegenden iſt, **richtig als eine Kraft beſtimmen, die in jedem Augenblick den Körpern glei-**

chyes

ches Beſtreben mittheilt, oder als eine in jedem Augenblick gleichförmig wirkende Kraft. So nehmen wir ſie in der Maſchinenlehre, und wo nur von Wirkungen der Schwere in unſern Gegenden die Rede iſt, an: zu der andern Hypotheſe, daß ſich die Schwere verkehrt verhält wie die Quadrate der Entfernungen, werden wir erſt bey Unterſuchung der in größern Weiten von der Erde vorgehenden Bewegungen in der Natur zurückkehren.

§. 44.

Auſer dieſen beyden Hypotheſen, wovon die eine die Schwere in unſern Gegenden unveränderlich annimmt, und die andere, daß ſie ſich verkehrt verhalte, wie die Quadrate der Entfernungen, giebt es unter den unzähligen, von den Schriftſtellern der Mechanik und Naturlehre über die Schwere ausgedachten, ſonſt keine, die mit der Natur übereinſtimmen. Aeuſſerſt groß iſt auch daher ihr Nutzen. Laßt uns aber die Bemühungen nicht für ganz unnütz halten, die die Geometer auf Entdeckung anderer Hypotheſen mit vielem Witz und Scharfſinn verwendet haben. Denn es kommen in der Natur verwickeltere Erſcheinungen vor, wo zugleich mehrere Urſachen zuſammen kommen, die einzuſehen und zu erklären, die bekannten Geſetze der Schwere nicht hinreichen. Und hier iſt es, wo uns auch andere Hypotheſen zu ſtatten kommen.

Anmerkung. Hieher können wir die meiſten Erſcheinungen rechnen, die man unter dem Namen der Anziehungen zu begreifen pflegt, wie auch faſt alle, die man an den kleinſten Körpern bemerkt. Denn in einigen iſt es ſogleich offenbar, daß die Kräfte andern

Geſetzen,

Geſetzen, als die Schwere, folgen. Z. B. zieht der Magnet in einiger Entfernung das Eiſen; aber faſt unendlich größer iſt dieſe Wirkung in dem Punkte ſelbſt, da das Eiſen den Magneten berührt. Ein ſicheres Kennzeichen, daß die anziehende Kraft des Magneten weder gleichförmig, noch in verkehrter Verhältniß der Quadrate der Entfernungen wirkt, wie aus den Erklärungen im zweyten Zuſatz leicht geſchloſſen wird. Hier verdient Keil in Tentam. medico-phyſic. Tent. 4. de Secretione, verglichen zu werden. (T.)

§. 45.

Die Bewegung, die von der Schwere in unſern Gegenden hervorgebracht wird, d. i. der Fall der ſchweren Körper, heißt: **gleichförmig beſchleunigte Bewegung**, von welcher Benennung der Grund darinn liegt, weil die Geſchwindigkeit, womit die ſchweren Körper fallen, mit der Zeit in gleichem Verhältniß wächſt und zunimmt. Denn wir nehmen an, daß der Effekt der Schwere von keinem äuſern Hinderniſſe vernichtet wird; folglich wird die im erſten Augenblick in dem Körper erzeugte Geſchwindigkeit in ihm verbleiben. §. 8. 19. Da aber im zweyten Augenblick eine gleiche Geſchwindigkeit von der zweyten Reizung der Schwere eingedrückt wird, und dieſe zugleich mit jener im Körper bleibt, und eben ſo von der dritten Wirkung der Schwere eine dritte erzeugt wird, ſo iſt klar, (§. 43.) daß **beym Falle ſchwerer Körper die Geſchwindigkeiten ſich beſtändig verhalten, wie die Zeiten.**

§. 46.

Diejenigen, ſo auf das, was im vorhergehenden geſagt worden, nicht aufmerkſam genug geweſen, werden

werden ſich vielleicht einbilden, daß wir, indem wir die Schwere in unſern Gegenden gleichförmig wirken laſſen, dieſes nur als Hypotheſe ohne Grund annehmen. Wir geben zwar gern zu, daß in der Mechanik und Naturlehre keine Grundſätze ohne Beweis als Wahrheiten anzunehmen ſind: erinnern aber zugleich, daß dieſe unſere Behauptung ſchon §. 43. erwieſen worden, des aus der Erfahrung hergeleiteten Beweisgrundes zu geſchweigen, den wir im folgenden erklären werden. Denn daß die Schwere im verkehrten Verhältniß der Quadrate der Entfernungen wirkt, iſt ausgemacht, und unten werden wir es, unabhängig von den hieſigen Sätzen, erweiſen. Dieſes aber vorausgeſezt, folgt nach §. 43., daß ſie auch in unſern Gegenden, und zwar in den geringen Höhen, wodurch die Körper bey uns fallen, gleichfömig wirkt. Denn genau von der Sache zu reden, muß das Geſetz, wornach die Schwere in unſern Gegenden wirkt, erſt aus dem Geſetz, wornach ſich dieſe Kraft in den Planeten richtet, geſchloſſen werden.

Anmerkung. In der vierten Vorleſung werden die Geſetze der Schwere aus der Erfahrung beſtätigt. (T.)

§. 47.

Hieraus folgt auch, daß beym Fall mehrerer Körper, die vom Anfang bis zu Ende des Falles zurückgelegten Raume ſich verhalten wie die Quadrate der Zeiten, oder wie die Quadrate der durch den Fall erlangten Geſchwindigkeiten. Denn das leztere Verhältniß iſt mit dem erſtern eines und daſſelbe, weil die Geſchwindigkeiten und Zeiten ſich einerley verhalten. §. 45.

Im

Im Dreyeck EFG (Taf. I. Fig. 3.) deute die Linie EF die Zeit an; der Anfang des Falles geſchieht in E, der durch die Zeit EF dauert, und in F ſich endigt. Die in den Zeiten Ea und EF erlangten Geſchwindigkeiten laſſen ſich durch die gleichlaufenden Linien ab und FG vorſtellen. (§. 45.) Daher, weil in jedem Zeitpunkte, oder unendlich kleinen Zeittheilchen, die Bewegung gleichförmig iſt, (§. 35.) werden ab und cd gleich ſeyn; wenn ca ein ſolches Zeittheilchen iſt, und abcd wird ein Parallelogramm ſeyn, weil die Linie ab der cd unendlich nahe und gleichlaufend iſt. Dieſes Parallelogramm aber drückt den in der Zeit ca, oder vielmehr in einem Elemente der Zeit durchlaufenen Raum aus, und iſt das Produkt aus der Zeit in die Geſchwindigkeit multiplicirt. (§. 13.) Man theile alſo die ganze Zeit in ſolche kleine Zeittheilchen, ſo iſt klar, daß auch zugleich das ganze Dreyeck EFG in unendlich kleine Parallelogrammen, wie abcd, getheilt wird: und daher der in der Zeit Ea zurückgelegte Raum wie das Dreyeck Eab; ſo wie der in der Zeit EF durchlaufene Raum, wie das Dreyeck EFG ſich verhält. Folglich werden die in den Zeiten Ea und EF zurückgelegten Räume ſich gegen einander verhalten, wie die Dreyecke Eab und EFG. Dieſe Dreyecke aber ſind ähnlich, denn es iſt ab parallel mit FG, und ähnliche Dreyecke verhalten ſich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten: Demnach verhält ſich das Dreyeck Eab zu EFG, d. i. die in den Zeiten Ea und EF zurückgelegten Räume, wie Ea^2 zu EF^2, oder wie die Quadrate der Zeiten, und folglich wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten.

§. 48.

Hieraus folgt auch, daß ſowohl die Zeiten als die Geſchwindigkeiten ſich unter einander verhalten wie die Quadratwurzeln der Räume, in welchen die Geſchwindigkeiten verlangt worden ſind.

§. 49.

Ferner wird in eben der Zeit, wo mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung der Raum A zurückgelegt wird, mit gleichförmiger Bewegung ein doppelt ſo großer Raum 2 A mit der am Ende des Falls erlangten Geſchwindigkeit FG zurückgelegt werden. Denn der mit gleichförmig beſchleunigter Bewegung durchlaufene Raum verhält ſich wie das Dreyeck EFG. §. 47. Nun wär aber in eben der Zeit EF, mit der unveränderlichen Geſchwindigkeit FG, ein Raum zurückgelegt worden, der ſich wie das Parallelogramm EFGH, von gleicher Grundlinie und Höhe mit dem Dreyeck, verhält. Denn die mit gleichförmiger Bewegung durchlaufenen Räume verhalten ſich wie die Zeiten in die Geſchwindigkeiten multiplicirt. §. 13. Demnach muß nothwendig dieſer Raum doppelt ſo groß als der erſte ſeyn.

§. 50.

Weiter folgt, daß die vom Anfang des Falles in gleichen auf einander folgenden Zeiten zurückgelegten Räume ſich verhalten wie die ungeraden Zahlen: 1. 3. 5. 7. 9. 11. u. ſ. f. Denn ſezt man den im erſten Momente durchlaufenen Raum = 1. ſo wird der in 2 gleichen Momenten zurückgelegte = 4 ſeyn; §. 47. der in 3 Momenten durchlaufene

laufene = 9; der in 4 Momenten = 16. u. ſ. w. Zieht man daher die vorhergehenden Glieder von den nachfolgenden ab, ſo ſind

die Zeiten	=	1.	2.	3.	4.	5.	6. ꝛc.
die in den ganzen Zeiten zurückgelegten Räume	=	1.	4.	9.	16.	25.	36. ꝛc.
daher die in den einzelnen Momenten durchlaufenen Räume	=	1.	3.	5.	7.	9.	11. ꝛc.

§. 51.

Wir wiſſen, daß ein freyfallender Körper in einer Zeitſekunde $15\frac{1}{12}$ Pariſer oder $15\frac{1}{2}$ Däniſche Fuß zurücklegt, wenn man das Verhältniß dieſes zu jenen wie 7017 : 7200 annimmt. Die Gründe, woraus man dieſes ſchließt, werden wir unten erklären. Es ſey alſo der in einer Sekunde durchlaufene Raum 15′, ſo findet man leicht die Größe des in einer gegebenen Zeit t zurückgelegten Raums. Denn es iſt

$$1 : 15' = t^2 : 15t^2. \text{ §. } 47.$$

Man multiplicire alſo das Quadrat der Zeit durch 15′, ſo findet man den im Fallen durchlaufenen Raum in Fußen ausgedrückt.

§. 52.

Hieraus ſchließt man, daß die Geſchwindigkeit, die ein Körper erlangt, wo ſie nicht von der Luft vermindert wird, in kurzer Zeit ungemein wächſt. Denn es ſey die Zeit 1 Minute oder 60″, ſo iſt der in dieſer Zeit zurückgelegte Raum = 3600″, 15′ oder 54000′. Enthält nun eine Meile 3000 geometriſche

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK AUGSBURG

Fuß, deren jeder 5 Pariſer gleich iſt, alſo 15000 Pariſer Fuß, ſo wird ein ſchwerer Körper in einer Minute durch einen Raum von $3\frac{3}{5}$ Meilen fallen.

§. 53.

Aus der bekannten Größe des in dieſem oder jenem Theile der Zeit zurückgelegten Raums finden wir auch leicht die in andern gleichgroßen Zeittheilen zurückgelegten Räume, und zwar aus der Verhältniß der ungeraden Zahlen

1. 3. 5. 7. 9. ꝛc. §. 50.

Denn es ſey der in einem Zeittheile durchlaufene Raum = a; ſo wird der in dem unmittelbar darauf folgenden gleichen Zeittheile durchlaufene Raum 3a, im dritten Zeittheile 5a ꝛc. ſeyn. Sind daher im erſten Zeittheile 15′ zurückgelegt worden; ſo werden im zweyten 45′, im dritten 75′ ꝛc. zurückgelegt werden.

§. 54.

Eben ſo wird aus dem in der Zeit t zurückgelegten Raum der in einer andern Zeit d vom Anfang des Falles durchlaufene Raum gefunden. Es ſey dieſer Raum = x, ſo bekommen wir

$$a : x = t^2 : d^2 \quad §. 47.$$

$$\frac{ad^2}{t^2} = x.$$

§. 55.

Wir wiſſen, wie die Räume aus den gegebenen Zeiten zu finden ſind. Dieſes iſt aber bey Berechnungen, wo die Theorie der Schwere in Ausübung

zu

zu bringen iſt, und in der Maſchinenlehre bey weitem nicht hinreichend. Wir müſſen die Geſchwindigkeiten mit den Räumen, und mit beyden die Zeiten zu vergleichen wiſſen. Allgemein iſt hier zu merken, daß, wenn wir einen deutlichen Begriff ſowohl von der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, als der durch dieſe Bewegung erlangten Geſchwindigkeit haben wollen, dieſe am Ende des Falles erlangte Geſchwindigkeit ſo beſtimmt werden muß, daß man weiß, wie viel Fuß der gefallene Körper in einer Zeitſekunde mit dieſer Geſchwindigkeit zurücklegen kann. Auſer dieſem haben wir keinen deutlichen und nützlichen Begriff von der Geſchwindigkeit. Wir wollen dieſes durch Beybringnng der vornehmſten und nützlichſten hieher gehörigen Beyſpiele erläutern, wobey nicht allein das Verhältniß der Größen gegen einander, ſondern auch ihre wirkliche Größe in Betracht kommt.

§. 56.

Man fragt z. B. was für eine Geſchwindigkeit der durch den Raum R gefallene Körper am Ende des Falles erlangt hat, d. i. wie viel Fuß er in gleichförmiger Bewegung mit dieſer Geſchwindigkeit in einer Sekunde durchlaufen kann?

Dieſe Aufgabe aufzulöſen, iſt zu merken, daß die Einheit, die wir zum Maaße brauchen, und womit alle Größen verglichen werden müſſen, aus den Erfahrungen, nach welchen ein von der Schwere getriebener Körper in der erſten Sekunde durch 15 Pariſer Fuß fällt, geſchloſſen wird. Dieſe Größe kann in der Ausübung als genau angenommen werden; und man hat nicht zu fürchten, daß ſie zu klein iſt,

 weil

weil die, der Bewegung widerſtehende Luft ſelbige allemal um etwas vermindert.

Mit dieſen Erfahrungen dasjenige, was §. 49. geſagt worden, verbunden, erkennen wir, daß ein durch 15′ gefallener Körper eine Geſchwindigkeit $= 30'$ erlangt: denn ſo groß iſt ſie, daß der damit verſehene Körper 30′ in Zeit von einer Sekunde zurücklegen kann.

Dieſes vorausgeſezt, iſt dieſe Auflöſung leicht. Denn da die Geſchwindigkeiten am Ende des Falls ſich verhalten wie die Quadratwurzeln der Räume, ſo laſſet uns die geſuchte Geſchwindigkeit x nennen, und es wird ſeyn

$$\sqrt{15} : 30 = \sqrt{R} : x, \text{ und } x = \frac{30.\sqrt{R}}{\sqrt{15}} = \sqrt{(2.30.R.)}$$

daher $x = \sqrt{(60.R)}$; woraus dieſe Regel geſchloſſen wird: **Die Geſchwindigkeit, die der Körper im Fall durch die Höhe R erlangt, wird durch den Raum, den der damit verſehene Körper mit gleichförmiger Bewegung in Zeit von einer Sekunde zurücklegen kann, ausgedrückt gefunden, wenn die Höhe R mit 60 multiplicirt, und aus dem Produkt die Quadratwurzel ausgezogen wird.**

Z. B. falle ein Körper durch 400′, ſo iſt die erlangte Geſchwindigkeit $= \sqrt{(400.60)} = \sqrt{24000}$, oder beynahe 155 Pariſer Fuß.

§. 57.

Auch wird aus der gegebenen Geſchwindigkeit, womit ein Körper in gleichförmiger Bewegung in einer

ner Sekunde fortrückt, die Höhe des Falles gefunden, wodurch er ſie hätte erlangen können.

Hier wird eben die Einheit wie oben gebraucht, nämlich 15 Pariſer Fuß in einer Sekunde durchzulaufen. Es ſey die gegebene Geſchwindigkeit H, der Raum des Falles, wodurch ſie erlangt wird, x; da die im Fall durch 15 Pariſer Fuß erlangte Geſchwindigkeit 30′ iſt, und hier eben ſo, wie in voriger Aufgabe, die Geſchwindigkeiten am Ende des Falls ſich verhalten wie die Quadratwurzeln der Höhen, ſo wird

$$30 : \sqrt{15} = H : \sqrt{x}, \text{ daher } x = \frac{H^2}{60}, \text{ woraus}$$

folgende Regel hergeleitet wird:

Die in Fußen ausgedrückte Höhe des Falles, wodurch die gegebene Geſchwindigkeit erlangt wird, wird gefunden, wenn man das Quadrat der Geſchwindigkeit durch 60 dividirt.

Z. B. ſey die Geſchwindigkeit, womit ein Körper am Ende des Falls ſich gleichförmig fortbewegt, $\sqrt{24000}$; man fragt nach der Höhe des Falles? Es erhellt, daß ſelbige $= \frac{24000}{60}$ oder 400 Fuß.

Dergleichen können mehrere, das Verhältniß der Zeit zum Raum und Geſchwindigkeit betreffende, hinzugefügt werden. Weil ſie aber von mindern Nutzen ſind, wollen wir uns für diesmal dabey nicht aufhalten.

Zweyter Zuſatz.

Allgemeine Bewegungslehre, nebſt Anwendung auf die geradlinigte Bewegung, und Berechnung beſonderer in der freyen geradlinigten Bewegung vorkommenden Fälle.

Inhalt.

§. 3 — 5. Allgemeine Gleichung für Beſchleunigung, Geſchwindigkeit und Zeit. §. 6. 7. Gleichung für die Kräfte, Räume und Geſchwindigkeiten. §. 8. Mittelpunkt der Kräfte. §. 9 — 14. Anwendung jener Gleichungen, die gegebenen Geſchwindigkeiten durch Räume in Fußen ausgedrückt zu finden, die bey unveränderlicher Beſchleunigung in einer Sekunde durchlaufen werden können. §. 15 — 18. Weitere Anwendung, die Zeiten zufinden; Gebrauch der den Geſchwindigkeiten zugehörigen Höhen, ſtatt der Geſchwindigkeiten ſelbſt. §. 19. Von einer gleichförmig beſchleunigenden Kraft erzeugte Bewegung, bey ſchon im Anfang des Falles vorhandener Geſchwindigkeit. §. 20. Bewegung, wenn ſich die Kräfte umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt. §. 21. Desgleichen, wenn ſich die Kräfte verkehrt verhalten, wie die Potenzen n der Entfernungen. §. 22. Insbeſondere, wenn ſich die Kräfte gerade verhalten wie die Entfernungen vom Mittelpunkt. Dieſe Bewegung iſt bey einerley Kräften allemal gleichzeitig: bey ungleichen Kräften aber verhalten ſich die Zeiten verkehrt, wie die Quadratwurzeln der Centralkräfte. §. 23. Verhält ſich die Schwere umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen; ſo verhalten ſich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Entfernungen. §. 24 — 27. Allgemeine Hypotheſen über die Eigenſchaften der Bewegung. §. 28. 29. Methode, die Kräfte aus einigen gegebenen Eigenſchaften der Bewegung zu finden.

§. 3.

§. 3.

Auf dem bisher erklärten beruht alles, was zum Verſtand und Berechnung der freyen geradlinigten Bewegung der Körper nöthig iſt. Die Sache wird keine Schwierigkeit haben, wenn wir nur auf folgendes aufmerkſam ſind:

In ſämmtlichen hieher gehörigen Aufgaben kömmt es darauf an, daß entweder die Geſchwindigkeit der Bewegung, oder die Zeit, oder der Raum gefunden wird, der in der freyen Bewegung zurückgelegt wird. Man erinnere ſich daher der oben erklärten allgemeinen Grundſätze, die mit Aenderung der nach den verſchiedenen Umſtänden verſchiedentlich zu beſtimmenden veränderlichen Größe, ſich auf jeden Fall anwenden laſſen. Die erſte Grundgleichung war: $pdt = mdv$. Dieſe deutet das Verhältniß zwiſchen der drückenden Kraft, der Zeit, worinn ſie wirkt, und der Geſchwindigkeit an, die von der wirkenden Kraft entweder hervorgebracht oder zerſtört wird. Auſer dem Verhältniß der Größen aber wird durch $pdt = mdv$ nichts angedeutet; da aber die Wirkungen ihren Urſachen gleich ſind; ſo muß nothwendig dieſe Gleichheit auch ausgedrückt werden. Laſſet uns daher ſetzen $npdt = mdv$; ſo muß n eine überall beſtändige Größe ſeyn, die einmal durch Erfahrung zu beſtimmen iſt, und dann in jedem Falle überall einerley bleibt.

§. 4.

Die Gleichung $npdt = mdv$ läßt ſich in folgende verwandeln: $dv = \frac{npdt}{m}$. Daher $\frac{p}{m}$ der Ausdruck der Beſchleunigung. Denn p iſt der ganze

Druck, den die Materie oder die Trägheit empfängt; daher bedeutet auch $\frac{p}{m}$ den Effekt, den dieſe Kraft in den einzelnen Punkten der Materie hervorbringt. Nimmt man ſtatt des Drucks überhaupt die Schwere, die eine Gattung des Drucks iſt, und auf ähnliche Art wirkt; ſo wird $\frac{p}{m}$ einerley ſeyn mit dem Gewicht der einzelnen Theilchen im Körper, deſſen Urſache die Schwere iſt. Und da das Gewicht des Körpers beſtändig ſeiner Maſſe entſpricht, ſo erhellt, wenn von der Schwere die Rede iſt, daß $\frac{p}{m}$ einerley mit p, und die Maſſe auſer Acht gelaſſen werden kann. §. 35. Vorl. Daher kann man hier auch die Maſſe als einen Punkt betrachten.

§. 5.

Laßt uns nun den Nutzen hiervon in der Unterſuchung der Verhältniß der Geſchwindigkeit und des Raums ſehen, wenn die Schwere als eine drückende Kraft, oder auch eine andere, die, eben ſo wie die Schwere in unſern Gegenden, gleichförmig wirkt, angenommen wird. Es iſt daher $\frac{p}{m}$ eine gewiſſe beſtändige Größe; da ſich in andern Fällen p auch durch unveränderliche algebraiſche oder tranſcendente Größen angeben läßt. Setzen wir daher $\frac{p}{m} = g$, ſo geht die Gleichung $\frac{npdt}{m} = dv$ in folgende über:

$$ngdt = dv,$$

welcher

welcher Fall der einfachſte, und vor den übrigen der nützlichſte iſt.

§. 6.

Um aber auch das, was den durch die Bewegung zurückgelegten Raum betrifft, aus der gegebenen Gleichung herzuleiten, iſt noch eine andere Gleichung nöthig, wo die Geſchwindigkeit durch den in einer unendlich kleinen Zeit zurückgelegten Raum gegeben wird. In einer ſehr kleinen Zeit aber iſt die Geſchwindigkeit unveränderlich, folglich verhält ſich der Raum, wie die Geſchwindigkeit in die Zeit multiplicirt. Iſt alſo v die Geſchwindigkeit, dt die Zeit, und dy der in der Zeit dt zurückgelegte Raum, ſo wird

$$dy = vdt.$$ §. 13. Vorl.

Anmerkung. Da die Gleichung $dy = vdt$, woraus $y = S. vdt$, die allgemeinſte iſt von deren, wodurch das Verhältniß des Raums zur Geſchwindigkeit und Zeit ausgedrückt wird; ſo kann die Geſchwindigkeit v überhaupt als eine Function, welcher Größen man will, entweder **algebraiſcher** veränderlicher oder unveränderlicher, oder **tranſcendenter**, oder verwickelter, die andere nicht integrable Größen enthalten, oder endlich Exponentialgrößen angenommen werden; kurz, v kann eine Function von Größen jeder Gattung ſeyn, wovon wir nur in der Analyſis einen Begriff haben. Doch iſt zugleich die allgemeine Gleichung in Beſtimmung beſonderer Fälle von keinem oder geringen Nutzen, wo nicht S. vdt ſich entweder integriren, oder wenigſtens durch integrable Größen verzeichnen läßt.

Auch

Auch haben diejenigen Gleichungen keinen groſſen Nutzen, die auf mechaniſcher Verzeichnung nicht integrabler Functionen beruhen, wo eine unendliche Menge Punkte beſtimmt werden müſſen. Bey dieſer Gelegenheit will ich den in mechaniſchen Schriften vorkommenden **Ort** oder **Scale der Geſchwindigkeiten** kürzlich erklären: Dieſe **Scale** iſt eine **krumme** oder **gerade Linie**, wie ADL, (Taf. II. Fig. 2.) in welcher $dy = vdt$, wo die **Axe** AB die **Zeiten**, ſo wie die **Ordinaten** BD, CE die ſtets ſich ändernden **Geſchwindigkeiten** v, der gegebenen Hypotheſe gemäß, vorſtellen. Hier wird BDEC $= dy$, d. i. der zurückgelegte **Raum**, der in dem Fall, da die **Fläche** der krummen Linie AED integrabel iſt, beſtimmt werden kann. Allgemein iſt zu merken, daß die krummen Linien, deren Ordinaten, Bogen, Flächen, oder jede andere in ſteter Ordnung auf einander folgende Theile, eine Reihe von Geſchwindigkeiten, Zeiten oder Kräften vorſtellen, die **Orte** dieſer Geſchwindigkeiten, Zeiten oder Kräfte zu heiſen pflegen. (**V.**)

§. 7.

Demnach iſt auch $\frac{dy}{v} = dt$. Daher $\frac{dy}{v}$ für dt in der Gleichung $ngdt = dv$, §. 5, geſezt, bekommen wir $ngdy = vdv$, und dieſe leztere Gleichung drückt das Verhältniß der Geſchwindigkeit zu dem durchlaufenen Raum aus. Bey jeden angenommenen Kräften aber wird überhaupt ſeyn $\frac{npdy}{m} = vdv$.

§. 8.

§. 8.

Hieraus läßt ſich nun dasjenige, was in beſondern Fällen, wo g eine beſtändige Größe iſt, ſtatt findet, leicht herleiten. Ehe wir aber zu dieſen ſchreiten, wollen wir den **Mittelpunkt** der Kräfte erklären. **Aeuſſert eine drückende Kraft ein beſtändiges Beſtreben gegen einen und denſelben Punkt** B, (Taf. I. Fig. 4.) wie die Schwere gegen den Mittelpunkt der Erde: ſo nennen wir dieſen Punkt den **Mittelpunkt der Kräfte.**

§. 9.

Es ſey alſo AB (Taf. I. Fig. 4.) die Linie, wodurch der Körper fällt, in B der Mittelpunkt der Kräfte, in A der Anfang des Falls, $Ad = x$, $de = dx$, und die drückende Kraft, oder die Schwere ſey beſtändig, und $= g$. So iſt nach §. 7. $ngdx = vdv$ (denn dy geht hier in dx über). Dieſer Differentialgleichung Integral aber iſt $ngx = \frac{1}{2} v^2 + B$; wo B beſtändig iſt, und daher beym Differentiiren aus der Gleichung wegfällt. Dieſe Größe B aber zu beſtimmen, iſt zu merken, daß in A, wo $x = 0$, auch $v = 0$; daher zugleich $B = 0$, denn es wird $0 = 0 + B$. Demnach findet man $ngx = \frac{1}{2} v^2$, wo nichts zu addiren.

Da auch ng und $\frac{1}{2}$ unveränderliche Größen ſind; ſo wird überall $x = v^2$, oder **die zurückgelegten Räume werden ſich verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten.** Was wir alſo für eine drückende Kraft annehmen, wenn ſie nur beſtändig iſt, ſie mag der Schwere gleich ſeyn, oder nicht; ſo wird die oben §. 47. **Vorl.** vorgetragene Regel, daß ſich

ſich die Räume verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, ſtatt haben.

§. 10.

Es iſt aber überhaupt $ngx = \frac{1}{2} v^2$, daher $v = \sqrt{(2ngx)}$; folglich verhält ſich die Geſchwindigkeit, die der fallende Körper am Ende des Falls erlangt, wie die Quadratwurzel der Höhe, oder des Raums, wodurch der Körper gefallen iſt. Denn es iſt $2ng$ eine beſtändige Größe, daher $v = \sqrt{x}$, d. i. v verhält ſich, wie $\sqrt{x}$. Sind die Beſchleunigungen ungleich, doch jede beſtändig, ſo erhellt

1.) daß v ſich verhält, wie $\sqrt{gx}$, d. i. das Verhältniß der in einer und derſelben Zeit von ungleichen, doch beſtändigen Beſchleunigungen erzeugten Geſchwindigkeit iſt aus dem Verhältnis der Quadratwurzeln der Räume, und den Quadratwurzeln der Beſchleunigungen zuſammengeſezt.

2.) Iſt v beſtändig, ſo iſt $x = \frac{1}{g}$, oder die Fallhöhen, wodurch die Geſchwindigkeiten erlangt werden, verhalten ſich verkehrt wie die beſtändigen Kräfte, von welchen die Geſchwindigkeiten erzeugt werden.

§. 11.

Soll aus der Gleichung $ngx = \frac{1}{2} v^2$, oder aus dieſer: $2ngx = vv$, und dem gegebenen x unmittelbar die Größe der wahren Geſchwindigkeit v gefunden werden, d. i. wie viel Fuß der Körper in Zeit von einer Sekunde mit dieſer Geſchwindigkeit in gleichförmiger Bewegung zurücklegen kann, ſo müſſen vorher aus der Erfahrung die Größen n und g in einem

gewiſſen

gewiſſen Falle beſtimmt werden. Hierzu dient das, was wir in der zweyten Vorleſung angeführt und bereits oben angewendet haben. Denn die freyfallenden, nicht gehinderten, ſchweren Körper, legen einen Raum von $15\frac{1}{12}$ Par. Fuß in Zeit von einer Sekunde zurück, welches genauer beſtimmt 15′ 1″ 8‴, und in zehntheiligen Brüchen ausgedrückt, beynahe 15,0976 Par. Fuß ſind. Die lezte Zahl kann gebraucht werden, wo jene Höhe genau beſtimmt werden muß; doch kann man ſich noch bequemer des Rheinländiſchen Fußmaaſes bedienen, weil alsdenn $\sqrt{g}$ ſich in einer ganzen Zahl angeben läßt. Denn verhält ſich der Rheinländiſche Fuß zum Pariſer wie 139 : 144, oder wie 1000 : 1035; ſo werden 15,0976 Par. F. = 15626 Rhein. F. ſeyn; wofür man ſetzen kann 15,625, wovon die Quadratwurzel genau der ganzen Zahl 125 gleich iſt. Man kann daher in der Gleichung $ngx = \frac{1}{2}v^2$ ſetzen $x = 15,625$; da ferner der mit der am Ende des Falls erlangten Geſchwindigkeit zurückzulegende Raum doppelt ſo groß iſt, als der Raum des Falles, wodurch dieſe Geſchwindigkeit erlangt wird, ſo wird $vv = (15.625)^2.4$. Daher $2ngx = (15.625)^2.4$. Hier iſt aber $x = 15.625$, daher $ng = 2.(15,625)$. Sezt man hier $n = 1$, ſo wird $g = 31,250$ Rhein. Fuß. Woraus erhellt, daß man in den vorigen Gleichungen ſtatt n die Einheit ſetzen kann, wenn nur dieſer Werth 31,250 für g überall beybehalten wird; welcher Werth den in einer Sekunde hervorgebrachten, und durch die Geſchwindigkeit in der gleichförmigen Bewegung beſtimmten Effekt der Schwere ausdrückt. Selten iſt es aber nöthig, dieſe Zahl ſo genau zu beſtimmen.

§. 12.

§. 12.

In den meiſten Rechnungen iſt es genug, wenn $ng = 30$ Pariſer, oder auch Däniſche Fuß geſezt wird, da beyder Unterſchied von keinem Betracht iſt. Demnach kann man ſetzen $n = 2$, $g = 15$, oder $n = 1$, $g = 30$, und es wird überall $v = \sqrt{60x}$. Es ſey $x = 40$, ſo iſt die Geſchwindigkeit $= \sqrt{2400}$ Fuß, die der Körper mit gleichförmiger Bewegung in Zeit von einer Sekunde zurücklegt. Iſt $x = 50$, ſo wird $v = \sqrt{3000}$ Fuß. Eben dieſes wird auch nach den Regeln §. 56. Vorl. gefunden.

§. 13.

Es erhellt überdies, wie man aus der gegebenen Geſchwindigkeit, den Raum oder die Höhe des Falles, wodurch dieſe Geſchwindigkeit erlangt wird, finden kann, und zwar kürzer, als nach den Regeln §. 57. Vorl. Denn dort befliſſen wir uns mehr der Deutlichkeit, als der Kürze. Weil $v = \sqrt{60x}$, ſo wird auch, $v = \sqrt{3000}$ geſezt, $3000 = 60x$, u. $x = 50$. Iſt $v = \sqrt{2400}$, ſo iſt auch $2400 = 60x$, und $x = 40$. Demnach dient einerley Gleichung, beyde Aufgaben §. 12. und 13. aufzulöſen.

§. 14.

Ein gleiches iſt in Anſehung der Zeit zu beobachten. Denn ſezt man $n = 1$, ſo iſt auch $gdt = dv$, und $gt = v$. Demnach erhält man aus der gegebenen Geſchwindigkeit, durch die Fuße ausgedrückt, die in einer Sekunde mit gleichförmiger Bewegung zurückzulegen ſind, die Zeit, worinn im freyen Fall dieſe Geſchwindigkeit erlangt wird. Setzet, wie vorhin, $2g = 60'$, ſo iſt $g = 30'$, und $30.t = v$. Iſt daher

daher die Geſchwindigkeit in der gleichförmigen Bewegung 30′, ſo wird t = 1″, iſt die Geſchwindigkeit 60, ſo wird t = 2″, iſt ſie 90′, ſo iſt t = 3″, und allgemein

1.) verhalten ſich bey unveränderlicher Schwere, die Zeiten wie die Geſchwindigkeiten.

2.) verhalten ſich bey ungleichen, doch gleichförmigen Beſchleunigungen, die Zeiten des Falles gerade wie die Geſchwindigkeiten, und verkehrt wie die Beſchleunigungen.

§. 15.

Auſer dieſen beyden §. 13. 14. gegebenen Gleichungen, wovon die eine das Verhältniß der Geſchwindigkeiten und des Raums, die andere der Zeit und Geſchwindigkeit ausdrückt, iſt noch die dritte, wo der Raum mit der Zeit verglichen wird, zu finden übrig. Dieſe wird in denjenigen Fällen von größtem Nutzen ſeyn, wo entweder der Raum aus der Zeit, oder dieſe aus jenem geſucht wird. Laſſet uns hier erinnern, was bereits §. 2. angemerkt worden, daß die Gleichung $\frac{p}{m} dt = dy$ nicht ſtatt hat, wenn durch p ein Druck verſtanden wird, der ſeine Wirkung eine Zeitlang fortſezt, ſondern nur, wo von augenblicklichem Druck die Rede iſt. Denn jene Regel iſt nur für die Elementarpreſſungen erfunden, die durch eine einzige Wirkung eine einfache, gleichförmige Bewegung hervorbringen. Wird aber der Druck fortgeſezt, ſo hängt die Größe des zurückgelegten Raums theils von der unmittelbaren Wir-

kung der drückenden Kraft, in jedem Zeittheilchen, theils von der eingepflanzten Geſchwindigkeit und Kraft ab, die durch die vorhergehenden Wirkungen der Materie bereits eingedrückt worden. Daher iſt die erlangte Geſchwindigkeit die Summe aller in den einzelnen Zeitelementen erzeugten Elementargeſchwindigkeiten. Die wahre Gleichung alſo, die ſich hier anwenden läßt, um das Verhältnis des Raums, der Zeit und der Geſchwindigkeit daraus zu erkennen, iſt $dy = vdt$. §. 16. die in $mdy = vdt$, m beſtändig genommen, übergeht. Um aber daraus eine andere Differentialgleichung zu finden, die allein das Verhältniß des Raums und der Zeit ausdrückt, muß v durch y gegeben werden. Da aber $v = \sqrt{2gy}$. §. 12. ſo kann man für die Geſchwindigkeit die Quadratwurzel der Höhe ſetzen, wodurch die Geſchwindigkeit erlangt wird; wenn nur die Kräfte unveränderlich genommen werden. Daher wird bey unveränderlichen Kräften $\frac{mdy}{\sqrt{2gy}} = dt$, deſſen Integral iſt $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$; auch iſt, aus dem §. 9. angeführten Grunde, keine beſtändige Größe hinzuzuſetzen nöthig.

Hieraus folgt: 1.) **Bey unveränderlichen Beſchleunigungen verhalten ſich die Zeiten, wie die Quadratwurzeln der durchlaufenen Räume. 2.) Bey ungleichen, doch unveränderlichen Kräften iſt das Verhältniß der Zeiten zuſammengeſezt aus dem geraden Verhältniß der Quadratwurzeln der durchlaufenen Räume, und dem verkehr-**

ten

ten der Quadratwurzeln der Beſchleunigungen. 3.) Sind bey ungleichen unveränderlichen Kräften die Zeiten gleich, ſo wird $\sqrt{y} = \sqrt{g}$; daher erhalten ſich die in gleichen Zeiten zurückgelegten Räume wie die Kräfte.

§. 16.

Soll nun aus der Zeit der Raum, und umgekehrt die Zeit aus dem Raum gefunden werden, ſo müſſen vorher die Größen m und g in der Gleichung $\frac{2m\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$ beſtimmt werden. Es ſey $t = 1$ Sekunde, ſo wird $4mmy = 2g$, oder $2mmy = g$; ſezt man nun $31{,}250'$ für g. §. 11. ſo wird $2y = 31{,}250' = g$, daher $m = 1$, und $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{2g}} = t$. Oft iſt es genug, wenn man nimmt $\sqrt{2g} = \sqrt{60}$; ſezt man überdies $t = 1''$, ſo wird $4y = 2g$, und $y = \frac{g}{2} = 15$. Iſt aber $t = 2''$, ſo iſt $\sqrt{y} = \sqrt{2g}$, daher $y = 60$; iſt $t = 3''$, ſo iſt $4y = 9.60$, daher $y = 135$.

§. 17.

Das Verhältniß der Geſchwindigkeit und Zeit wird noch einfacher, als §. 7. ausgedrückt, wenn man ſtatt der Geſchwindigkeit die Höhe des Falles nimmt, wodurch ſie erlangt wird, die die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe heißt. Denn es ſey y, wie vorhin, der Raum, wodurch der Körper

von der natürlichen Schwere getrieben wird, und x die Fallhöhe, wodurch der Körper jene Geſchwindigkeit erlangt, ſo iſt offenbar $dy = dx$, und $y = x$. Iſt daher die Geſchwindigkeit v, ſo wird $v^2 = x$, und v ſich verhalten, wie $\sqrt{y}$, und dieſes y drückt die Anzahl der Fuße aus, wodurch der Körper fällt, um dieſe Geſchwindigkeit zu erlangen. Hieraus wird aber die erlangte Geſchwindigkeit gefunden, wenn man $\sqrt{y}$ mit $\sqrt{4g}$ multiplicirt, wenn $g = 15'$, oder wenn man ſezt $\sqrt{15} : 30 = \sqrt{y} : \frac{30\sqrt{y}}{\sqrt{15}} = \sqrt{60}.\sqrt{y}$ $= \sqrt{60y} = \sqrt{4gy}$, wofern g für $15'$ genommen wird; es wird aber $\sqrt{60y} = \sqrt{2gy}$, wenn $g = 30'$; und $= \sqrt{gy}$, wenn $g = 60'$. §. 12. und §. 56. Vorleſ.

§. 18.

Damit wir die ſo gefundene Geſchwindigkeit $v = \sqrt{y}$, zu Findung der Zeit aus der Gleichung $\frac{mdy}{\sqrt{(2ngy)}} = dt$, die in $\frac{mdy}{\sqrt{y}} = dt$ übergeht, anwenden können, müſſen wir für m ſetzen $\frac{1}{\sqrt{4g}}$ (g wird wieder für $15'$ genommen.) So oft wir alſo bey dieſer leztern Vergleichungsart der Geſchwindigkeiten mit den Zeiten, zu der Gleichung $t = \frac{S.dy}{\sqrt{y}}$ gelangen, und daraus entweder die Geſchwindigkeit oder die Zeit durch Rechnung gefunden werden ſoll; ſo

iſt

iſt zu Findung der wahren Größe der Zeit weiter nichts nöthig, als die Größe $\frac{S.dy}{\sqrt{y}}$ durch $\sqrt{4g}$ zu dividiren, wo $\sqrt{4g} = \sqrt{60}$, und $g = 15$. wie man leicht einſieht.

§. 19.

In den bisher betrachteten Fällen durfte zu dem gefundenen Integral nichts hinzugeſezt werden; denn ſezt man $x = o$, ſo verſchwindet die Geſchwindigkeit, ſo wie auch die Zeit. Es giebt aber andere von jenen verſchiedene, wo nämlich der Körper im Anfang des Falles in A mit einer gegebenen Geſchwindigkeit in der Linie Ad verſehen iſt, ehe die Schwere in ihn zu wirken, und mit ihrem unveränderlichen Druck niederwärts zu reizen anfängt; und alsdenn muß eine beſtändige Größe zu dem Integral addirt werden. Denn da die Geſchwindigkeit in jedem Punkte zu beſtimmen iſt, ſo ſetze man die Geſchwindigkeit im Anfange $= c$, und im Punkte d (Fig. 4. Taf. I.) $= c + v$, ſo wird doch ihr Wachsthum oder Differential dv ſeyn. Man ſetze daher, wie vorhin, $AD = x$, und wende die Gleichung §. 7. 12. $gdx = vdv$ an, ſo wird $gx = \frac{1}{2}v^2 + B$. Wenn hier aber $x = o$, ſo iſt $v = c$; daher $B = -\frac{cc}{2}$, und $2gx = v^2 - c^2$. Folglich $v = \sqrt{(2gx + c^2)}$: welche Gleichung, weil $\sqrt{(2gx)}$ die durch die Höhe x erlangte Geſchwindigkeit iſt, wenn ſelbige Q genennt wird, in folgende: $v = \sqrt{(Q^2 + c^2)}$ übergeht. Sezt man aber für den

ganzen Fall $x = a$, und die $\sqrt{a}$ zugehörige Geſchwindigkeit $= b$: ſo wird am Ende des Falls $v = \sqrt{(b^2 + c^2)}$. Damit aber der §. 17. 18. angewandten Gleichung erhellt, ſo ſey h die der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe, ſezt man nun in $gdx = vdv$, $dx = dh$, ſo entſteht die Gleichung $x = h + B$. Wenn alſo d die Fallhöhe, wodurch die Geſchwindigkeit c erlangt wird, ſo wird, wenn $x = 0$, $h = d$, folglich $h = x + d$. Es iſt aber $\sqrt{h} = v$, daher $v = \sqrt{(x+d)}$; und wenn x für den ganzen Fall $=$ a, ſo wird $v = \sqrt{(a+d)}$, woraus, weil $d = c^2$ (§. 17.) und $a = b^2$ (§. 17.) entſteht $v = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, wenn wir die vorhin gebrauchten Zeichen der Geſchwindigkeiten beybehalten.

Da ſich die Zeit beſtändig verhält, wie das Element des Raums, durch die Geſchwindigkeit dividirt, ſo wird auch ſelbige aus der gegebenen Geſchwindigkeit leicht gefunden. Es iſt nämlich in gegenwärtigem Fall $dt = \frac{dx}{\sqrt{(x+d)}}$, daher $t = 2\sqrt{(x+d)} + B$. Was aber B iſt, wird daraus bekannt, daß $x = 0$ geſezt, das Integral $= 2\sqrt{d}$ wird. Daher iſt $t = 2(\sqrt{(x+d)} - \sqrt{d})$, welche Größe nun mit $\sqrt{\frac{1}{4g}}$ §. 18. zu multipliciren iſt, um die Zeit in Sekunden ausgedrückt zu bekommen. Ueberdies iſt bekannt, daß x und d in eben dem Maaſe, worinn g gegeben wird, ausgedrückt werden müſſen, nämlich in Pariſer oder Däniſchen Fußen, wenn $g = 15'$ genommen wird.

§. 20.

Es ſey $\frac{p}{m}$ eine veränderliche Größe, ſo werden die Aufgaben eben ſo aufgelöſt, nur daß man hier die Kraft $\frac{p}{m}$ durch andere Größen beſtimmen muß. Daß hier nach dem verſchiedenen Verhältniß der Kräfte verſchiedene Aufgaben vorkommen können, ſieht man ſogleich ein. Unter unzähligen andern Geſetzen der Kräfte wollen wir hier vorzüglich diejenigen unterſuchen, die in der Natur vorkommen, oder doch von ſelbigen am wenigſten abweichen. Aus dieſer Urſache wollen wir auch insbeſondere diejenigen Fälle betrachten, wo die Kräfte im Verhältniß der Potenzen der Entfernungen von gewiſſen Punkten wirken, gegen welche die bewegten Körper von ihnen beſtändig getrieben werden. Der wichtigſte hiervon iſt, wo die Schwere ſich nach dem verkehrten Verhältniß der Entfernungen vom Mittelpunkt der Kräfte richtet. Es ſey alſo B der Mittelpunkt (Taf. I. Fig. 4.) und der Anfang des Falles in A, Ba = a, Bd = x, de = — dx, wo das Zeichen (—) zu nehmen, weil x beſtändig abnimmt, indem die Geſchwindigkeit wächſt. Ferner ſey BC = r der Halbmeſſer der Erde, und unſere Schwere in C = g. Dies vorausgeſezt wird xx : rr $= g : \frac{g.rr}{xx} = \frac{p}{m}$, daher geht die Gleichung vdv $= \frac{np}{m}$ dx (§. 9.) über in

$$v\,dv = -\,nrrg.\,\frac{dx}{xx},$$ folglich

$$\frac{1}{2vv} = \frac{nrrg}{x} + B.$$

Um aber dieſe beſtändige Größe B zu beſtimmen, iſt zu merken, daß wenn $x = a$, $v = o$ wird, daher $B = -\frac{nrrg}{a}$; daraus erhellt, daß $vv = \frac{2nrrg}{x} - \frac{2nrrg}{a}$, und $v = r\surd(2gn).\surd\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$ $= r\,\surd(2gn).\surd\left(\frac{a-x}{ax}\right)$. Sezt man nun $2ng = 1$, ſo wird die, der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe $= r^2\left(\frac{a-x}{ax}\right)$. So oft man alſo x endlich annimmt, wird auch die wahre Größe v auf die vorhin erklärte Art gefunden. Sezt man aber $x = o$, welches im Fall durch AB ſtatt haben kann, ſo iſt $v = \infty$, d. i. im Mittelpunkte der Kräfte ſelbſt iſt die Geſchwindigkeit unendlich groß. Und dies iſt der Unterſchied zwiſchen dieſer und voriger Hypotheſe, nach welcher die Schwere unveränderlich angenommen wurde: dort bleibt die Geſchwindigkeit auch im Mittelpunkt endlich, wofern nur a eine endliche Größe iſt: denn ſie überſteigt niemals die Quadratwurzel des zurückgelegten Raums. §. 10. Auf der entgegengeſezten Seite des Mittelpunkts aber, wird die

Größe

Größe x verneint; daher geht $v = r\sqrt{(2ng)}$. $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$ in die **unmögliche** Größe $\sqrt{\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$ über, welches ein Kennzeichen zu ſeyn ſcheint, daß von dieſer Seite des Mittelpunkts keine Bewegung ſtatt haben kann, ſondern vielmehr die ſchweren Körper von B wieder zurück nach A ſteigen, da auf der entgegengeſezten Seite die Geſchwindigkeit v unmöglich wird. Dieſes läßt ſich aber daraus nicht ſchlieſen: Denn: man muß erwägen, daß auch die Kräfte ſelbſt auf der andern Seite des Mittelpunkts verneinte Größen werden.

Anmerkung. Man vergleiche über dieſen Beweisgrund Eulers Mechanic. Tom. I. Cap. 3. propoſ. 32. Schol. 1. (V.)

Ob aber der von dem Herrn Verfaſſer vorgetragene Zweifel dadurch, daß wir die Kräfte auch **verneint** annehmen, wenn x **verneint** angenommen wird, hinlänglich gehoben werden, zweifle ich. Denn es ſey die Größe g zugleich mit x verneint, ſo wird in der Gleichung $v = r.\sqrt{2gn}\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$ der Theil $\sqrt{2gn}$ verneint, ſo wie auch $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$

ſen $\sqrt{(-\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}$ übergeht. Dieſe leztere Größe aber iſt einerley mit $\sqrt{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{a})}$, daher wird die Geſchwindigkeit v ſelbſt möglich; ſie wird nämlich $= \sqrt{-2ng.}\,\sqrt{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{a})} = \sqrt{\left(2ng.(\frac{1}{x}+\frac{1}{a})\right)}$; welches aber mit den Bedingungen der Aufgabe ſtreitet. Denn da wir annehmen, daß eben die Schwere auch auf der andern Seite des Punkts B, obgleich auf entgegengeſezte Art, wirkt, ſo muß auch in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt eine gleiche Geſchwindigkeit in dem Körper gefunden werden, folglich auch, wenn gleich x verneint geſezt wird, eben der Ausdruck der Geſchwindigkeit, wie vorhin, übrig bleiben; nämlich $v = \sqrt{2ng.}\,\sqrt{(\frac{1}{x}-\frac{1}{a})}$ Dieſer iſt aber von der vorigen $\sqrt{2ng.}\,\sqrt{(\frac{1}{x}+\frac{1}{a})}$ verſchieden. Dieſe Gleichheit wird aber auf keine Weiſe erhalten, wenn nicht mit x und g zugleich die Größe a verneint genommen wird, wie auch die

Natur-

Natur der Aufgabe erfordert. Alsdenn wird $v = \sqrt{(-2ng.} \sqrt{(-\frac{1}{x}+\frac{1}{a})} = \sqrt{(2ng.)} (\frac{1}{x}-\frac{1}{a})$ eben wie vorhin. Dergleichen Schwierigkeiten kommen hier in der Rechnung mehr vor, wodurch ſie zuweilen von der Natur abzuweichen ſcheint. Daß ſie keinesweges unerheblich ſind, erſieht man daraus, weil ſie auch den größten Männern in dieſer Sache zu ſchaffen gemacht haben. S. **Eulers** Mechanic. T. I. §. 272. u. a. a. O. m. ſo wie auch in den Fällen, wo ſtatt der Schwerkräfte die Fliehkräfte genommen werden, die doch leicht auf die gegenwärtigen gebracht werden. Um aber dieſe Schwierigkeiten zu vermeiden, iſt folgende Regel zu merken, von deren Wahrheit die aufmerkſame Betrachtung der Aufgaben jeden Leſer belehren wird; **wird nämlich die eine oder die andere der Größen r, g, x, a verneint geſezt, ſo müſſen alle übrigen zugleich verneint genommen werden.** Wird dieſes nicht in acht genommen, ſo iſt es kein Wunder, wenn alles unter ſich ſchlecht zuſammenhängt. Beobachtet man aber dieſe Regel, ſo bleibt der allgemeine Werth der Geſchwindigkeit v (§. 21.) eine mögliche Größe, man mag jene Größen auf der einen Seite des Mittelpunkts oder auf der andern annehmen, wie ſie auch ſeyn muß. Denn es iſt $v = \frac{\sqrt{ng.}\sqrt{(r^{n} x^{-n+1} - r + a^{n-n+r})}}{\sqrt{(n-1)}}$

Es ſey nun 1.) die Zahl n ungerade, oder $n-1$
n
gerade, ſo werden ng und r verneint ſeyn. Daher $\sqrt[n]{(r\,.\,ng)}$ möglich; aber $\sqrt{(x^{-n+1}-a^{-n+1})}$ bleibt einerley, wenn $n-1$ gerade iſt, man mag x und a verneint oder bejaht ſetzen. Folglich bleibt der Werth der Geſchwindigkeit v auf der andern Seite möglich, wenn er es auf der erſten war.

2.) Sey n gerade, und $n-1$ ungerade, ſo wird x verneint genommen, $x^{-n+1}-a^{-n+1}$ verneint. Es iſt aber auch ng verneint; daher $\sqrt{ng}$. $\sqrt{(x^{-n+1}-a^{-n+1})}$ eine wirkliche Größe; $\sqrt[n]{r}$ iſt aber in dieſem Fall, wo n gerade iſt, beſtändig einerley, man mag r bejaht oder verneint nehmen. Daher kann $\sqrt{ng}$. $\sqrt{(r^{n}x^{-n+1}-r^{n}a^{-n+1})}$ wegen den veränderten Richtungen der Größen nichts unmögliches werden, wenn es nicht ſchon vorher war. Sobald wir aber die eine oder die andere der Größen, x, a, g, r, verneint ſetzen, die übrigen aber bejaht laſſen, ſo muß nothwendig, was daraus folgt, unter ſich ſchlecht zuſammenhängen. Und dieſes ſchließt man aus der Rechnung, wenn ſie einen unmöglichen Werth der Geſchwindigkeit giebt. Dieſes geſchieht aber nicht allemal, daher läßt ſich auch jenes aus der Rechnung nicht abnehmen; denn der Werth der Geſchwindigkeit wird nur unmöglich, 1.) wenn x, ſo wie auch a, welches mit x für einerley Größe zu halten iſt, verneint geſezt wird, indem die übrigen bejaht

bejaht bleiben, und zugleich n—1 ungerade iſt. Denn hier liegt nichts daran, wie wir r nehmen, da $\sqrt[n]{r}$, wo n gerad iſt, allemal etwas wirkliches ausdrückt; g muß aber zugleich verneint genommen werden, wenn nicht etwas unmögliches heraus kommen ſoll. 2.) Eben ſo, wenn g allein verneint geſezt wird, und n—1 ungerade iſt, die übrigen aber bejaht bleiben; denn hier wird wieder die eine Verneinung von keiner andern aufgehoben. 3.) Iſt n—1 gerade, ſo giebt die Rechnung einen unmöglichen Werth der Geſchwindigkeit, wenn r oder g allein verneint genommen wird, indem die übrigen bejaht bleiben. Denn hier iſt x^{-n+1} $-a^{-n+1}$ einerley, man mag x verneint oder bejaht nehmen. Nun muß aber das unmögliche in $\sqrt[n]{r}$ wieder durch die unmögliche $\sqrt{ng}$ aufgehoben werden, welches, weil das eine bejaht bleibt, das andere aber ſich ändert, nicht geſchehen kann.

Forſchen wir der Urſache dieſer wenigſtens ſcheinbaren Abweichung des Kalkuls weiter nach, ſo erhellt, daß ſie von der Zweydeutigkeit des Zeichens (—) herrührt. Denn bald drückt dieſes Zeichen nur eine entgegengeſezte Lage der Größen aus, ſo wie auch die Aenderung deſſelben in + die Aenderung dieſer Lage andeutet: bald bezeichnet es die, der durch + ausgedrückten, entgegengeſezte Rechnungsart. Laſſen alſo die Bedingungen der Aufgabe bey veränderter Lage der Größen doch den Uebergang dieſer Rechnungsart in die entgegengeſezte

ſezte

nicht zu, ſo muß nothwendig Verwirrung und Abweichung daher entſtehen. Daß aber die hier betrachteten und andere ähnliche Fälle in der Analyſis hieher gehören, wird aus dem geſagten erhellen. Hiervon vielleicht an einem andern Orte.

Man darf x nicht, ohne die übrigen, verneint nehmen, wenn wir gleich den Bedingungen der Aufgabe die Vorausſetzung beyfügen wollten, daß die Schwere auch nach der andern Seite des Punkts B in der Richtung von B nach D wirke, ſo daß ſie überall eben dem Geſetz, wie bis zum Punkt B folgt, nur daß der Mittelpunkt der Kräfte nicht in B iſt, von wo aus doch x gerechnet wird, ſondern in einem andern Punkte, z. B. D. Denn dieſes vorausgeſezt muß ſich nothwendig auch die Rechnung ändern. Denn verwandelt ſich blos x ins verneinte, ſo wird der Werth der Geſchwindigkeit in dem Fall (§. 20.) $= \sqrt{r^2} . \sqrt{2ng} . \sqrt{\left(\frac{a+x}{-ax}\right)}$, der wieder, das Zeichen der Größe a mag ſich zugleich ändern, oder nicht, ins unmögliche übergeht. (T.

§. 21.

Nimmt man ſtatt der Quadrate der Entfernungen, eine andere Dignität der Entfernungen n, nach deren Verhältniß ſich die wirkende Kraft richtet; ſo bleibt das übrige, wie vorhin, nur mit dem Unterſchiede, daß hier $x^n : r^n = g : \frac{r^n g}{x^n}$; welche Größe

die

die Beſchleunigung ausdrückt. Daher wird mit Beybehaltung der vorigen Zeichen $vdv = -\frac{r^n}{x^n} ngdx = -gnr^n x^{-n} dx$. Es ſey h, wie §§. 17. 19. die der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe, ſo wird $dh = -r^n x^{-n} dx$, und nach geſchehener Integration erhält man $h = \frac{r^n x^{-n+1}}{n-1} + B$. Sezt man nun $x = a$, ſo wird $h = 0$, daher $B = -\frac{r^n a^{-n+1}}{n-1}$, folglich $h = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{n+1}$.

Für den ganzen Fall iſt $x = 0$, und $h = \frac{r^n a^{-n+1}}{1-n}$, wenn $r - n$ eine bejahte Größe iſt: iſt aber $1 - n$ verneint, ſo wird $h = \left(\frac{r^n}{x^{n-1}} - \frac{r^n}{a^{n-1}}\right) : n-1$, und daher, wenn $x = 0$,

$h = \frac{r^n}{x^{n-1}} = \frac{r^n}{0}$. Hieraus folgt:

1.) Wenn n bejaht iſt, ſo wird $v = \sqrt{h} = \frac{\sqrt{(r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1})}}{\sqrt{(n-1)}}$, und wenn x verſchwindet, ſo wird $\frac{r^n}{x^{n-1}} = \infty$, daher wird die Geſchwindigkeit im Mittelpunkt der Kräfte allemal unendlich groß, wenn n bejaht und > 1 iſt.

2.) Iſt aber n bejaht und < 1, oder auch verneint; welches ſtatt hat, wenn die Beſchleunigung ſich gerade wie die Entfernungen verhält; ſo wird die Geſchwindigkeit für den ganzen Fall endlich. Denn ſezt man $x = 0$, ſo wird auch $x^{-n+1} = 0$; und $h = \frac{r^n a^{-n+1}}{1-n}$. Sezt man aber n verneint und $n+1 < 1$, ſo geht h in $\frac{a^{n+1}}{(n+1) r^n}$ über, wenn n verneint genom-

genommen wird. In den übrigen Fällen iſt die Geſchwindigkeit im Mittelpunkt unendlich, wie aus dem vorhergehenden erhellt.

3.) Iſt n bejaht und $= 1$ in der Gleichung $v = \frac{V(r x^{n\;-n+1} - r a^{n\;-n+1})}{V(n-1)}$, ſo wird $v = \frac{V(r-r)}{V(1-1)} = \frac{o}{o}$. Dieſes zeigt an, daß v aus der Differentialgleichung $dh = -\frac{rdx}{x}$ beſtimmt werden muß. Es iſt aber das Integral dieſer Gleichung $h = -r.\,log.\,x + r.\,log.\,a = r.\,log.\frac{a}{x}$, wo $x = o$ geſezt, $log.\frac{a}{x} = \infty$, d. i. die Geſchwindigkeit im Mittelpunkt dar Kräfte iſt auch unendlich, wenn die Beſchleunigung ſich verkehrt verhält, wie die einfachen Entfernungen. Doch iſt dieſe unendliche Geſchwindigkeit unter allen übrigen unendlichen gleicher Art die kleinſte, weil $log\frac{1}{o}$ zwar eine unendliche Größe, aber unter den übrigen unendlichen die kleinſte iſt. Hier haben wir alſo eine Grenze: denn dieſer Fall iſt der lezte

unter denen, wo die Geſchwindigkeit endlich iſt, und der erſte, wo ſie unendlich groß wird.

4.) Iſt n verneint und $= 1$, d. i. verhält ſich die Schwere gerade wie die einfachen Entfernungen vom Mittelpunkt, welche Vorausſetzung, wie wir an ſeinem Ort erweiſen werden, bey den unter der Erde fallenden ſchweren Körpern ſtatt hat; ſo wird die Geſchwindigkeit $v = \sqrt{h} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2}{2r}\right)}$

§. 22.

Richtet ſich die Schwere nach der einfachen Verhältniß der Entfernungen vom Mittelpunkt der Kräfte: ſo liegt viel daran, daß auch die Zeit beſtimmt wird. Es iſt aber $\frac{dy}{\sqrt{y}} = dt$ nach §. 18. denn $\sqrt{y}$ bedeutet hier eben das, was $\sqrt{h}$ im §. 21. 4. und dy eben das, was $-dx$. Demnach wird mit Beybehaltung der vorigen Zeichen $dt = \frac{-dx\sqrt{2r}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$.

Es ſey der Halbmeſſer des Kreiſes $= a = AB$ (Taf. I. Fig. 4.), aus B beſchreibe man mit dem Halbmeſſer a den Quadranten AF; ſo iſt $\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ das Element des Bogens fg; daher $\frac{-dx\sqrt{2r}}{\sqrt{(a^2 - x^2}} =$

$\frac{\sqrt{2r}}{a} \cdot \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2})}$, und die Zeit ſelbſt $= -\frac{\sqrt{2r}}{a} . Ff + B$. B bezeichnet aber eine beſtändige Größe, die daraus erkannt wird, weil $x = o$ geſezt, die ganze Zeit des Falles von A nach $B = \frac{\sqrt{2r}}{a} . FfA$. Denn da der Bogen verneint genommen werden muß, ſo wird $Ff = o$, wenn $x = a$; ſtatt Ff muß ſeine Ergänzung zum Quadranten genommen werden. Daher wird auch die Zeit des Falles durch $Ad = Af . \sqrt{\frac{2r}{a}}$. Hieraus ſchließt man:

1.) Da die Zeit durch $AB = \frac{AF}{a} \sqrt{2r}$, und der Umkreis $= p$, der Durchmeſſer $= d$ geſezt $\frac{AF}{a} = \frac{1}{4}p : \frac{1}{2}d = p : 2d$, ſo iſt auch die Zeit durch $AB = t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$. Dieſes iſt aber eine beſtändige Größe. Wirkt alſo die Beſchleunigung im Verhältnis der Entfernungen, ſo iſt die Zeit, worinn die ſchweren Körper zum Mittelpunkt fallen, beſtändig und gleich groß, der Weg AB, den der Körper im Fall durchläuft, mag groß oder

klein ſeyn. Und dieſe auszeichnende Eigenſchaft kömmt dieſer Hypotheſe von Kräften allein zu.

2.) Da $t = \frac{\sqrt{2r}}{2} \cdot \frac{p}{d}$, ſo kann r auch als veränderlich angeſehen werden; und dieſes iſt bey Vergleichung mehrerer Kräfte nothwendig, deren Mittelpunkte verſchieden, und die, ob ſie gleich nach einerley Geſetzen wirken, doch der Größe nach ungleich ſind. Daher ſind auch die Weiten vom Mittelpunkt, in welchen dieſe Kräfte der natürlichen Schwere gleich ſind, verſchieden. Dieſes vorausgeſezt iſt $t = \sqrt{r}$, d. i. die Zeiten, worinn die ſchweren Körper nach verſchiedenen Mittelpunkten fallen, verhalten ſich unter einander wie die Quadratwurzeln der Weiten, in welchen die Centralkraft unſerer Schwere gleich iſt.

Die Centralkräfte ſelbſt aber verhalten ſich unter einander wie die ungleichen Weiten vom Mittelpunkt von ihnen erzeugten Effekte, da ſie ſich überdies verhalten, wie die Weiten vom Mittelpunkt, ſo wird ſeyn $gx = Pr$. Denn heißt P die Centralkraft in der Weite x, die in der Weite r der Schwere gleich iſt, ſo wird $x : r = P : \frac{rP}{x} = g$, daher $gx = rP$. Folglich werden ſie ſich auch unter einander verkehrt verhalten, wie die Weiten, in welchen ſie der Schwere gleich ſind. Heißt alſo die Centralkraft P, ſo wird in dieſer Vorausſetzung

$P =$

$p = \frac{1}{r}$, folglich auch $r = \frac{1}{p}$, und $t = \sqrt{\frac{1}{p}}$; daraus erhellt, daß die Zeiten des Falles ſich unter einander verkehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln der abſoluten Kräfte.

§. 23.

Wird der Mittelpunkt der im verkehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen ſtehenden Kräfte in D geſezt, und die Zeit des Falles durch AD geſucht, ſo erhellt aus §. 20. daß die Höhe, wodurch im Fallen die Geſchwindigkeit v erlangt wird, $= r^2 \left(\frac{a-x}{ax}\right)$. Daher iſt, wenn $Dk = x$, die Gleichung für die Zeit (§. 18.) $dt = \frac{-dx\sqrt{ax}}{r.\sqrt{(a-x)}} = -\frac{\sqrt{a}}{r}.\frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx}}$. Um davon das Integral zu bekommen, addire man zu dem Differential den fehlenden Theil, und ziehe ihn auch zugleich ab. Dadurch erhalten wir $dt = \frac{\sqrt{a}}{r}.\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{(ax-xx}} - \frac{adx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$. Des erſten Theils dieſer Gleichung nämlich $\frac{\frac{1}{2}adx-xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ Integral iſt $\sqrt{(ax-xx)}$, und

und $S. \frac{-adx}{2\surd(ax-x^2)}$ iſt ein Kreisbogen, deſſen Durchmeſſer $= a$. Man beſchreibe alſo über $AD = a$, den Halbkreis AFD, ſo wird $Dh = x$ geſezt, $S. \frac{-adx}{2\surd(ax-x^2} = Ai$. Ueberdies iſt $hi = \surd(ax-x^2)$, daher $S. \frac{-xdx}{\surd(ax-xx} = hi + Ai$, und $t = \frac{\surd a}{r}. (Ai+hi)$, welches der Ausdruck der Zeit Ah. Eben ſo iſt die Zeit durch $AD = \frac{\surd a}{r}. AFD$, denn für den ganzen Fall verſchwindet hi in D.

Da alſo die ganze Zeit des Falles iſt $\frac{\surd a}{r}. AFD$; ſo ſey $1 : p$ das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreis, ſo iſt, wenn der Durchmeſſer $= a$, der Umkreis $= ap = 2\ AFD$; daher wird ſich die ganze Zeit des Falles beſtändig verhalten wie $a\surd a = \surd a^2$. Demnach verhalten ſich bey ungleichen Entfernungen a, die Zeiten des Falles aus verſchiedenen Höhen, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Entfernungen vom Mittelpunkt. Dieſes Verhältnis heißt insgemein ratio ſesquiplicata.

§. 24.

§. 24.

Eben ſo findet man auch eine allgemeine Gleichung der Zeit, wenn die Centralkräfte $= \frac{1}{x^n}$. Denn da hier die Geſchwindigkeit überall $= \frac{\sqrt{(r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1})}}{\sqrt{(n-1)}}$. §. 21. ſo wird die allgemeine Function der Zeit $\frac{dx.\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1})}}$. Welche allgemeine Differentialgleichung wir aber, da ſie, auf dieſe Art ausgedrückt, ſich nicht integriren läßt, übergehen.

§. 25.

Wir ſchreiten vielmehr zu folgenden merkwürdigen Sätzen. 1.) Iſt der Körper im Anfang des Falles mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit wie §. 19. verſehen, ſo wird die Bewegung überhaupt leicht beſtimmt, wenn die Centralkräfte auch in der Verhältnis $\frac{1}{x^n}$ angenommen werden, wo wiederum x die Entfernung vom Mittelpunkt bedeutet. Denn wir erhalten mit Beybehaltung der Zeichen §. 21. $dh =$

$-r^{n}\,n^{-u}\,dx$, und $h = \dfrac{r^{n}x^{-n+1}}{n-r} + B.$ und dieſe beſtändige Größe B wird durch Beſtimmung der, der Geſchwindigkeit im Anfang des Falles, wo $x=a$, zukommenden Höhe gefunden; ſezt man dieſe Höhe $=b$, ſo wird

$$h-b = \frac{r^{n}x^{-n+1} - r^{n}a^{-n+1}}{n-1}, \text{ und daher}$$

$$h = \frac{r^{n}x^{-n+1} - a^{-n+1} + (n-1)\,b}{n-1}$$

§. 26.

Eben ſo wird auch die Höhe des Falles beſtimmt, wodurch der von ſolchen Centralkräften, wie ſie in der Vorausſetzung angenommen werden, gereizte Körper die Geſchwindigkeit erlangen kann, womit er ſeinen Fall gegen den Mittelpunkt beginnt. Es ſey z. B. der Mittelpunkt der Kräfte in D; h aber der Punkt, von welchem der Körper gegen D mit der Geſchwindigkeit zu fallen anfängt, die durch den Fall durch Ah, in dem in A ruhenden, und von der Centralkraft in D angezogenen Körper erzeugt worden wäre. Da alſo dieſe Kraft ſich verhält wie $\frac{1}{x^{n}}$, wo x jede Entfernung

vom

vom Punkte D bedeutet; ſo erhellt, daß die der Geſchwindigkeit in h, die der in A ruhende Körper im Fall durch Ah hätte erlangen können, zugehörige

Höhe $= \frac{r^{n} x^{-n+1} - r^{n} a^{-n+1}}{n-1}$. §. 21. Dieſe Geſchwindigkeit in h aber iſt mit der einerley, deren zugehörige Höhe $= b$ geſezt worden, wenn dieſe Geſchwindigkeit durch die freye Wirkung unſerer Schwere hätte erlangt werden ſollen. Daher muß in dieſem Fall, wenn der Körper in h iſt, für b geſezt werden, $\frac{r^{n} x^{-n+1} - r^{n} a^{-n+1}}{n-1}$, folglich auch $b -$

$$\frac{r^{n} x^{-n+1}}{n-1} = -\frac{r^{n} a^{-n+1}}{n-1}$$, daher $AD =$

$$a = \sqrt[1-n]{\frac{r^{n} x^{-n+1} - (n-1)\,b}{r^{n}}}$$, welches die geſuchte Weite vom Mittelpunkt D iſt, die in jedem beſondern Fall, wenn $hD = d = x$, in

$$\sqrt[1-n]{\frac{r^{n} d^{-n+1} - (n-1)\,b}{r^{n}}}$$ übergeht, daher $Ah =$

$$\frac{\sqrt[1-n]{(r^{n} d^{-n+1} - (n-1)\,b)} - d}{r^{n}}.$$ Hieraus laſſen ſich mehrere Folgen herleiten, wovon wir nur einige beyfügen wollen;

a) Wenn $n = o$, ſo wird auch $Ah = b$, d. i. = der Höhe des Falles, wodurch die Geſchwindigkeit von der unveränderlichen Centralkraft erzeugt wird.

b) Wenn n bejaht und > 1, oder die Kräfte ſich verkehrt verhalten wie Potenzen der Entfernungen, ſo wird $Ah = - d +$

$$\frac{r^{\frac{n}{n-1}}}{(r^{n} d^{-n+1} - (n-1)\,b)^{\frac{1}{n-1}}},$$ daraus folgt Ah

$= \frac{1}{o}$ oder ∞, wenn $(n-1)\,b = r^{n} d^{-n+1}$.

Iſt aber $(n-1)\,b > r^{n} d^{-n+1}$, ſo muß Ah mehr als unendlich groß ſeyn, ſo ſich nicht denken läßt, folglich iſt es unmöglich. Demnach kann nicht jede Geſchwindigkeit von den Centralkräften, wie wir ſie hier annehmen, erzeugt werden, da es doch die unveränderlichen Kräfte vermögen; daher ſie auch zu

Berech-

Berechnung der Geſchwindigkeiten, und der ihnen zugehörigen Höhen am geſchickteſten ſind.

Anmerkung. Wenn in dem Theiler $\left(r\,d^{n-n+1} - (n-1)\,b\right)^{\frac{1}{n-1}}$ der erſte Theil $r\,d^{n-n+1} < (n-1)\,b$, ſo folgt, daß $r\,d^{n-n+1} - (n-1)\,b$ eine verneinte Größe iſt. Iſt aber n bejaht und > 1, ſo iſt $\frac{1}{n-1}$ ein ächter Bruch, folglich der Theiler eine aus einer verneinten Größe auszuziehende Wurzel, deren Exponent entweder eine ganze Zahl oder ein unächter Bruch iſt. Iſt nun $n-1$ eine ganze Zahl, ſo iſt dieſer Theiler nur in den Fällen unmöglich, wo $n-1$ gerad iſt; ſonſt aber möglich. Iſt aber $n-1$ ein Bruch, ſo iſt der Theiler auch wirklich, wenn nicht der Zähler dieſes Bruchs gerad, und der Nenner ungerade iſt. Demnach wird nicht in jedem Fall die Höhe Ah bey dieſer Vorausſetzung unmöglich. (T.)

c.) Iſt aber $1-n$ bejaht, ſtehen z. B. die Kräfte in gerader vervielfachter Verhältniß der Entfernungen vom Mittelpunkt, ſo wird zwar Ah bejaht, doch muß ſeine Größe, wo nicht $n=o$, durch die Größen r und d, die öfters als unendlich groß anzuſehen ſind, beſtimmt werden. Da überdies dieſe Gattung Kräfte in der Natur nicht leicht vorkommt, ſo wird die oben vorgetragene Methode, die jeder Geſchwindigkeit

digkeit zugehörige Höhe zu beſtimmen, unter allen die nützlichſte und zweckmäſigſte ſeyn. Wir verſtehen nämlich diejenige, wo die den Geſchwindigkeiten gemäſen Höhen, mit denjenigen, wodurch die von unſerer Schwere gereizten Körper dieſe Geſchwindigkeiten erlangen, einerley ſind; und dieſe deuten wir allezeit mit dem Namen der Höhen an, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil geſagt wird. Denn die natürliche Schwere, wie ſie in unſern Gegenden iſt, iſt das Maas, welches wir überall zu Beſtimmung jeder Gattung von Kräften anwenden, ſo wie auch die bey uns vorkommenden meßbaren Geſchwindigkeiten uns zum Maaſe dienen, womit wir alle übrigen vergleichen.

§. 27.

Wollte man andere, von der vervielfachten Verhältnis der Entfernungen verſchiedene Geſetze der Kräfte annehmen; ſo würde doch die allgemeine Auflöſung der Aufgaben keine weitere Schwierigkeit haben. Kommt man aber auf beſondere Fälle, ſo beruht die ganze Sache auf Integrationen. Das Geſetz der Kräfte ſey durch eine Function der Entfernungen ausgedrückt, die ſowohl von dem Mittelpunkt der Kräfte D, als von einem jeden andern Punkte A an gerechnet werden können. Es ſey Fx eine ſolche Function, die x, und jede andere beſtändige Größen enthält; x ſey die Weite Ah oder Dh; v die der Geſchwindigkeit in h zugehörige Höhe; ſo wird $(Fx)dx = \pm dv$, u. $v = \int.(Fx)dx$. Hieraus ſchließt man die Zeit $= S. \frac{dx}{\sqrt{S.(Fx)dx}}$, woraus die Auf-

löſungen

ſungen in jedem beſondern Fall hergeleitet werden, inſoferne ſie ſich durch Rechnung angeben laſſen. Da ſie aber, ſo viel wir wiſſen, weder in Unterſuchung der Natur, noch in der Mechanik, oder irgend einer andern Wiſſenſchaft, beſondern Nutzen haben, ſo wollen wir uns auch hier mit Erklärung derſelben länger nicht aufhalten.

§. 28.

Laſſet uns vielmehr vor dem Schluß dieſes bereits zu weitläuftig gerathenen Kapitels zeigen, wie aus dem gegebenen Verhältnis der Geſchwindigkeiten, oder den Zeiten der Bewegung, die Geſetze der beſchleunigenden Kräfte gefunden werden. Hier wird zugleich die Art und Weiſe gelehret, die in der Natur vorkommenden Kräfte und ihre Geſetze zu unterſuchen.

1.) **Sind die Geſchwindigkeiten gegeben**, ſo wird überall, wenn V die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, $p = \frac{dV}{dx}$. Denn es iſt $\frac{p}{m} dx = vdv$, daher $\frac{p}{m} = \frac{vdv}{dx} = \frac{dV}{dx}$.

a) **Verhält ſich alſo die Geſchwindigkeit wie die Quadratwurzel des zurückgelegten Raums**, ſo iſt $v^2 = V$, und vdv verhält ſich wie dV, daher $dV = dx$, und $p = \frac{dV}{dx} = 1$. Dieſes Geſetz der Geſchwindigkeiten zeigt alſo an, daß die Centralkräfte unver-

unveränderlich ſind. Hieraus ſehen wir zugleich, daß die Effekte der natürlichen Schwere in unſern Gegenden, von einer beſtändigen Kraft hervorgebracht werden müſſen, wie wir auch oben angenommen haben. Denn bey jenem Verhältnis $\frac{dV}{dx}$ kann das Geſetz der Kräfte nicht anders ſeyn.

b) Verhalten ſich aber die Geſchwindigkeiten wie die zurückgelegten Räume, oder iſt $\sqrt{V} = x$, ſo iſt auch $V = xx$, und $dV = 2xdx$. Daher $p = \frac{2xdx}{dx} = x$; d. i. die Kräfte verhalten ſich wie die zurückgelegten Räume; welche Vorausſetzung aber in der Natur nicht ſtatt haben kann. Denn es muß ſeyn $p = o$, wenn $x = o$, d. i. die Kräfte wären im Anfang der Bewegung völlig nichts, folglich wirkten ſie nicht, und brächten doch Bewegung hervor, welches unmöglich.

c) Es ſey $V = \frac{r^n x^{-n+1} - r^n a^{-n+1}}{(n-1)}$, wie §. 21. ſo wird $dV = -r^n x^{-n} dx$, daher $p = \frac{-r^n x^{-n} dx}{-dx} = \frac{r^n}{x^n}$. Es iſt aber dx verneint,

weil

weil x die Entfernung vom Mittelpunkt Dh (Taf. I. Fig. 4.) bedeutet, die beym Fall des Körpers beſtändig vermindert wird.

§. 29.

2.) **Werden auch aus den gegebenen Zeiten die Geſetze der Kräfte gefunden.** Hier wollen wir folgendes anmerken:

Es ſey das Geſetz für die Zeiten der Bewegung gegeben, worinn nämlich entweder gegebene Räume zurückgelegt, oder gegebene Geſchwindigkeiten erlangt werden; man ſoll die Kräfte finden, die eine ſolche Bewegung erzeugen können, wobey das gegebene Geſetz der Zeiten ſtatt hat. Hierzu dienen die oben erklärten allgemeinen Gleichungen. Denn da $pdt = dv$, §. 4. ſo wird $v = t$ und $dv = dt$ geſezt, $p = \frac{dv}{dt} = 1$. **Daher erhellt, daß die Kräfte auch alsdenn unveränderlich ſind, wenn die Geſchwindigkeit ſich nach der Zeit richtet, ſo wie auch oben erwieſen worden, daß bey unveränderlichen Kräften die Geſchwindigkeiten ſich verhalten, wie die Zeiten des Falles.** Wie alſo bey Vorausſetzung unveränderlicher Kräfte die Geſchwindigkeiten ſich verhalten wie die Zeiten, ſo erfordert umgekehrt dieſes Geſetz der Zeiten jene Vorausſetzung, ſo daß es keine andere zuläßt.

Die Gleichung $\frac{mdy}{\sqrt{(2gy)}} = dt$ (§. 15.), ſo das Verhältnis der Zeit ausdrückt, hat nur ſtatt, wenn die Beſchleunigung unveränderlich iſt; denn die Geſchwin-

ſchwindigkeit iſt = $\sqrt{(2gy)}$. Sucht man hier alſo eine allgemeine Gleichung zwiſchen Zeit und Raum, woraus ſich das Geſetz der beſchleunigenden Kräfte herleiten läßt; ſo muß man die allgemeine Gleichung §. 27. zu Hülfe nehmen. Dieſe iſt $t = S.\frac{dx}{\sqrt{S.pdx}}$, weil hier p mit Fx einerley iſt; daraus wird $dt = \frac{dx}{\sqrt{S.pdx}}$, und $S.pdx = \frac{dx^2}{dt^2}$, ſo wieder differentiirt in $p = \frac{2ddxdt - 2ddtdx}{dt^3}$ übergeht. Dieſe Gleichung wird einfacher, wenn dx beſtändig geſezt wird: denn es wird $ddx = o$, und $p = - \frac{2ddtdx}{dt^3}$. Hieraus und aus der gegebenen Verhältnis der Zeiten und Räume kann man die Kräfte finden. Z. B. ſey $t = \sqrt{x}$, oder $t^2 = x$; ſo iſt $2tdt = dx$, und $- ddt = \frac{dt^2}{t}$, folglich $- \frac{2ddtdx}{dt^3} = p$, eine beſtändige Größe, wie wir ſie oben bey der Schwere annahmen.

Dritte

Dritte Vorleſung.

Vom Gleichgewicht der Kräfte und dem Fall ſchwerer Körper durch geneigte Linien und Ebenen.

Inhalt.

§. 58. — 69. Parallelogramm der Kräfte. Zerlegung und Zuſammenſetzung der Kräfte. §. 70. Geneigte Ebene. §. 71. Was für ein Theil der Schwere auf die geneigte Ebene wirkt, und in welcher Richtung? §. 72. — 82. Verhältnis der Geſchwindigkeiten und Räume; gleichzeitiger Fall durch die Sehnen des Kreiſes; Geſchwindigkeit am Ende des Falles, ſowohl durch die gerade als krumme Linie; Verhältnis der Zeiten des Falles u. ſ. w.

§. 58.

Ehe wir in Unterſuchung der Bewegung ſchwerer Körper weiter fortgehen, müſſen wir zu den Kräften ſelbſt zurück kehren. Laſſet uns alſo die allgemeinen Regeln betrachten, nach welchen mehrere Kräfte in einer Ebene, eine und dieſelbe Bewegung vereinigt bewirken. Es erhellt aber ſogleich, daß ein von mehrern Kräften in eben der geraden Linie gereizter Körper, von allen zugleich eben ſo bewegt werden muß, als er von einer einzigen, jenen zuſammengenommen, gleich großen bewegt worden wäre. Wirken aber die Kräfte in eben der Linie nach entgegengeſezten Richtungen auf eben den Körper; ſo iſt klar, daß ſie einander hindern, und ſich gegenſeitig zerſtören, ſo daß nur eine Bewegung vom

Bayerische Staatsbibliothek München

Unterſchiede der entgegengeſezten Kräfte erfolgen muß. Die bewegende Kraft iſt aber im erſten Fall, da alle in einerley Richtung wirken, der Summe aller, zuſammengenommen, gleich. §. 29. 31.

§. 59.

Zwo verſchiedene Kräfte, A und B, wirken gleichförmig nach den Richtungen AC und BD, (Taf. I. Fig. 5.) die einen gewiſſen Winkel einſchlieſen; die Kräfte verhalten ſich der Größe nach, wie die Linien AC und BD; ſie wirken gleichförmig nach einerley Richtung; dieſes vorausgeſezt, wird ſich der Effekt dieſer Kräfte wie die Diagonale BC des Parallelogramms DBCE verhalten.

Laſſet uns erſtlich betrachten, was die einzelnen Kräfte, wenn ſie beſonders wirkten, ausrichten können. Zuerſt wirke A, und bewege die Materie von A nach a; auf dieſe Wirkung folge die Wirkung der Kraft B, die die Materie von a nach d fortrückt. Dies vorausgeſezt, verhält ſich offenbar Aa wie AC, und ad wie BD, oder CE; denn die Kräfte verhalten ſich wie die Räume, wodurch ſie mit gleichförmiger, ungehinderter Bewegung einerley Materie in gleicher Zeit fortzurücken vermögen. §. 23. Hat aber das Verhältnis Aa : ad = AC : CE überall bey dieſen Linien ſtatt; ſo müſſen nothwendig alle Punkte, wie d, in der Diagonale des Parallelogramms befindlich ſeyn. Denn es ſey die Zeit, worinn die Kraft A den Effekt Ah leiſtet, gleich der Zeit, worinn die Kraft B den Effekt he mittheilt; ſo wird, weil die Bewegung gleichförmig, Ah : he = AC : BD. Wegen Aehnlichkeit der Dreyecke Aad und Ahe, werden alſo die

Punkte d und e in der nämlichen geraden Linie, und weil Aa : ad = AC : CE = AC : BD, in der Diagonale des Parallelogramms, deſſen Seiten AC und BD, liegen.

Gleiches erhellt, wenn wir die in zwey gleichen Zeiten erzeugten Effekte betrachten. Denn da vermöge des angenommenen, dg parallel und = Aa; und ge parallel, und = ad; ſo iſt auch Ah = 2 Aa, und he = 2 ad, daher, wie vorhin, Ah: he = Aa: ad.

Dies deſto beſſer zu verſtehen, wollen wir anmerken, daß dieſer Satz nicht nur alsdenn wahr iſt, 1.) wenn die Kräfte drücken, und ihre Wirkung nur augenblicklich iſt; ſondern auch, 2.) wenn die von den Kräften entſtandenen Reizungen zwar fortdauern, aber keine Bewegung hervorbringen, weil ſie in jedem Augenblick wieder vernichtet werden. Nicht minder hat er 3.) ſtatt, wenn eine von den vorhergehenden Preſſungen erzeugte Geſchwindigkeit in dem bewegten Körper übrig geblieben, und die ihre Wirkungen in jedem Augenblick fortſetzenden oder wiederholenden Kräfte ſich beſtändig verhalten, wie AC: BD. Auch hier kann man die einzelnen Kräfte als für ſich wirkend betrachten, wovon die eine in dg, die andere in ge Bewegung hervorbringt, ſo daß der Punkt e in der Diagonale befindlich: denn dies vorausgeſezt, läßt ſich die im erſten Augenblick erlangte Geſchwindigkeit als die Diagonale, oder als eine ſolche anſehen, womit der Körper nach der Diagonale durch den Theil ef fortrückt. 4.) Ja, es iſt nicht einmal nothwendig, daß die bewegenden Kräfte durch die ganze Bewegung unveränderlich und beſtändig einerley ſind; es iſt genug, daß ſie ſich beſtän-

dig verhalten, wie AC : BD. 5.) **Verſteht man** durch AC und BD keine drückenden Kräfte, ſondern auf einmal dem Körper in A eingedrückte Geſchwindigkeiten; ſo entſteht daraus eine zuſammengeſetzte, durch die Diagonale ausgedrückte Geſchwindigkeit, welches eben ſo erwieſen wird.

Da aber die Kräfte ſich verhalten wie die Räume, wodurch ſie einerley Materie mit gleichförmiger Bewegung in gleicher Zeit bewegen können, §. 23. und die Kraft AE eben den Körper in gleicher Zeit von A nach E bewegen kann, worinn er von der Kraft A von A nach C, oder von der Kraft B von B nach D bewegt wird, ſo ſchlieſen wir daher:

Die Kraft AE, die der Größe und Richtung nach ſich wie die Diagonale des Parallelogramms verhält, kann eben das ausrichten, was die beyden Seitenkräfte BD und AC, die ebenfalls der Größe und Richtung nach ſich, wie dieſe Linien BD und AC verhalten.

Anmerkung. Die Wahrheit dieſes Grundſatzes, eines der allgemeinſten und fruchtbarſten in der Mechanik, wird noch auf andere Art aus den im vorhergehenden beſtätigten Geſetzen der Kräfte erwieſen. Die Maſſe a (Taf. I. Fig. 1.) werde von den drey Kräften ea, ad, fa, dergeſtalt getrieben, daß die Kraft fa mit den beyden andern, ea und ad, im Gleichgewicht iſt. Es iſt daher kein Zweifel, daß die Kräfte ea und ad Hinderniſſe ſind, die die Kraft fa überwältigen muß, und umgekehrt fa ein Widerſtand, den die Kräfte ea und ad überwinden müſſen, wenn eine Bewegung erfolgen ſoll.

Ferner

Ferner ſey die Kraft ea = A, die Kraft ad = B, fa = C, das Element des Raums nh, wodurch die Maſſe a von der Kraft A bewegt wird, = dx; ſo wie der Raum, wodurch in eben dem Augenblick die Maſſe a von der Kraft B getrieben wird, = dy; ſo erhellt, daß die Gegenwirkung der Kraft fa = Adx + Bdy. §. 16. 4. und 22. 23. **Vorl.** und §. 2. Zuſ. Es ſey auch df das Element des Raums, wodurch ſich die Kraft fa in einem Zeittheile zugleich mit der Trägheit a bewegt, ſo iſt der den Kräften ea und ad entgegengeſezte Widerſtand = C. df. Dieſe Kräfte müſſen aber mit einander im Gleichgewicht ſeyn; daher Adx + Bdy = — C. df, wo df verneint geſezt wird, weil die Bewegung in Rückſicht df in entgegengeſezter Richtung geſchieht.

Um nun dx, dy und df zu beſtimmen, ſetze man, die Maſſe a ſey von a nach h durch das Element des Raums ah fortgerückt. Betrachtet man an als einen Kreisbogen, deſſen Mittelpunkt in e; ſo iſt dx = nh, und ae iſt mit he für gleichlaufend zu achten, weil die Punkte a und h einander unendlich nahe ſind; daher iſt auch der Winkel cae = che. Dieſer Winkel heiſe α, und der ganze Sinus ſey = 1; ſo wird wegen dem rechten Winkel n, nh = dx = ah. coſ. α. Ferner ſey der Winkel ead = β, und der Winkel daf = γ, ſo findet man eben ſo dy = ah. coſ. $(\alpha + \beta)$; und df = ah. coſ. $(\alpha + \beta + \gamma)$. Dieſer Coſinus muß aber bejaht genommen werden, weil der Winkel fac die Ergänzung der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ zu 360° iſt.

Demnach iſt A. coſ. α + B. coſ. $(\alpha + \beta)$ + C. coſ. $(\alpha + \beta + \gamma) = 0$. Aber coſ. $(\alpha + \beta)$ = coſ. α coſ. β — ſin. α. ſin. β, wie aus der Trigonometrie bekannt iſt; daher hat man A. coſ. α + B. coſ. α coſ. β — B ſin. α. ſin. β + C. coſ. α. coſ. $(\beta + \gamma)$ — C. ſin. α. ſin. $(\beta + \gamma) = 0$, welche Gleichung in folgende einfache aufgelöſt wird:

1.) A. coſ. α + B. coſ. α. coſ. β + C. coſ. α coſ. $(\beta + \gamma) = 0$, und

2.) B. ſin. α. ſin. β + C. ſin. $(\beta + \gamma) = 0$, die wieder in andere verwandelt werden:

a) A + B. coſ. β + C. coſ. $(\beta + \gamma) = 0$.

b) B. ſin. β + C. ſin. $(\beta + \gamma) = 0$.

Aus der lezten Gleichung wird hergeleitet B : C = — ſin. $(\beta + \gamma)$: ſin. β. Aber ſin. $(\beta + \gamma)$ = — ſin. fae; weil fae die Ergänzung der Winkel $\beta + \gamma$ zu 360°. Daher wird B : C = ſin. fae : ſin. β, welches Verhältniß das Parallelogramm der Kräfte, wobey es allein ſeyn kann, erweiſt. Denn es zeigt an, daß ſich die eine Seitenkraft zur mittlern Kraft verhält, wie der Sinus des Winkels, den die mittlere Kraft mit der andern Seitenkraft macht, zum Sinus des von den Seitenkräften ſelbſt eingeſchloſſenen Winkels, welches bekanntlich eine Eigenſchaft und folglich ein Kennzeichen des Parallelogramms iſt. Sucht man aus der Gleichung (b) den Werth der Kraft B, und ſezt ihn in die Gleichung (a); ſo findet man eben ſo die Verhältnis der Kraft A zur Kraft C. Denn es wird

B =

$$B = \frac{C.\,\sin.\,fae}{\sin.\,\beta}\text{, und daher}$$

$$A + \frac{C.\,\sin.\,fae.\,\mathrm{coſ}.\,\beta}{\sin.\,\beta} + C.\,\mathrm{coſ}.\,fae = o,$$

oder $A.\,\sin.\,\beta + C.\,\sin.\,fae.\,\mathrm{coſ}.\,\beta + C.\,\mathrm{coſ}.\,fae.\,\sin.\,\beta = o$. Aber $\sin.\,fae.\,\mathrm{coſ}.\,\beta. + \mathrm{coſ}.\,fae.\,\sin.\,\beta = \sin.\,(\beta + fae)$, wie aus der Trigonometrie bekannt iſt. Demnach wird $A.\,\sin.\,\beta = -C.\,\sin.\,(\beta + fae)$. Daher ferner $A : C = -\sin.\,(\beta + fae) : \sin.\,\beta$. Aber $-\sin.\,(\beta + fae) = +\sin.\,fad$; daher $A : C = \sin.\,\gamma : \sin.\,\beta$, welches wiederum eine Eigenſchaft des Parallelogramms ausdrückt. Mehr hiervon kann in den Memoires de l'Académie de Berlin, Année 1742. pag. 170. &c. und in den Actis Petrop. Tom. I. p. 126. nachgeleſen werden.

§. 60.

Hieraus folgt, daß ſich in die Stelle zwoer Kräfte AC und BD, eine einzige ſetzen läßt, die in gleicher Zeit eben den Effekt hervorbringt. Dieſe Kraft wird gefunden, wenn man das Parallelogramm BCED beſchreibt, für deſſen Seiten jene, der Größe und Richtung nach, gegebenen Kräfte genommen werden. Hier richtet die Kraft BE eben das aus, was die beyden Seitenkräfte BC und BD zuſammen.

§. 61.

Daher läßt ſich jede gegebene Kraft BE in zwo andere zerlegen, die vereinigt eben den Effekt leiſten, worzu jene allein hinreichend iſt. Zu dem Ende be-

ſchreibe man über der Linie BE ein Dreyeck BCE, ſo entſteht eben der Effekt, man mag die Kraft BE anwenden, oder in ihre Stelle die beyden BC und CE ſetzen, wenn nur Größe und Richtung dieſer Kräfte ſich wie die Linien BC und CE verhalten. §. 58. 59.

§. 62.

Sind zugleich mehrere Kräfte, z. B. drey, AB, AC und AD, gegeben, ſo findet man ohne Schwierigkeit die Kraft AF (Taf. I. Fig. 6.) die, dem Effekt nach, mit jenen dreyen zuſammengenommen einerley iſt. Man darf nur über den Linien AB und AC ein Parallelogramm verzeichnen; ſo zeigt die Diagonale AE ſowohl die Größe, als Richtung einer dritten Kraft an, die ſich in Rückſicht des Effekts für AB und AC ſetzen läßt. §. 60. Ueber der gefundenen Linie AE und der Linie AD verzeichne man ein ander Parallelogramm, ſo läßt ſich ſeine Diagonale für AE und AD, folglich auch für alle drey, AB, AC und AD, ſetzen.

§. 63.

Demnach wird auch die Kraft leicht gefunden, die allein zwey, drey, oder mehrern andern gegebenen das Gleichgewicht hält. Denn da (Taf. I. Fig. 6.) aus AB und AC eben der Effekt, wie aus AE, entſteht; ſo verlängere man die Diagonale EA, und nehme AG = EA; ſo wird AG die Größe und Richtung der Kraft ſeyn, die mit AC und AB im Gleichgewicht ſeyn wird. §. 58.

Verlängert man die Diagonale AF, bis AF = AH; ſo zeigt die Linie AH die Größe und Richtung der Kraft an, die dem vereinigten Widerſtande der drey gegebenen Kräfte AB, AC und AD gewachſen iſt.

§. 64.

Auch erhellet, daß die Größen und Richtungen dreyer Kräfte, die in einer Ebene im Gleichgewicht, und deren Richtungen einander nicht gerad entgegengeſezt ſind, ſich wie Seiten und Diagonale eines Parallelogramms gegen einander verhalten müſſen. Sind mehrere Kräfte vorhanden, ſo müſſen ſie ſich nach den Regeln §. 62. 63. gegen einander verhalten.

§. 65.

Hieraus ſchließt man ferner, daß zwo Kräfte AD und AE (Taf. I. Fig. 7. 8.) die auf einen und denſelben Punkt wirken, einander in ihren Wirkungen unterſtützen, wenn ihre Richtungen einen ſpitzen Winkel einſchlieſen, wie Fig. 7; einander aber wenigſtens zum Theil hindern, wenn dieſer Winkel ſtumpf iſt, wie Fig 8. Dies erhellt aber ohne Umſchweife, wenn AD in die beyden Seitenkräfte AB und AC zerlegt wird; alsdenn iſt AB im Fall (Fig. 7.) der unterſtützende; im andern aber (Fig. 8) der hindernde Theil. Dies iſt der Grund, warum eine kleinere Kraft in gewiſſer Lage eben ſo viel, als eine oder mehrere andere größere, auszurichten vermag.

§. 66.

Der Theil, womit die eine der ſchiefwirkenden Kräfte die andere entweder unterſtüzt, oder hindert, wird folgendermaaßen gefunden: Es ſey die ganze Kraft K und o der Winkel, den die Richtungen der Kräfte einſchlieſen; ſo verhält ſich der ganze Sinus zu coſ. o, wie die ganze Kraft AD, oder K zum unterſtützenden oder hindernden Theil; dieſer Theil iſt alſo allemal $= \frac{K \text{ coſ. } O}{\text{ſin. tot.}}$

§. 67.

Iſt der Winkel $o = 90°$, ſo verſchwindet coſ. o. daher die Kräfte ſelbſt, deren Richtungen einen rechten Winkel einſchlieſen, oder ſenkrecht zuſummengeſezt ſind, einander weder helfen, noch hindern.

Da alſo zwo Kräfte, deren Richtungen unter einem rechten Winkel zuſammenſtoßen, einander in der Bewegung weder helfen, noch hindern; ſo wird auch auſer der Richtung der einen von der andern nichts geändert. Je ſpitzer aber der Winkel iſt, deſto mehr wird die eine die von der andern hervorgebrachte Bewegung vermehren, ſo wie ſie auch deſto mehr hindern wird, je ſtumpfer dieſer Winkel iſt.

§. 68.

Eben ſo begreift man: daß die Kräfte AB und AD, (Taf. I. Fig. 9) die eben ſo viel, als die Kraft AC, in A auszurichten vermögen, ſich umgekehrt verhalten, wie die aus irgend einem Punkte der Linie AC auf die Richtungen AB und AD gefällten Lothe, CE und CF.

Denn es ſey AC der ganze Sinus für CE und CF; ſo iſt CE der Sinus des Winkels x, und CF der Sinus des Winkels o. Man ergänze das Parallelogramm ABCD, ſo iſt $x = ACB$; daher $AB : AD = ſin.\, ACB : ſin.\, o = ſin.\, x : ſin.\, o$, folglich $AB : AD = CE : CF$. Eben dies gilt von IG und IH, und den übrigen eben ſo gezogenen Lothen, denn es iſt $IG : IH = CF : CE$.

§. 69.

Auch verhält ſich die mittlere Kraft, wenn ſie mit den beyden Seitenkräften im Gleichgewicht iſt, zu der einen von ihnen, umgekehrt, wie die von einem

Punkte

Punkte in der Richtung der andern Kraft auf die Richtungen der mittlern und der mit ihr verglichenen Seitenkraft, gefällten Lothe.

Denn es verhält ſich (Taf. I. Fig. 10.) AC, wie ſin. o, und AD, wie ſin. x. Sezt man aber AB für den ganzen Sinus, ſo verhält ſich BE, wie ſin. (x + z) = ſin. o = ſin. BAD, und BF, wie ſin. x, daher AC : AD = BE : BF.

§. 70.

Dieſes vom Gleichgewicht der Kräfte vorausgeſezt, laſſet uns die **Geſetze der Bewegung ſchwerer Körper durch geneigte Linien oder Ebenen**, wie AB (Taf. I. Fig. 11.) unterſuchen: Eine Linie AB heißt **geneigt**, wenn ſie mit der Horizontallinie BC einen ſpitzen Winkel macht. Eine Fläche von gleicher Lage, deren Punkte alle in einer Ebene ſind, heißt eine **geneigte Ebene.**

§. 71.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir folgendes vorausſchicken: Ein Theil der Schwere wird von der Linie AB, die wir unbiegſam und unbeweglich annehmen, unterſtüzt; daher kann die Materie T von dieſem Theile nicht zum Fall durch die Ebene getrieben werden; folglich bewegt ſie ſich nur mit dem Theile der ganzen Kraft, der von der Ebene nicht unterſtüzt iſt. Die ganze Kraft der Schwere ſey alſo durch die Vertikallinie TD vorgeſtellt, die ſowohl die Größe, als Richtung der natürlichen Schwere ausdrückt. Dieſe Kraft läßt ſich in zwo andere TF und TE zerlegen. Der erſtere Theil TF, er ſey ſo groß als er will, dient zur Bewegung des Körpers durch

die

die geneigte Linie AB, die ſeine Richtung iſt; da hingegen der andere, völlig ſenkrecht aufſtehende, TE, ſchlechterdings nichts zur Bewegung des Körpers beyträgt. Er thut weiter nichts, als daß der Körper gegen die Ebene oder Linie AB drückt. Dies vorausgeſezt iſt klar, daß die natürliche Schwere ſich verhält zu dem Theile derſelben, der den Effekt erzeugt, wie TD zu TF. Die Größe deſſelben beruht alſo auf dem Verhältnis der Linien TD und TF. Es iſt aber TD mit AC gleichlaufend; daher FDT und BAC ähnliche Dreyecke, und TD : TF = AB : AC. Man heiſe alſo die natürliche Schwere g, die Länge der Ebene L, ihre Höhe h; ſo wird $L : h = g : \frac{hg}{L}$, d. i. die natürliche Schwere verhält ſich zu der, die über AB wirkt, wie L : h, oder wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe. Demnach iſt

1.) **die Kraft, die den Fall bewirkt, deſto größer, je mehr die Ebene erhöht iſt; denn hier wächſt $\frac{h}{L}$, und**

2.) **je mehr ſich die Ebene gegen den Horizont neigt, deſto kleiner iſt der Theil der Schwere, der den Körper zur Bewegung antreibt. Und**

3.) **in der Horizontallinie ſelbſt verſchwindet** dieſer Theil; ſo groß alſo auch das Gewicht des Körpers, ſo kann ihn doch die geringſte Kraft nach der Horizontallinie bewegen. Denn hier iſt h = 0.

§. 72.

Daher begreift man auch, daß die Schwere, ob ſie gleich in den geneigten Linien mit geringerer Kraft wirkt, als die natürliche Schwere in der Vertikallinie, doch in der geneigten Linie ſowohl als in der vertikalen, eine während des Falles gleichförmig beſchleunigende Kraft iſt. Demnach gilt eben das, was von dem freyen Falle ſchwerer Körper in der Vertikallinie erwieſen worden, auch vom Fall durch geneigte Linien. Nämlich

1.) daß ſich die Geſchwindigkeiten verhalten, wie die Zeiten, und

2.) daß ſich die zurückgelegten Räume verhalten, wie die Quadrate der Zeiten, oder wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten am Ende des Falls.

§. 73.

Da die Beſchleunigung in der Vertikallinie zu der in der geneigten, ſich beſtändig verhält, wie $g : \frac{gh}{L} = L : h$, d. i. wie die Länge zur Höhe, §. 71. ſo müſſen ſich die von ihnen in gleicher Zeit erzeugten Effekte eben ſo verhalten; oder die in gleicher Zeit in der vertikalen und geneigten Linie zurückgelegten Räume verhalten ſich gegen einander, wie die Länge AB der geneigten Linie zur Höhe AC. (Taf. I. Fig. 12.) (§. 24.)

§. 74.

Demnach läßt ſich der Theil der geneigten Linie, der in eben der Zeit von dem fallenden

Körper

Körper zurückgelegt wird, worinn er beym freyen Fall die ganze Vertikallinie durchlaufen hätte, leicht beſtimmen. Denn fällt man von dem äuſerſten Punkte C der Vertikallinie auf BA das Loth CD; ſo iſt AD der in der Linie AB zurückgelegte Raum. §. 73. Denn es verhält ſich im rechtwinklichten Dreyeck BAC, AB : AC = AC : AD.

§. 75.

Nicht weniger iſt offenbar, daß die in der geneigten Linie in eben der Zeit erzeugte Geſchwindigkeit, worinn die vertikale durchlaufen werden kann, zu der im Fall durch die vertikale erlangten Geſchwindigkeit ſich verhält, wie die Höhe der geneigten Linie zu ihrer Länge.

Denn die Räume in der vertikalen und geneigten Linie, verhalten ſich wie AC : AD = AB : AC. §. 73. folglich auch die Geſchwindigkeiten am Ende des Falles wie 2AB : 2AC. §. 49. 72. oder wie AB : AC, d. i. wie die Länge der geneigten Linie zu ihrer Höhe.

§. 76.

Hieraus ſchließt man auch (Taf. I. Fig. 13.) daß wenn vom oberſten Punkte A im Durchmeſſer eines Kreiſes AB willkührlich Sehnen AE gezogen werden, ein ſchwerer Körper durch alle dieſe Sehnen in gleicher, und zwar in eben der Zeit, worinn er den ganzen Durchmeſſer AB durchlaufen kann, fallen muß.

Denn man verlängere die Linien AE bis in F, und ziehe die Linien BE; ſo iſt AEB ein rechter Winkel. Daher AF : AB = AB : AE; folglich werden alle

alle Sehnen, wie AE, in eben der Zeit durchlaufen, worinn im freyen Falle der Durchmeſſer AB zurückgelegt wird. §. 73.

§. 77.

Daß dieſer gleichzeitige Fall wirklich ſtatt hat, iſt ausgemacht; aber die wahre Beſchaffenheit und den Grund deſſelben wird uns die aufmerkſame Betrachtung der in gleichhohen geneigten Ebenen und Linien wirkenden Beſchleunigungen lehren. Denn die Beſchleunigungen verhalten ſich ihrer innern Größe nach beſtändig, wie die Längen dieſer Sehnen. Folglich müſſen ſich ihre Effekte in dieſen Sehnen eben ſo verhalten. Denn die Beſchleunigungen verhalten ſich wie $\frac{h.g}{L}$. Sind alſo g und h beſtändig, $\frac{1}{L}$ aber veränderlich; ſo müſſen ſich die Kräfte verkehrt verhalten, wie die Längen der Ebenen. Es iſt aber $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB}$, daher $\frac{AB^2}{AF} = AE$; aber AB^2 beſtändig: alſo $\frac{1}{AF} = AE$, oder die auf den Sehnen wirkende Beſchleunigung entſpricht ihrer Länge.

§. 78.

Fällt ein von der Schwere getriebener Körper, durch die geneigte Linie AB, (Taf. I. Fig. 12.) ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit mit derjenigen einer-

einerley, die er im Fall durch die Höhe AB in C erlangt hätte. Denn es ſey die Geſchwindigkeit in C $= h$, ſo iſt die Geſchwindigkeit in D $= \frac{AD}{AC} . h$. §. 75. (weil $AC : AD = h$: Geſchwindigkeit in D). Aber die Geſchwindigkeit in D verhält ſich zur Geſchwindigkeit in B, wie $\sqrt{AD} : \sqrt{AB}$. §. 72. daher

$$\sqrt{AD} : \sqrt{AB} = \frac{AD}{AC} . h : \sqrt{AD} . \frac{\sqrt{AB}}{AC} . h,$$

und dieſe leztere Geſchwindigkeit iſt in B. Die Geſchwindigkeit in B verhält ſich alſo zur Geſchwindigkeit in C, wie

$$\frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} . h : h = \frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} : 1.$$

Aber $AB : AC = AC : AD$; daher $AC = \sqrt{AD} . \sqrt{AB}$, folglich $\frac{\sqrt{AD} . \sqrt{AB}}{AC} = 1$. Demnach verhält ſich die Geſchwindigkeit in B zu der in C wie $1 : 1$, d. i. ſie iſt ihr gleich.

§. 79.

Demnach ſind die im Fall durch die Ebenen AB, BC, CD (Taf. II. Fig. 1. n. 1.) erlangten Geſchwindigkeiten gleich den im Fall durch die Höhen der Ebenen Af, Bh, Ck zu erlangenden Geſchwindigkeiten, und alle dieſe Geſchwindigkeiten zuſammengenommen gleich der, die im Fall durch die ganze Höhe AE im Körper entſteht. Da ſich die krumme Linie AGF aus unzähligen kleinen geneigten Ebenen oder Linien unter einem ſehr ſtumpfen Winkel zuſammengeſezt denken läßt; ſo erhellt auch

1.) Daß

1.) daß im Fall durch eine jede geneigte, gerade oder krumme Linie eine Geſchwindigkeit erlangt wird, die ſich wie die Quadratwurzel der vertikalen Höhe AE verhält; daß ſich alſo

2.) jede Geſchwindigkeit durch dieſe Quadratwurzel andeuten läßt.

§. 80.

Fällt daher ein Körper durch Ebenen von einerley Neigung, ſo wird aus dem gegebenen Raum des Falles, wodurch eine gegebene Geſchwindigkeit erlangt worden, leicht ein anderer Raum gefunden, wodurch der Körper fallen muß, um am Ende des Falles eine andere gegebene Geſchwindigkeit zu erlangen. Denn es ſey h die im Fall auf der geneigten Ebene durch den Raum r erlangte Geſchwindigkeit; man ſoll den, der gegebenen Geſchwindigkeit H zukommenden Raum x finden: ſo wird $r : x = hh : HH$, und $x = r . \frac{HH}{hh}$. §. 72. 2.

Es iſt klar, daß man in ſolchen Fällen nur die vertikalen Höhen zu rechnen braucht.

§. 81.

In Anſehung der Zeit des Falles iſt zu merken:

1.) die Zeit, worinn die geneigte Linie AB ſelbſt (Taf. I. Fig. 12.) durchlaufen wird, verhält ſich zu der Zeit, worinn ihre Höhe AC im freyen Falle zurückgelegt wird, wie AB : AC, oder wie die Länge der Linie zu ihrer Höhe.

Denn AC und AD werden in gleicher Zeit zurückgelegt; daher iſt die Zeit in C und D einerley. Aber

die Zeit in D verhält ſich zur Zeit in B, wie $\sqrt{AD} : \sqrt{AB}$. §. 72. 2. Aber $AB : AC = AC : AD$, und $AC = \sqrt{AD}.\sqrt{AB}$; daher $\frac{AC}{\sqrt{AB}} = \sqrt{AD}$, und

$$\sqrt{AD} : \sqrt{AB} = \frac{AC}{\sqrt{AB}} : \sqrt{AB} = AC : AB.$$

2.) Eben ſo iſt (Taf. II. Fig. 1. n. 1. 2.) offenbar, daß bey Ebenen von einerley Neigung die Zeiten ſich unter einander verhalten wie die Quadratwurzeln der Längen dieſer Ebenen. §. 72. 2.

3.) Verhalten ſich auch die Zeiten des Falles durch mehrere, aus andern Ebenen unter gewiſſen Winkeln zuſammengeſezte, geneigte Ebenen, (Taf. II. Fig. 1. n. 1. 2.) wie die Quadratwurzeln der Längen der Ebenen, wenn dieſe Ebenen ähnlich, und ähnliche Theile derſelben auf ähnliche Art an einander liegen, und unter gleichen Winkeln gegen den Horizont geneigt ſind.

Denn die Ebenen AB, BC, CD, und ab, bc, cd haben ähnliche Lage; daher ſind leztere als Theile der erſtern anzuſehen; aber die Zeiten durch die ſämmtlichen ähnlich liegenden, kleinern ſowohl als größern, verhalten ſich wie die Quadratwurzeln der Längen; folglich verhalten ſich auch die Summen der einzelnen Zeiten durch ſämmtliche Ebenen, wie die Summen der Quadratwurzeln aus den Längen; da aber die kleinern Ebenen ſich unter einander verhalten, wie die größern, ſo verhalten ſich auch die Zeiten des ganzen Falles, oder die Summen der einzelnen Zeiten, wie die Quadratwurzeln der Längen der zuſammengeſezten Ebenen.

4.) Dem-

4.) Demnach verhalten ſich auch die Zeiten durch alle ähnliche krumme Linien, wie die Quadratwurzeln ihrer Längen. Und

5.) folgt aus (1) unmittelbar, daß die Zeiten durch gleich hohe unter verſchiedenen Winkeln geneigte Ebenen ſich verhalten wie die Längen der Ebenen AB und AE. (Taf. I. Fig. 12.)

§. 82.

So wie die Zeit des Falles durch alle Sehnen des Kreiſes AE (Taf. I. Fig. 13.) gleich groß iſt; iſt auch die Zeit durch andere Sehnen BE überall einerley, und zugleich der Zeit des Falles durch den Durchmeſſer gleich.

Denn ſezt man die Zeit durch den Durchmeſſer $AB = x$, durch $BE = T$, und durch $EG = t$, ſo wird nach §. 81. 1. $T : t = BE : GE$; daher $t = T . \frac{GE}{BE}$. Aber $t : x = \sqrt{GE} : \sqrt{AB}$; daher $x = \frac{t . \sqrt{AB}}{\sqrt{GE}}$ und $\frac{x\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = t$; folglich auch $\frac{x\sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = T . \frac{GE}{BE}$. Da aber $AB : BE = BE : GE$, alſo $BE = \sqrt{GE} . \sqrt{AB}$, weil EG mit AB gleichlaufend, ſo wird $\frac{x . \sqrt{GE}}{\sqrt{AB}} = \frac{T . GE}{\sqrt{GE} . \sqrt{AB}}$. Demnach iſt $x = T$, oder die Zeit durch den Durchmeſſer AB iſt der Zeit durch jede Sehne BE gleich.

Dritter Zuſatz.

Vom Fall durch krumme Linien, ins beſondere vom Fall ſchwerer Körper.

Inhalt.

§. 30. Fall durch geneigte Ebenen überhaupt. §. 31. — 33. Kraft der Schwere in den Kurven überhaupt. §. 34. Beym Fall durch Kurven geht keine Geſchwindigkeit verlohren. §. 35. 36. Geſchwindigkeit und Zeit im Fall durch Kurven überhaupt. §. 37. — 40. Anwendung auf die gleichzeitige Bewegung in der Radlinie. §. 41. 42. In ſehr kleinen Kreisbögen. §. 43. In andern Kurven. §. 44. Geſetz der Kräfte, mehrere gerade Linien in gleicher Zeit zurückzulegen. §. 45. — 47. Andere gleichzeitige Linien zu finden. §. 48. — 50. Allgemeine Beſtimmungsregeln der Kräfte in den Kurven. §. 51. Aus der Beſchaffenheit des Falles die Kurve, worinn der Fall geſchieht, zu erkennen. §. 52. Gleichungen für die paracentriſche gleichzeitige Linie. §. 53. Durch iſoperimetriſche Rechnung die Linie des geſchwindeſten Falles zu finden.

§. 30.

Da wir die Bewegung in gerader Linie, im vorhergehenden Zuſatz hinlänglich erklärt haben, ſo iſt nun die in krummen Linien zu betrachten. Dieſe iſt zweyerley: in der einen, deren allgemeine Regeln wir im gegenwärtigen erklären werden, wird den von irgend einer Kraft gereizten Körpern, von den Linien ſelbſt, worinn ſie laufen, dergeſtalt widerſtanden, als wenn die Körper in Kanälen eingeſchloſſen wären, wodurch ſie ſich frey zu bewegen gehindert würden.

den. In der **andern** beſchreiben die Körper, frey und von einem ſolchen Widerſtande ungehindert, krumme Linien. Dieſe leztere Bewegung werden wir unten erklären. In gegenwärtigem Zuſatz wollen wir blos die erſtere unterſuchen, und hier zuerſt und vorzüglich die von der Schwere und andern gleichförmigen und unveränderlichen Kräften erzeugte Bewegung betrachten. Zu den **krummen Linien** kann man auch die gerade zählen. Denn eben die Gleichung, die eine gewiſſe Gattung krummer Linien beſtimmt, begreift zugleich die gerade unter ſich, die herauskommt, wenn die Gleichung für die Kurve gehörig ausgedrückt wird. So geht der Kreis in die gerade Linie über, wenn der Halbmeſſer unendlich groß geſezt wird. Zuerſt wollen wir alſo den **Fall** ſchwerer Körper **in gerader Linie**, als den einfachſten, betrachten. Iſt die Linie vertikal, ſo iſt der Fall frey; das dahin gehörige iſt im vorhergehenden Zuſatz abgehandelt worden. Daher ſind nur noch die geraden geneigten Linien übrig. Was die Bewegung in dieſen Linien betrifft, wo keine andern Kräfte, als die Schwere, oder andere eben ſo unveränderliche, angenommen werden, iſt aus dem vorhergehenden ſehr leicht zu begreifen. Denn dieſe Bewegung läßt ſich als frey anſehen, wenn nur der Werth der Beſchleunigung gehörig ausgedrückt wird, und die Körper als Punkte, oder alle ihre Theile mit gleicher Geſchwindigkeit verſehen, angenommen werden.

Betrachten wir alſo den von der Schwere entſtandenen Fall, (bey andern unveränderlichen Kräften verhält es ſich eben ſo,) ſo kann man entweder die ganze Kraft der Schwere g in ihrer vertikalen

Richtung, oder ihren Theil $\frac{h}{L}g$ in der Richtung der geneigten Linie, deren Höhe h und die Länge L iſt, annehmen. Denn $\frac{h}{L}g$ iſt die beſtändige Kraft, womit der Körper in der geneigten Ebene fällt. §. 71. Vorl. Dies in acht genommen, gilt offenbar alles vom Falle durch geneigte Linien, was vorhin vom Fall in der vertikalen geſagt worden. Denn

1.) was die Geſchwindigkeiten betrifft; ſo folgt aus §. 10. daß, wenn der Körper im Anfang des Falls ruht, (welches allemal zu verſtehen, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird,)

a) die Geſchwindigkeiten ſich verhalten wie die Quadratwurzeln der durchlaufenen Räume, und

b) eben ſo §. 10. 2. wird im Fall durch die Länge der Ebene eben die Geſchwindigkeit erlangt, die der Körper im Fall durch die Vertikallinie erhält. Denn ſezt man die Geſchwindigkeiten hier und dort gleich groß, ſo müſſen ſich die durchlaufenen Räume verhalten wie $g : \frac{h}{L}g = L : h$.

c) Nicht weniger werden nach §. 14. die in der Vertikallinie und in der geneigten Ebene in gleicher Zeit erlangten Geſchwindigkeiten ſich verhalten, wie die reizenden Kräfte. Denn

Denn es iſt $gt = v$, daher, wenn t beſtändig, $g = v$. Demnach verhalten ſich die in gleicher Zeit in der Vertikallinie und in der geneigten Ebene erzeugten Geſchwindigkeiten wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe.

2.) Was den Raum betrifft, ſchlieſen wir aus §. 15. 3. daß die in gleicher Zeit in der Vertikallinie und auf der geneigten Ebene zurückgelegten Räume ſich verhalten, wie die Länge der Ebene zu ihrer Höhe.

3.) Endlich verhalten ſich die Zeiten

a) im Fall durch einerley Ebene wie die Quadratwurzeln der Räume. §. 15. 2.

b) Die Zeit durch die geneigte Ebene verhält ſich zur Zeit des freyen Falles durch die Höhe der Ebene, wie ihre Länge zur Höhe. Denn es iſt $gt = v$. §. 14. 2. Wenn v beſtändig, wird $t = \frac{1}{g}$. Daher verhält ſich die Zeit in der Vertikallinie wie $\frac{1}{g}$, und die Zeit über der geneigten Ebene wie $\frac{L}{hg}$, folglich dieſe Zeiten unter einander wie $h : L$, d. i. wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge, u. ſ. f.

§. 31.

Wir wollen hier nicht wiederholen, was von der Bewegung der Körper durch geneigte Linien bereits oben geſagt worden; da aus dem vorigen der große

Nutzen der algebraiſchen Gleichungen, die uns auf einem leichtern und kürzern Weg zu den Wahrheiten führen, als die ſynthetiſche Beweisart, zur Genüge einleuchtend iſt. Laßt uns hier nur folgenden, leicht begreiflichen Satz anmerken: die Geſchwindigkeit, die ein ſchwerer Körper im Fall durch jede Kurve erhält, iſt mit der einerley, die er im Fall durch die vertikale Höhe der Kurve erlangt; dies bahnt uns den Weg zu Beſtimmung der Bewegung der durch krumme Linien fallenden Körper. Zugleich iſt aber nicht auſer Acht zu laſſen, daß die Beſchleunigung hier überall unveränderlich geſezt wird.

§. 32.

Um den Fall ſchwerer Körper in Kurven leichter einzuſehen, ſchicken wir folgendes voraus. Es ſey ADL (Taf. II. Fig. 2.) eine Kurve, von welcher Gattung man will, ſo läßt ſich die Bewegung des Körpers in ihr in einer unendlich kleinen Zeit, als eine Bewegung auf einer kleinen geneigten geraden Linie anſehen; und alsdenn iſt die Bewegung durch die ganze Kurve eben ſo, als geſchähe ſie durch eine unendliche Menge ſolcher geneigten Linien. Um alſo die Function der Beſchleunigung zu finden, darf man nur das Verhältnis zwiſchen den Längen und Höhen dieſer Flächen, in veränderlichen Größen ausgedrückt, ſuchen.

Es ſey DE ein Element der Kurve AEL, ihre Axe horizontal, ihre Abſciſſe AB, Ordinate BD. Es ſey auch DIE ein Elementardreyeck, ſo aus den Elementen der Abſciſſe, Ordinate und Kurve beſteht. FGH ſey ein Dreyeck, wo FH die Tangente der Kurve, die hier als eine geneigte Ebene angeſehen

geſehen wird; deren Höhe FG, und die horizontale Grundlinie GH. So iſt DE : EI = FH : FG. Denn I und G ſind rechte Winkel, und CE mit FG parallel. Dieſes Verhältnis iſt aber für alle Punkte der Kurve einerley. Es ſey alſo AB = x, BD = y; ſo iſt EI = dy. Da aber die Beſchleunigung durch alle geneigte Linien $= \frac{h}{L} g$, wenn die natürliche Schwere = g, ſo iſt ſie auch hier $\frac{FG}{FH}$ g. Setzet AD = s, daß DE = ds, ſo iſt die Beſchleunigung in allen Punkten der Kurve ADL $= \frac{dy}{ds} . g$. Die Kraft aber, die in allen Punkten überall ſenkrecht in die Kurve wirkt, iſt $= \frac{dx}{ds} g$. Hier werden wir nur die erſtere, die Tangentialkraft, betrachten, deren Kenntnis am meiſten zu unſerm Endzweck dient.

§. 33.

Da (§. 7.) ngdy = vdv; ſo iſt auch in jeder Kurve, wodurch die ſchweren Körper fallen, $\frac{ngdy}{ds}$. ds = vdv. (§. 32.) folglich

$$ngdy = vdv.$$

Wenn h die der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe, ſo iſt dy = dh, und y = h. §. 17. Demnach iſt die Geſchwindigkeit am Ende der Vertikal-

linie AG in G, mit der am Ende der Kurve AL in L einerley, wenn einerley Gewicht durch beyde fällt.

§. 34.

Es erhellt aber, daß wir in dieſer Auflöſung folgenden, bisher noch nicht erwieſenen Satz, als wahr annehmen: **Fällt eine Maſſe mit einer gegebenen Geſchwindigkeit durch eine Kurve, doch ſo, daß ihre Bewegung von einer andern Kraft weder gehindert, noch befördert wird, folglich blos auf der gleichförmigen Geſchwindigkeit, womit ſie fortrückt, beruht, ſo wird dieſe Geſchwindigkeit im Fall durch die Kurve nicht verändert.** Dies vorausgeſezt, folgt erſt, daß die beſchleunigenden Kräfte die Geſchwindigkeit der Bewegung auf andere, als die erklärte Art, weder vermehren, noch hindern können. Der ſenkrecht in die Kurve wirkende Theil der Kräfte hindert die Bewegung nicht; (§. 67. **Vorl.**) er ändert nur ihre Richtung. Nur der andere, in der Richtung der Tangente wirkende Theil, kann die Geſchwindigkeit des fallenden Körpers ändern. Daher iſt das, was wir daraus geſchloſſen haben, auſſer Zweifel, wo nicht vielleicht die Geſchwindigkeit von der Kurve ſelbſt geändert wird. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß wir hier das von der Rauhigkeit der Fläche entſpringende Hindernis der Bewegung, die ſogenannte **Friction**, übergehen.

Dieſer angenommene Satz wird folgendergeſtalt bewieſen: Es ſey BAE (Taf. I. Fig. 14) eine Kurve, oder vielmehr EA und AB zwey Elemente derſelben: machen nun dieſe Elemente, wie wir hier annehmen, einen ſolchen ſtumpfen Winkel BAE mit einander, daß der von der Tangente AD und dem Element AE einge-

eingeſchloſſene Winkel DAE unendlich klein iſt; und AC, CE Krümmungshalbmeſſer zu AE, oder Halbmeſſer der Kreiſe ſind, die in AE mit der Kurve einerley Krümmung haben: ſo iſt der Winkel ACE = DAE. Die frey bewegte Maſſe würde durch die Tangente AD fortrücken: da ſie aber dieſen Weg zu verfolgen von der Kurve gehindert wird, ſo ſcheint die Geſchwindigkeit nothwendig ſich etwas, wiewohl ſehr wenig, zu ändern, da der Körper von einer gewiſſen Kraft von der Richtung AD, die er doch beyzubehalten ſucht, ab- und nach der Richtung AE hingelenkt wird: und dies ſcheint um ſo viel mehr nothwendig zu ſeyn, da die Bewegung durch AD ſich in zwo andere zerlegen läßt, in die auf die Kurve lothrechte AF, und in AE, die nur ein Theil der Bewegung in AB iſt, womit der Körper durch die Tangente AD bewegt wurde, daß alſo nur ein Theil davon in der Bewegung durch AE übrig bleibt. Hieraus ſieht man, daß die Größe AD — AE, die den Unterſchied der Geſchwindigkeiten in den Elementen BA und EA andeutet, wenn ſie eine unendlich kleine Größe der erſten Ordnung iſt, nach angeſtellter Integration endlich wird, und wenn dies iſt, die Geſchwindigkeit des Körpers auch wirklich vermindert. Iſt aber dieſer Unterſchied nur ein Differential der zweyten oder höhern Ordnung, ſo wird er nach verrichteter Integration niemals endlich, und kann daher, da er keinen merklichen Abgang in der Geſchwindigkeit verurſacht, ganz auſer Acht gelaſſen werden.

Es läßt ſich aber erweiſen, daß dieſer Abgang der Geſchwindigkeit in dem von einem Element der Kurve zum andern fortrückenden Körper, überall ein Differential der dritten Ordnung iſt. Denn es ſey der

der Krümmungshalbmeſſer R, DE im rechtwinklichten Dreyeck DAE $= \alpha$, und EA $= ds$; ſo iſt, weil DAC ein rechter Winkel, DE : EA = EA : EC, d. i. $\alpha : ds = ds : R$, ſo daß $\alpha = \frac{ds^2}{R}$.

Aber $DA^2 = DE^2 + EA^2$. Daher $DA = \surd\left(ds^2 + \frac{ds^4}{R^2}\right)$, und der Unterſchied zwiſchen DA und AE $= \surd\left(ds^2 + \frac{ds^4}{R^2}\right) - ds = \frac{ds^3}{2R^2}$; daraus erhellt, daß die ganze Abnahme der Geſchwindigkeit hier eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung, (weil ſie $\frac{ds^3}{R}$ proportional), folglich ſchlechterdings Nichts iſt. Demnach hängt die Geſchwindigkeit in der Bewegung durch die Kurve auf keine Weiſe von ihrer Geſtalt, ſondern blos von der Höhe des Falles, ab. Doch darf der Halbmeſſer R ſelbſt nicht unendlich klein ſeyn. Denn wäre dieſes, ſo würde R^2 ein Unendlich kleines des zweyten Grads, folglich $\frac{ds^3}{R}$ ein Unendlich kleines des erſten Grads, und dann $S. \frac{ds^3}{R^2}$ eine endliche Größe ſeyn.

§. 35.

Dieſes vorausgeſchickt, laßt uns unterſuchen, auf was Art Geſchwindigkeit und bewegende Kraft

Kraft in jedem gegebenen Punkte der Kurve gefunden werden; vorausgeſezt, daß die beſchleunigenden Kräfte unveränderlich, und mit der natürlichen Schwere von gleicher Art ſind. Der Körper fällt entweder durch die Kurve, oder er ſteigt. Da aber die Schwere beſtändig niederwärts drückt, ſo iſt die Tangentialkraft im erſten Fall bejaht, im andern verneint. Daher iſt die allgemeine Gleichung (§. 7. 32.) woraus die Geſchwindigkeit in jedem Punkt beſtimt wird, $\frac{\pm gdy.ds}{ds} = vdv$, oder $\pm gdy = vdv$, oder $\pm gdy = dV$, wenn durch V die der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe verſtanden wird. Demnach iſt beſtändig $\frac{1}{2}v^2 = \pm gy$, oder $V = \pm gy$. Dieſe Gleichung für die Geſchwindigkeit iſt allgemein, wie groß auch die Kraft für ſich betrachtet iſt, womit der Körper nach Richtungen, ſenkrecht auf der Axe der Kurve, niederwärts gedrückt wird. Zuweilen muß in der Gleichung $V = \pm gy$ eine beſtändige Größe addirt werden: welches, wenn die Geſchwindigkeit der fallenden Körper in $A = o$, nicht nöthig iſt. Hat aber der in A fallende Körper ſchon eine Geſwindigkeit, oder ſteigt er vom Punkt L gegen A, in welchem Fall er allemal im Anfang dec Bewegung eine gewiſſe Geſchwindigkeit beſizt; ſo muß eine beſtändige Größe addirt, und ſolche daraus, worinn V, wenn $y = o$, übergeht, oder aus dem Werth der Größe V im Anfang der Bewegung beſtimmt werden, und die vollſtändige Gleichung für die Geſchwindigkeit wird ſeyn $V = B \pm gy$.

Daher

Daher ſieht man auch, wie der Punkt der Kurve, zu welchem ein Körper ſteigen kann, beſtimmt wird: man ſezt den Bogen der Kurve ſo groß, daß der Punkt in ihm gefunden wird. Denn da $V = B - gy$; ſo wird, wenn $V = o$, wodurch dieſer Punkt angedeutet wird, $B = gy$, und $y = \frac{B}{g}$. Da alſo y bekannt iſt, ſo läßt ſich der geſuchte Punkt in der Kurve finden.

§. 36.

Um endlich die Zeit zu finden, ſo wird ſolche, wie wir im vorigen Zuſatz deutlich ausgeführt haben, allgemein aus der Gleichung geſchloſſen $dt = \frac{dy}{v}$. Aber $dy = ds$, beym Fall in der Kurve, und v oder $\sqrt{V} = \sqrt{(B \pm gy)}$; folglich $t = S. \frac{ds}{\sqrt{(B \pm gy)}}$. Um nun die Zeit zu finden, muß v als eine Function von s, d. i. als eine aus s und beſtändigen Größen beſtehende Gleichung gegeben ſeyn. Z. B. wenn $v = s^n$, ſo wird $ſdt = S. \frac{ds}{v} = S. s^{-n} ds$, daher

$$t = \frac{1}{(1-n)s^{n-1}} + B.$$

Iſt $n-1$ bejaht, ſo wird $B = \frac{1}{o} = \infty$, wenn $s = o$, und die Zeit durch einen

einen ſehr kleinen Raum wird unmöglich; daher kann auch keine ſolche Bewegung erfolgen, noch die angenommene Bedingung in der Natur ſtatt haben. Iſt hingegen $n-1$ verneint, ſo wird $t = \frac{s^{1-n}}{1-n}$, und wenn $s = o$, ſo wird auch $B = o$, ſo allerdings mit der Wahrheit übereinſtimmt.

§. 37.

Der wichtigſte hieher gehörige Fall iſt, wo ein ſchwerer Körper in der Radlinie fällt, oder vielmehr herunter rollt: daher wollen wir ihn für andern betrachten. Es ſtelle AgE (Taf. II. Fig. 3.) eine halbe Radlinie: BFE einen Kreis vor, in deſſen Umfang der Punkt E, der die Radlinie durch Umdrehung des Kreiſes durch die Axe der Radlinie AB beſchreibt. Nun iſt aus der höhern Geometrie bekannt, daß der Bogen der Radlinie gE doppelt ſo groß, als die zugehörige Sehne EF im Kreiſe EFB. Dies vorausgeſezt, ſey der Durchmeſſer BE des Kreiſes BFE $= 2a$; die dem Bogen Eg zugehörige Linie $Ed = b$, und jeder unbeſtimmte Theil des Durchmeſſers EB $= x$, deſſen Element dx. Das Element der Radlinie gh ſey ds, und $Eg = s$. Da alſo nach §. 32. in allen Kurven die beſchleunigende Kraft der Schwere in jedem Punkte $= \frac{gdy}{ds}$, und die hier gebrauchten Zeichen geſezt, $= \frac{gdx}{ds}$; ſo läßt ſich dieſe Kraft in der Radlinie hieraus beſtimmen.

Es

Es iſt aber in dieſer Linie $2FE = gE$, oder $2\sqrt{2ax} = s$, daher $8ax = s^2$ und $sds = 4adx$; daher $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{4a}$. Demnach iſt die beſchleunigende Kraft in dee Radlinie $\frac{s}{4a} g$; daher hångt ſie überall von der Långe des Bogens ab, welches mit dem, was oben §. 22. geſagt worden, verglichen, lehrt, daß die Zeit ſowohl durch die ganze Radlinie AE, als durch jeden Bogen derſelben, wie gE oder TE, einerley und gleich groß iſt. Denn der Punkt E kann als der Mittelpunkt der Kråfte angeſehen werden. Damit aber dieſes deutlicher erhellt, laſſet uns die Geſchwindigkeit des fallenden Kȯrpers in jedem Punkt der Radlinie ſuchen, und uns dadurch den Weg zu Findung der Zeit bahnen.

Es iſt aber allgemein §. 4. $dv = pdt$; demnach iſt in der Radlinie, wo $p = \frac{s}{4a} g$, in jedem Punkt $dv = \frac{s}{4a} gdt$. Ferner $dt = \frac{ds}{v}$; $vdv = \frac{g}{4a} sds$; daher $\frac{1}{2} v^2 = - \frac{g}{8a} s^2 + B$.

Um B zu finden, muß der Punkt g in der Kurve, wo die Bewegung anfångt, beſtimmt werden. Iſt in dieſem Punkt $Ed = b$, ſo wird $EF = \sqrt{2ab}$; ſezt man nun $vv = o$, ſo åndert ſich $\frac{g}{8a} s^2$ in gb.

Daher

Daher B $= gb$, und $\frac{1}{2} v^2 = gb - \frac{g}{8a} ss$;

daraus $v = \sqrt{(\frac{8agb - gss}{4a})}$, ſo die Geſchwindigkeit in der Radlinie ausdrückt.

§. 38.

Um nun die Zeit zu finden, worinn die Radlinie und ihr Bogen von dem ſchweren Körper zurückgelegt werden, ſo ändere man $dt = \frac{dy}{v}$ (§. 7.) in

$$dt = \frac{-ds, \sqrt{4a}}{\sqrt{(8agb - gss)}} \text{ (§. 37.)} = \frac{-ds}{\sqrt{(8ab - ss)}}.$$

$$\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} = - \frac{\sqrt{8ab}.ds}{\sqrt{(8ab - ss)}} . \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{8abg}}.$$

Betrachtet man $\sqrt{8ab}$ als den Halbmeſſer eines Kreiſes; ſo wird $- \int . \frac{\sqrt{8ab}.ds}{(\sqrt{(8ab - ss)}}$, (wenn LE dieſer Halbmeſſer, und LQ $= s$) = den Bogen NE im Quadranten MNE. Und für den Fall durch den ganzen Bogen der Radlinie gE, iſt das Integral der Quadrant MNE. Denn nach geendigtem Fall in E iſt $s = o$. Auch braucht man keine beſtändige Größe zu addiren, da in g, wo der Fall anfängt, das Integral $= o$, wie ſich gebührt.

Demnach iſt die Zeit des Falles durch jeden gröſſern oder kleinern Bogen der verkehrten Radlinie,

wenn das Ende des Falles im Scheitel E, $= \frac{\text{Quadrant}}{\text{Halbmeſſer}} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$; und weil $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$ unveränderlich, ſo iſt auch die Zeit durch die ganze Radlinie und durch jeden Bogen derſelben beſtändig gleich groß und unveränderlich.

§. 39.

Die Zeit des Falles durch den Durchmeſſer 2a des Kreiſes, wovon die Radlinie erzeugt wird, iſt $= 2 \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2g}} = \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$. §. 16. Hieraus erhellt, daß die Zeit des Falles in der verkehrten Radlinie AgE, deren Scheitel in E, ſich verhält zur Zeit des Falles durch den vertikalen Durchmeſſer BE des die Radlinie erzeugenden Kreiſes BFE, wie der halbe Umfang des Kreiſes zum Durchmeſſer, oder wie 11 zu 7 beynahe.

Denn bedeutet d : p eben das, was §. 22. ſo wird dieſes Verhältnis $\frac{\frac{1}{4}p}{\frac{1}{2}d} \cdot \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}p : d$.

§. 40.

Eben dieſes wird noch leichter und kürzer auf folgende Art erwieſen. Da Ed = b; ſo iſt die Geſchwindigkeit des Körpers in einem gegebenen Punkte der Radlinie zwiſchen g und E, $= \sqrt{(2gb - 2gx)}$ §. 79. Vorl. und §. 12. Zuſ. Daher dt = —

$\frac{\sqrt{(b-x)}}{\sqrt{2g}}$. ds; und weil in der Radlinie ds = $\frac{4adx}{\sqrt{8ax}}$, ſo wird dt = $-\frac{\sqrt{4a}}{b\sqrt{g}} \cdot \frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$.
Wenn alſo AB = b (Taf. II. Fig. 10.) und AcB ein über AB beſchriebener Halbkreis, BD = x; ſo iſt Ac = $\int \cdot \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, welches, wenn x = o, in den halben Umkreis AcB übergeht. Demnach iſt die ganze Zeit des Falles in der Radlinie = $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$. $\frac{AcB}{AB}$. Aber $\frac{AcB}{AB}$ iſt das Verhältnis des halben Umkreiſes zum Durchmeſſer, oder des Quadranten zum Halbmeſſer: welches mit §. 38. übereintrifft.

§. 41.

Hieraus erhellet, wie die Zeit, worinn ein Körper in der holen Seite eines Kreisbogens fällt, durch eine Differentialgleichung beſtimmt werden kann. Die Sache, ſo von der größten Wichtigkeit iſt, beruht auf der Verhältnis der Zeit durch einen ſehr kleinen Kreisbogen, und der Zeit des Falles durch einen ſehr kleinen Bogen in der Radlinie.

Es ſey FBH ein Kreisbogen, (Taf. II. Fig. 4.) deſſen Halbmeſſer AB wir = 4a ſetzen, damit die Rechnung der vorigen deſto ähnlicher wird. Denn

das Cykloidenpendel, das in der Radlinie fällt, iſt mit der halben Radlinie von gleicher Länge, und dieſe iſt wieder doppelt ſo groß, als der Durchmeſſer des die Radlinie erzeugenden Kreiſes, oder viermal ſo groß, als der Halbmeſſer. Es ſey BE, oder der Querſinus des gegebenen Bogens FB $= b$; denn der Anfang der Bewegung wird hier in F geſezt; BG $= x$. So iſt die Geſchwindigkeit in D $= \sqrt{(2bg - 2gx)}$ §. 12. 30. 1. b. Da alſo durch den unendlich kleinen Bogen Dh, $dt = \frac{-ds}{v}$; wenn DB $= s$ (§. 15.) ſo wird hier $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2bg - 2gx)}}$.

Es iſt aber im Kreiſe das Element des Bogens $ds = \frac{4adx}{\sqrt{(8ax - xx)}}$, wenn BG $= x$. Daraus folgt

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2bg - 2gx)}} = \frac{-4adx}{\sqrt{(8ax - xx)} . \sqrt{(b - x)} . \sqrt{2g}}$$

und $t = \int . \frac{-4adx}{\sqrt{(8ax - x^2)} . \sqrt{(b - x)} . \sqrt{2g}}$.

Alles, wie vorhin, bey der Radlinie vorausgeſezt, iſt die Zeit durch den Bogen der Radlinie, der mit dem Kreisbogen FB von gleicher Höhe iſt, $= \int . \frac{-\sqrt{8ab} . ds}{\sqrt{(8ab - ss)} . \sqrt{2gb}}$. §. 38. und weil in der Rad-

linie

linie $s = \surd 8ax$, und daher $ds = \frac{4adx}{\surd 8ax}$, ſo wird

$$-\frac{\surd 8ab.ds}{\surd(8ab-ss).\surd 2gb} = \frac{-4adx}{\surd(8ab-ss).\surd 2gx} = \frac{-4adx}{\surd(8ab-8ax).\surd 2gx} = -\frac{-4adx}{\surd(8abx-8axx).\surd 2g}.$$

Setzet in der vorigen Gleichung für die Zeit im Kreisbogen $t = \int.\frac{-4adx}{\surd(8ax-xx).\surd(b-x).\surd 2g}$, x unendlich klein, ſo verſchwindet xx gegen x, und wir erhalten ſowohl für den Kreis, als für die Radlinie, einerley Gleichung $t = \int.\frac{-4adx}{\surd(8abx-8axx).\surd 2g}$.

Demnach iſt die Zeit durch unendlich kleine Kreisbogen gleich der Zeit des Falles durch die verkehrte Radlinie und ihre Bogen. Folglich kann man ſich auch unendlich kleiner Kreisbögen ſtatt der Cykloidalbögen bedienen.

§. 42.

Suchen wir ein genauer Verhältnis der Zeiten in den Bogen des Kreiſes und der Radlinie: ſo muß man von der unendlichen Reihe, worein ſich $\frac{1}{\surd(8ax-xx)}$ oder $(8ax-xx)^{-\frac{1}{2}}$ auflöſen läßt, diejenigen Glieder nehmen, die in Vergleichung mit

 den

den übrigen beträchtlich groß ſind; dergleichen ſind keine, als die beyden erſten. Demnach wird

$$\frac{1}{\sqrt{(8ax-xx)}} = \frac{1}{\sqrt{8ax}} + \frac{x}{16a\sqrt{8ax}}.$$

Daher $t = \int \frac{-4adx}{\sqrt{(8ax-xx)}.\sqrt{(b-x)}.\sqrt{2g}} = \frac{a}{\sqrt{ag}}.$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}} + \frac{1}{16\sqrt{ag}} \int \frac{-xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}.$$

Der erſte Theil des Integrals, $\frac{a}{\sqrt{ag}} . \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx--x^2)}}$ findet ſich ſowohl im Kreis, als in der Radlinie, wie aus §. 41. erhellt. Wenn AcB ein Halbkreis (Taf. II. Fig. 10.); AB = b, Bd = x; ſo iſt dieſer Theil der Kreisbogen Bc, und wenn das Integral verneint iſt, der Unterſchied dieſes Bogens vom Halbkreiſe, oder der Bogen Ac.

Das Integral des zweyten Theils $\frac{1}{16\sqrt{ag}}$

$\int \frac{-xdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ iſt der geſuchte Unterſchied der Zeit im Bogen des Kreiſes und der Radlinie. Aber

$$\frac{-xdx}{\sqrt{(bx-xx)}} = \frac{\frac{1}{2}bdx-xdx}{\sqrt{(bx-xx)}} - \frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-xx)}};$$ daher

dieſes

dieſes Integral $= \frac{1}{16\sqrt{ag}} \cdot (\sqrt{(bx - xx)} + \int \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-xx)}})$. Es iſt aber wiederum $\int \cdot \frac{-\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ ein Kreisbogen Ac, wie vorhin; daher das geſuchte Integral $= \frac{2a}{b\sqrt{ag}} \cdot \text{Ac} + (\sqrt{(bx-xx)} + \text{Ac}) \cdot \frac{1}{16\sqrt{ag}}$.

Da alſo für die ganze Zeit des Falles $x = o$; ſo wird auch $\sqrt{(bx - xx)} = o$, und Ac = AcB. Die Zeit in der Radlinie heiſe R, ſo iſt die Zeit im Kreiſe, $R + \frac{b}{32a} \cdot R$. Iſt der Bogen ſehr klein, ſo läßt ſich b als *o* anſehen, und die Zeit in der Radlinie iſt auch R, wie ſie nach dem vorhergehenden ſeyn muß, und der Zeit in der Radlinie gleich.

§. 43.

Hier iſt folgendes zu merken:

1.) So wie die Größe der Zeit §. 42. $R + \frac{b}{32a} \cdot R$ nur in ſehr kleinen Kreisbögen ſtatt hat: ſo wird überhaupt die Zeit in kleinen Bogen gefunden, wenn man $(8ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$ in eine unendliche Reihe auflöſt,

 und,

und, mit Weglaſſung der übrigen, ſo viel Glieder davon nimmt, als die Größe des Bogens erfordert.

2.) Bey Schwingungen in kleinen Kreisbogen verhält ſich die Zeit in ſehr kleinen Bogen zu der Zeit im Elementarbogen, wie $R + \frac{b}{32a} R$ zu R beynahe; oder wie $32a + b$ zu $32a$, d. i. wie der Durchmeſſer viermal genommen, um den Querſinus des Bogens, worinn die Schwingung geſchieht, vermehrt, zum Durchmeſſer viermal genommen.

3.) Demnach wird für den Bogen 7°, 30′, deſſen Querſinus $b = 0{,}009$; $\frac{b}{32a} = \frac{9}{8000}$.

Daher läßt ſich in der Ausübung, wo Kreisbögen anzuwenden ſind, der Kreisbogen 15° mit einem Bogen der Radlinie für einerley annehmen. Auch ſteigt in der Schwingung, durch den Bogen 18°, $\frac{b}{32a}$ nicht über $\frac{12}{8000}$.

4.) Aus dieſem Grunde iſt der Kreis andern Kurven, bey Verfertigung der Punkte, vorzuziehen: davon unten ausführlicher. Denn geſchieht die Schwingung in einem unendlich kleinen Bogen, ſo hat der Kreis vor allen andern Kurven den Vorzug. Iſt der ſehr kleine Bogen der Kurve, wodurch der Körper fällt, dem Bogen, wodurch er ſteigt, ähnlich, ſo darf man nur zu Verfertigung des in dieſem Bogen ſchwingenden Pendels den Krümmungshalbmeſſer,

meſſer, oder den Halbmeſſer des berührenden Kreiſes ſuchen, um die Länge des Pendels, die dieſem Halbmeſſer gleich iſt, zu bekommen. Sind die Bogen unähnlich, ſo muß der Halbmeſſer des berührenden Kreiſes für beyde beſonders geſucht werden; und dann dient ein bloſer Nagel, daß ſich der Faden des Pendels verlängert oder verkürzt, und die Länge des fallenden anders als des ſteigenden iſt.

5.) Ferner bleibt auch die Schwingung durch einen unendlich kleinen Bogen einerley, man mag die beſchleunigende Kraft beſtändig oder veränderlich annehmen; denn iſt gleich in einer unendlich kleinen Bewegung die Kraft an ſich veränderlich, ſo iſt ſie nicht anders, als beſtändig anzuſehen.

§. 44.

Wir erwähnten §. 76. 82. **Vorl.** gerader Linien, die ein fallender Körper in gleicher Zeit zurücklegen kann; mehrere ſolche Linien laſſen ſich folgendergeſtalt finden:

Ueber der Linie ACEG (Taf. II. Fig. 5.) beſchreibe man die Halbkreiſe ABC, AHE, AFG, die Geſchwindigkeiten in allen Punkten der Linie AC verhalten ſich wie die, dieſen Punkten zugehörigen Ordinaten DB des Kreiſes ABC. Eben ſo verhalten ſich in der Linie AE die Geſchwindigkeiten wie die Ordinaten DH des Halbkreiſes AHE; in AG, wie die Ordinaten DF in AFG, und ſo weiter ins Unendliche. In dieſen Linien iſt die Zeit gleichgroß.

Denn iſt AC, oder AE, oder AG, $= 2a$; AD $= x$, DB, oder DH, oder DF, $= \sqrt{(2ax - xx)}$; ſo

iſt $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, und

$t = \frac{1}{a} . \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; daher verhält ſich die Zeit wie $\frac{p}{2d}$, wenn $\frac{p}{d}$ das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreiſe. Es bedeutet aber t die ganze Zeit, worinn der Durchmeſſer AC, oder AE, oder AG, zurückgelegt wird. Die beſchleunigende Kraft, die zu dieſer Bewegung erfordert wird, verhält ſich wie 2a—x, oder wie die Entfernungen vom Mittelpunkt. §. 22. 1.

§. 45.

Nimmt man die Kräfte unveränderlich an, ſo findet man auch unzählige Kurven, worinn eben dieſe Gleichheit der Zeit angetroffen wird. Es ſeyn z. B. (Taf. V. Fig. 1.) ABC und AEF ähnliche Kurven, deren Bogen AB und AE von fallenden Körpern in gleicher, und zwar in eben der Zeit, worinn ſie durch die vertikale AG fallen, durchlaufen werden ſollen. Es ſey AB ein Bogen der einen Kurve AN = x, ſo wird allgemein, bey unveränderlichen Kräften, die Zeit $\int \frac{dx}{\sqrt{gx}}$ proportional ſeyn. Nimmt man a als eine beſtimmte unveränderliche Größe an, ſo muß in ſämmtlichen Bogen AB, AE ſeyn $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = a$.

Läßt ſich alſo $\frac{ds}{\sqrt{gx}}$ integriren, ſo wird die Differen-

tial-

tialgleichung für dieſe Kurven leicht gefunden. Denn es ſey $\int. ds = R$, und $R = a$, ſo wird $dR = o$, und dieſe Gleichung beſtimmt die Punkte B, E, G. Damit aber R allen dieſen Linien zukommt, ſo muß das Differential ſo genommen werden, daß beym Differenziiren der Parameter der Linie als eine veränderliche Größe angeſehen wird.

Da ſich aus der Differentialgleichung, wo $\int. \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ integrabel iſt, x durch den Werth des Parameters allemal beſtimmen läßt, ſo läßt ſich auch y beſtimmen, und dadurch die geſuchten Punkte B und E finden. Dieſe Punkte beſtimmen aber die Kurve AEG, die durch alle dieſe Punkte geht, und folglich die gleichzeitige Linie, (Linea ſynchrona,) oder die Linie der gleichen Zeiten, heißt. Daher ſieht man auch, wie ſich dieſe Linie nicht nur verzeichnen, ſondern auch durch eine Gleichung angeben läßt: denn die Gleichung für ſie wird gefunden, wenn man in der zunächſt gefundenen Gleichung den durch x und y gegebenen Werth des Parameters ſezt. Eben dieſe Bogen können auch gefunden werden, wenn $\int. \frac{ds}{\sqrt{gx}}$ nicht integrabel, ja wenn die gegebenen Linien nicht ähnlich, ſondern ungleichartig ſind. Wir wollen aber dieſe ziemlich weitläuftige und ſchwere Unterſuchung übergehen, und das bisherige mit einigen einfachen Beyſpielen erläutern.

§. 46.

Es ſeyen alſo AB, AE, AG gerade Linien; die Tangente ihres Abweichungswinkels von der Vertikallinie

kallinie ſey t, der ganze Sinus = 1, ſo iſt $y = tx$; $s = AB = x\sqrt{(1+t^2)}$, und $\int \frac{ds}{\sqrt{gx}} = \frac{\sqrt{(1+t^2)}}{\sqrt{g}} \cdot \int dx . x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{(1+t^2)}}{\sqrt{g}} . x^{\frac{1}{2}}$. Vermöge deſſen aber, was vorhin angenommen worden, iſt $\frac{2\sqrt{(1+t^2)}}{\sqrt{g}} , x^{\frac{1}{2}} = a$; daher $dx + t^2 dx + 2txdt = o$, oder $\frac{dx}{x} = - \frac{2tdt}{1+t^2}$, daraus erhält man $x = \frac{1}{1+t^2}$.

Da ferner $t^2 = \frac{y^2}{x^2}$, ſo wird $x^2+y^2=x$, und weil alle Glieder der gefundenen Gleichung von gleicher Ausmeſſung ſeyn müſſen, ſo wird $x^2+y^2 = bx$, wenn die Höhe $AG = b$; Denn $\sqrt{b}$ oder $\frac{a\sqrt{g}}{2}$ iſt eine beſtändige Größe, die beym Differentiiren aus der Rechnung wegfiel, und als Parameter die Kurve beſtimmt. Auch iſt offenbar $x = b$, wenn $y = o$, weil die Kurve durch G gehen muß. Es iſt aber $y^2 = bx - x^2$ die Gleichung für den Kreis, deſſen Durchmeſſer = b, und die Höhe AG.

Hieraus erhellt wiederum, was wir ſchon oben §. 76. Vorl. behaupteten, daß alle vom höchſten

Schei-

Scheitelpunkt des Durchmeſſers zum Umfang gezogenen Sehnen des Kreiſes in gleicher Zeit zurückgelegt werden.

§. 47.

Es ſeyn AB, AE, Radlinien; ſo findet man ſehr leicht die Bogen und folglich auch die Punkte der gleichzeitigen Linie, ſo daß die vorhin erklärte Methode hier nicht einmal nöthig iſt. Denn es ſey KMC ein Kreis, deſſen Punkt C die Radlinie CA beſchreibt; ſo iſt die Zeit durch $AB = \frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{KM}{\sqrt{KC}}$, und die gegebene Zeit durch AG ($=b$) iſt $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}$; daher vermöge der Vorausſetzug $\frac{KM}{\sqrt{KC}} = \sqrt{b}$. Demnach iſt KM die mittlere Proportionalgröße zwiſchen KC und AG: nimmt man alſo dieſen Bogen, und verlängert die Ordinate DM in B, ſo iſt AB der geſuchte Bogen der Radlinie. Eben ſo laſſen ſich die gleichzeitigen Bogen in den übrigen gegebenen Radlinien, die aus dem Punkt A gezogen werden, beſtimmen.

§. 48.

Eben ſo, wie wir dieſe Aufgaben unter Vorausſetzung unveränderlicher Kräfte aufgelöſt haben laſſen, ſich auch die nach anderen Geſetzen der Kräfte auflöſen. Die allgemeine Methode bleibt immer einerley. Der Unterſchied aber unter den Geſetzen der Kräfte liegt

liegt entweder in der innern Verſchiedenheit der Kräfte ſelbſt, oder in der verſchiedenen Richtung, worinn ſie wirken. Lezteres begreift wieder zwey Arten der Bewegung unter ſich, in der einen bereits erklärten, ſind die Richtungen überall gleichlaufend; in der andern ſtreben die Kräfte, wie Centralkräfte, alle nach einem Punkt. Bey jeder können wieder unzählige Geſetze der Kräfte ſtatt haben. Wir wollen nur die allgemeine Auflöſung der Aufgaben zeigen, wo die Kräfte nach Richtungen wirken, die in einem einzigen Punkt als Mittelpunkt zuſammenlaufen.

Laſſet uns die hieher gehörigen Fälle im allgemeinen betrachten, und eine Kraft K (Taf. X. Fig. 2.) annehmen, die nach den, in einem Punkt B zuſammenſtoßenden Richtungen CB, DB wirkt. Die Entfernung ſey überhaupt als Ordinate $= y$, man beſchreibe die Kreisbogen CE, DF, ſo iſt $CL = -dy$, wenn CB zu DB unendlich nahe, und $CD = ds$ iſt das Element der krummen Linie. Die ganze Kraft werde durch DB vorgeſtellt, und in die beyden Seitenkräfte, DI in der Richtung der Tangente CDI, und in die auf die Kurve ſenkrechte $DK = BI$, zerlegt. So iſt klar, daß ſich DI wie die in der Tangente wirkende Tangentialkraft; BI aber wie die andere auf die Kurve ſenkrecht drückende Kraft verhält. CB und DB laſſen ſich als Parallelen, daher CLD, DBI als ähnliche Dreyecke anſehen, daß alſo $CD : CL = DB : DI$. Heißt alſo die ganze Kraft K, und die Tangentialkraft T; ſo wird $ds : -dy = k : -\frac{Kdy}{ds} = T$, welcher Werth mit dem oben §. 32. für

die

die Tangentialkraft gefundenen einerley iſt. Ferner $CD : DL = DB : BI$, oder $ds : \sqrt{(ds^2 - dy^2)} = k : \frac{k\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$, ſo den Werth der ſenkrechten Kraft ausdrückt, der in $\frac{Kdx}{ds}$ übergeht, wie §. 32. wenn $\sqrt{(ds^2 - dy^2)} = dx$, und daher $DF = x$.

Sind die Kräfte auf dieſe Art beſtimmt, ſo wird alsdenn die Auflöſung eben ſo wie vorhin verrichtet. Denn wenn V die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe, ſo iſt überall $-\frac{kdyds}{ds} = - kdy = dV$, und $V = \int - kdy + B$; daher $dt = \frac{ds}{\sqrt{(\int - kdy + B)}}$. Wir bekommen alſo allgemeine Gleichungen für die Geſchwindigkeit und Zeit.

§. 49.

Sezt man in dieſen Formeln ſtatt k, oder ſtatt g in den oben §. 32. gegebenen Gleichungen, jedes Geſetz der Kräfte, ſo läßt ſich die Aufgabe für jedes Geſetz der Kräfte auflöſen. Denn man erhält allemal Differentialgleichungen für Geſchwindigkeit und Zeit, die die allgemeine Auflöſung dieſer Aufgaben enthalten. Allein die meiſten Fragen dieſer Gattung ſind, ſo viel wir wiſſen, von keinem großen Nutzen; dergleichen ſind, wo Geſetze von Kräften angenommen werden, die in der Natur nicht vorhanden ſind: wo ſie nicht vielleicht zu Beſtätigung oder Widerlegung einer gewiſſen Hypotheſe dienen.

Merk=

Merkwürdig iſt aber bey der vorhin angeführten Function der Geſchwindigkeit $V = \int. - Kdy + B$, wenn K eine Function der bloſen Entfernung y, daß im Falle durch die Kurve AC niemals eine andere Geſchwindigkeit, als im Fall durch AB, erlangt wird, wofern nur der Körper durch AC und AE von einer und derſelben Kraft getrieben wird. Denn die Rechnung für beyde Geſchwindigkeiten iſt einerley, und folglich ſind auch die Geſchwindigkeiten einerley; welches auch daraus erhellt, weil ihr Werth von y abhängt, und y beſtändig einerley iſt, wenn die Entfernungen vom Mittelpunkt gleich groß ſind.

§. 50.

Wirken auch mehrere Kräfte zugleich auf einen Punkt, der von ihnen gereizt, durch eine Kurve fällt, ſo bleibt die allgemeine Auflöſung wie vorhin. Denn jede Kraft läßt ſich beſonders in zwo andere zerlegen, wovon die eine in der Richtung der Tangente, die andere ſenkrecht auf die Kurve wirkt. Denn es ſeyn die aus mehrern verſchiedenen Kräften entſtandenen Tangentialkräfte, T, T′, T″ ꝛc. ſo wird (wenn V eben das, was vorhin iſt,) $dV = (T + T' + T'' + \ldots) ds$, und $V = \int. (T + T' + T'' + \ldots) ds + B$, und

$$t = \int. \frac{ds}{\sqrt{(\int.(T + T' + T'' + \ldots) ds + B)}}.$$

Bey beſondern Fällen wollen wir uns, da ſie von keinem großen Nutzen ſind, nicht aufhalten.

§. 51.

Umgekehrt findet man auch aus den gegebenen Verhältniſſen der Zeiten oder Geſchwindig-

keiten

keiten zu den durchlaufenen Räumen, oder aus gegebenen Eigenſchaften derſelben, wenigſtens Differentialgleichungen für die Kurven, worinn die Zeiten, Geſchwindigkeiten, oder Räume in der gegebenen Verhältnis ſtehen, oder die angenommenen Eigenſchaften beſitzen. Man darf nur den angenommenen Bedingungen gemäs die Gleichung für die Geſchwindigkeit, Raum oder Zeit, in eine andere verwandeln, die die Ordinaten und Abſciſſen der Kurve ausdrückt. Man fragt z. B. nach der Kurve, worinn ein ſchwerer Körper dergeſtalt fällt, daß er in gleichen Zeiten ſich beſtändig um gleichen Raum dem Horizonte nähert, oder worinn er in gleichen Zeiten gleiche vertikale Räume beſchreibt. Da $dt = \frac{ds}{v}$, ſo kömmt es darauf an, daß den angenommenen Bedingungen der Ausgabe gemäs, t und v durch s, oder welches gemeiniglich bequemer, v und s durch x und y gegeben werden, wenn x und y Abſciſſen und Ordinaten der geſuchten Kurve bedeuten. Wenn alſo die Kraft unveränderlich, und mit unſerer Schwere von gleicher Art iſt, ſo geſchehe der Fall durch die Linie gbe (Taf. II. Fig. 6.) hc ſey $= x$, $cd = dx$, $ca = y$, $bk = dy$, $ab = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, die Geſchwindigkeit in $a = v = \sqrt{x}$, und vermöge der Vorausſetzung $t = x$; daher auch $dt = dx$. Demnach wird $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{x}} = dx$, daher $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{x}$, oder $dy^2 = (x-1)\,dx^2$,

 und

und $dy = dx \sqrt{(x-1)}$. Aber $S. dx. (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}$, daher $\frac{4}{9} (x-1)^3 = y^2$.

Alſo eine algebraiſche, und zwar die Quadrato-kubiſche Linie, oder die Neiliſche Parabel, deren Abſciſſe $x-1$, die Ordinate y, und der Parameter $\frac{9}{4}$. Wenn $y = o$, ſo iſt $x = 1$; daher berührt die Kurve die Axe in g, folglich $hg = x = 1$. Sezt man $x = o$, ſo wird y unmöglich und $= \sqrt{-\frac{4}{9}}$. Demnach iſt der Parameter $2\frac{1}{4} hg$, weil $hg = 1$, und der ſchwere Körper muß ſeine Bewegung dieſer Kurve mit einer Geſchwindigkeit, die er im Fall durch hg erlangt, anfangen.

§. 52.

Eben ſo findet man die gleichzeitige Kurve, (Curva Iſochrona,) auch bey Vorausſetzung ganz anderer Geſetze der Kräfte. Hierbey wollen wir uns aber weiter nicht aufhalten; ſondern nur zur Uebung des Leſers in dem Kalkul, den dieſe Gattung von Aufgaben erfordert, das einzige Beyſpiel von der paracentriſchen Linie beyfügen.

Unter der paracentriſchen Linie (Taf. II. Fig. 7.) verſteht man eine Kurve, worinn ein fallender ſchwerer Körper in gleichen Zeiten ſich entweder gleichweit von einem Punkt C entfernt, oder ſich ihm nähert. Es ſey dieſe paracentriſche Linie AGE, und CG, CT Entfernungen ihrer Punkte vom Punkt C, ſo verhält ſich nach der Vorausſetzung CG wie die Zeiten, und ſezt man $CG = y$, ſo iſt

$y = t$,

$y = t$, und $dt = dy$. Aber $dt = \frac{ds}{v}$. Sind alſo CG, CT zwey aus dem Punkt C gehende unendlich nahe Linien, ſo iſt $GT = ds$ und daher $dy = \frac{GT}{v}$.

Um GT in dieſer Gattung Kurven zu beſtimmen, deren Ordinaten CG nach einem Punkt zuſammenlaufen, beſchreibe man einen Kreis, und nehme Theile deſſelben für die Abſciſſen. In A fange der Körper an zu fallen; mit dem Halbmeſſer CA beſchreibe man den Halbkreis AfB, um die Abſciſſen zu beſtimmen. Den Halbmeſſer dieſes Kreiſes AC wollen wir a nennen. Dann fälle man vom Punkt f, worinn die Ordinate CG den Kreis ſchneidet, das Loth fo, und nenne Co, x, ſo erhellt ſogleich, daß die Differentialgleichung zwiſchen x und y hier eben ſo leicht, als vorhin, zu finden iſt. Denn alles kommt darauf an, daß GT beſtimmt wird.

Man nehme CG für den Halbmeſſer, und beſchreibe den ſehr kleinen Kreisbogen Gr, ſo wird Cf : fa = CG : Gr. Wenn aber der Halbmeſſer des Kreiſes = a, und Co = x, wie wir oben angenommen haben, ſo wird das Element des Kreiſes fa = $\frac{adx}{\surd(a^2 - x^2)}$, daraus folgt

$$a : \frac{adx}{\surd(a^2 - x^2)} = y : \frac{aydx}{a\surd(a^2 - x^2)} = \frac{ydx}{\surd(a^2 - x^2)} = Gr,$$

 Ferner,

Ferner, weil $rT = dy$, und $GT^2 = Gr^2 + rT^2$, iſt $GT^2 = \frac{y^2dx^2 + a^2dy^2 - x^2dy^2}{a^2 - x^2}$, daher $dy^2 = \frac{GT^2}{v^2} = \frac{y^2dx^2 + a^2dy^2 - x^2dy^2}{v^2(a^2 - x^2)}$.

Um $v = \sqrt{Ap}$ zu beſtimmen, beſtimme man Cp aus $Cf : Co = CG : Cp$, oder $a : x = y : \frac{xy}{a} = Cp$.

Daher $v = \sqrt{Ap} = \sqrt{\left(a + \frac{xy}{a}\right)}$, und $v^2 = \frac{a^2 + xy}{a}$, daher $dy^2 = \frac{GT^2}{v^2} = \frac{y^2dx^2 + a^2dy^2 - x^2dy^2}{\frac{(a^2 + xy).\ (a^2 - x^2)}{a}}$, und die Differentialgleichung für die paracentriſche Linie.

$$\frac{(a^2 - x^2(dy^2}{a} = \frac{y^2dx^2 + a^2dy^2 - x^5dy^2}{a^2 - xy}$$, oder damit alle Größen einerley Abmeſſung haben,

$$\frac{(a^2 - x^2(dy^2}{a^2} = \frac{y^2dx^2 + a^2dy^2 - x^2dy^2}{a^2 + xy}$$, oder

$a^4dy^2 + a^2xydy^2 - a^2x^2dy^2 - yx^3dy^2 = a^4dy^2 - a^2x^2dy^2 + a^2y^2dx^3$.

Dieſe

Dieſe Gleichung iſt für Kurven, die ſich aber nur verzeichnen laſſen, wenn man die veränderlichen Größen von einander abſondern kann. Zu dem Ende kann man ſetzen:

$a^2xydy^2 - yx^3dy^2 = a^2y^2dx^2$, daraus erhält man $\frac{adx}{\sqrt{(a^2x-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$. Dies iſt ein beſonderer Fall, da wir ſtatt v ſezten $\sqrt{Ap}$, und daraus gegenwärtige Gleichung entwickelten. Wir wollen uns aber bey dieſer Materie weiter nicht aufhalten, ſondern vielmehr zur Radlinie zurückkehren, und eine vorzügliche, zur Mechanik gehörende Eigenſchaft derſelben erklären, deren wir in unſern Vorleſungen erwähnen werden.

Anmerkung. Die Verzeichnungen der **paracentriſchen Linien** gehören zu den netteſten. Hiervon ſind nachzuleſen Act. Lipſ. An. 1694. und 1695. Memoires de l'Académie des Sciences de Paris, l'Année 1699. **Jac. Bernoulli** Opp. Tom. I. und **Wolfs** Elem. Math. Tom. II. Cap. 8. Wir übergehen ſie hier nebſt andern Verzeichnungen dieſer Art, theils um das Werk nicht zu ſehr zu vergrößern, theils wegen ihres geringen Nutzens. Ihre Theorie iſt zwar ſchön, aber auſer der Einſicht in die Methode, wie der algebraiſche Kalkul geführt wird, iſt weiter nichts hierzu nöthig. (V.)

§. 53.

Dieſe iſt folgende: **unter der Vorausſetzung unveränderlicher Kräfte eine Kurve** AE (Taf. II. Fig. 8.) **zu finden, die durch zwey gegebene**

Punkte A und E geht, deren Abſciſſe und vertikale Höhe AB, und die überdies die Eigenſchaft hat, daß der durch ſie fallende ſchwere Körper den Punkt E in möglichſt kürzeſter Zeit erreicht. Wir wiſſen, daß der Fall in der Vertikallinie ſelbſt der geſchwindeſte iſt; ſoll aber die Bewegung von einem Punkt nach einem andern, der nicht in der nämlichen Vertikallinie liegt, geſchehen; ſo iſt die Linie dieſes geſchwindeſten Falles niemals eine gerade, ſondern eine krumme Linie, und zwar die Cykloide, von der wir oben bereits gehandelt haben. Um dieſe Aufgabe aufzulöſen, nehme man die Gleichung wieder $dt = \frac{ds}{v}$, ſo folgt ſogleich aus der Natur der Vorausſetzung $ddt = o$ Dies iſt die allgemeinſte Auflöſung, die überall ſtatt findet, wenn das geſuchte entweder ein Kleinſtes, oder ein Größtes iſt. Daher muß auch das Differential der Funktion $\frac{ds}{v} = o$ ſeyn, welche allgemeine Auflöſung keine Schwierigkeit hat. Es iſt aber zu merken, daß die hier vorkommenden kleinſten Größen von den gewöhnlich betrachteten verſchieden ſind. Hier iſt nicht die Frage nach dem Kleinſten oder Größten in der Kurve, z. B. in ihren Ordinaten, ſondern vielmehr die Kurve ſelbſt muß ein Kleinſtes oder Größtes ſeyn. Demnach muß man in allen Aufgaben dieſer Gattung, die man iſoperimetriſche nennt, wohl darauf Acht haben, was unter den geſezten Bedingungen beſtändig ſeyn, und was veränderlich bleiben ſoll.

Die

Die allgemeine Auflöſung aller hieher gehörigen Aufgaben gehört mehr in die Analyſis, als in die Mechanik. Wir wollen nur ein einziges der einfachſten Beyſpiele vortragen, da unzählige andere ſich eben ſo auflöſen laſſen. Da aber die Auflöſungsmethode nicht ſo bekannt und geläufig, wie andere, iſt; ſo wollen wir kürzlich erklären, worauf es bey dieſen Aufgaben ankommt, und hernach dieſe allgemeine Auflöſung auf unſer vorgegebenes Beyſpiel anwenden *) Die gegebene Größe oder Function, wodurch

 das,

*) Statt der vom Verfaſſer aus **Joh. Bernoulli's** Werken entlehnten, ſehr verwickelten, und nicht allgemeinen Auflöſung des **iſoperimetriſchen Problems**, hab ich hier eine andere ſehr deutliche, und auf jeden Fall des Kleinſten und Größten dieſer Gattung leicht anwendbare, beygefügt. Wir haben ſie größtentheils **Eulern** zu danken, der die Auflöſung dieſer Aufgabeu, worauf die größten Geometer ihren Fleis angewendet, in den Commentar. Petropol. Nov. T. X. auf das Jahr 1764. endlich dergeſtalt vollſtändig geliefert hat, daß man nunmehr dieſe Gattung von Aufgaben für völlig aufgelöſt halten kann. Zwar hatte er dieſes bereits zuvor in ſeiner unten vom Verfaſſer angeführten Schrift, die 1744. heraus kam, geleiſtet, die dort gegebene Auflöſung aber war aus der Geometrie genommen; und man ſuchte eine andere auf bloßen analytiſchen Grundſätzen beruhende. Dergleichen fand nach **Eulers** Zeugnis, a. a. O. zuerſt *de la Grange*. Welches ich zwar gern zugebe; doch aber zugleich, wenn ich auch mir das meinige zueignen darf, nicht mit Stillſchweigen übergehen kann, daß ich bereits vorher, ehe **Eulers** analytiſche Auflöſung im Jahr 1764. erſchien, oder von der Erfindung des Herrn *de la Grange* etwas bekannt war, in den Actis Erudit. Lipſ. 1763. eine Auflöſung dieſer Aufgaben gegeben habe, die ebenfalls blos analytiſch iſt, und worinn ich, ſowohl die **Eulerſchen** Formeln aus analy-

das, was in einer Kurve das **Größte oder Kleinſte** werden ſoll, ausgedrückt wird, ſey E, oder S. dE, denn ſo läßt es ſich in jedem Falle ausdrücken. In dieſer Größe d. E aber ſind entweder ſchon andere Integrale vorhanden, oder nicht. Jenes kann ſtatt haben, folglich auch zugleich S. dE nicht allein von den in jedem Punkt der Kurve unbeſtimmten Größen der Abſciſſen, Ordinaten, und anderer Linien, die die Kurve beſtimmen, ſondern auch von einer Größe derſelben in vorhergehenden Punkten abhängen. Daraus folgt, daß die gegebene Größe in der geſuchten Kurve nur ein Größtes oder Kleinſtes wird, wenn die Abſciſſe x = einer beſtändigen Größe a. Denn es hat nicht allgemein ſtatt, was viele glaubten, daß eben die Eigenſchaft des Größten oder Kleinſten, die in einem Punkte der Kurve gefunden wird, in der ganzen Kurve, und in allen ihren Elementen vorhanden ſeyn müſſe. Die hieher gehörigen Fälle aber kann

analytiſchen Gründen erwieſen, als auch die Diefferentiale des Größten und Kleinſten ſorgfältig, und ebenfalls mit Anwendung verſchiedener Zeichen von den gemeinen Differentialen unterſchieden habe. Zwar war meine Auflöſungsart nicht bequem genug, da ich auf die nette und fruchtbare Vrrwandlung der hier vorkommenden Differentialen, die **Euler** hernach anwandte, nicht gefallen war. Doch habe ich die Methode, die Rechnung des Unendlichen auf dieſe Gattung von Fragen anzuwenden, die **Euler** den **Variationskalkul** nennt, deutlich genug, wenigſtens allgemein, in meiner Abhandlung in den Actis Eruditorum aus einander geſezt. Denjenigen, die in dieſer Gattung von Aufgaben gearbeitet, und der Verfaſſer unten genennt hat, verdient noch **Simpſon** in Transact. Angl. Vol. XLIX. Part. I. Art. 2. beygefügt zu werden. (T.)

kann derjenige, der mit den übrigen, worinn nämlich die Große d. E keine Integrale erhält, ſondern eine algebraiſche Function der Größen x, dx, dy ꝛc. iſt, umzugehen weiß, leicht entwickeln. Dieſe wollen wir alſo zuerſt vortragen.

Die gegebene Function S. dE ſoll ein Größtes oder Kleinſtes ſeyn, folglich d. S. dE = o. Dieſes Differential aber muß man dergeſtalt nehmen, daß es die kleinſte Aenderung der Größe S.dE ausdrückt, die ſie leidet, wenn ſie aus der geſuchten Kurve ACa (Taf. II. Fig. 8.) in eine andere ihr unendlich nahe übergetragen wird. Daher iſt auch d. S. dE mit dem Differential d. E nicht einerley; denn dieſes drückt die Zu- oder Abnahme der Größe S. dE in der geſuchten Kurve aus; um davon jenes Differential des Größten oder Kleinſten zu unterſcheiden, wollen wir es durch δ S. dE andeuten.

Man gedenke ſich alſo eine andere Kurve ACn auf eben der Abſciſſe AB, und durch eben den Punkt A gezogen, der geſuchten Kurve ACa unendlich nahe, ſie mag durch eben den Punkt C gehen oder nicht. Trägt man in dieſe die Größe S. dE über, ſo erhellt, auf was Art dieſes geſchehen muß. Die Abſciſſe ſey in beyden Kurven einerley, aber die Ordinate y in der Kurve ACn um den unendlich kleinen Theil δy von der Ordinate der Kurve ACa unterſchieden. Wie alſo das Verhältnis der Größen x, y und anderer, wodurch die Kurve ACa beſtimmt wird, bey eben den zur Function gehörenden beſtändigen Größen, in eine davon ſehr wenig unterſchiedene Gleichung für die andere Kurve übergeht, wenn x und dx als beſtändig, und y, dy, ddy ꝛc. als veränderlich angeſehen

ſehen werden: ſo geht auch die gegebene Größe $S.\,dE$, auf ähnliche Art behandelt, in eine Größe für die andere Kurve über. Folglich muß $\delta S.\,dE$ dergeſtalt genommen werden, daß in $S.\,dE$ die Größen x und dx beſtändig, hingegen y, dy, ddy ꝛc. veränderlich ſind. Und dieſes ſolchergeſtalt formirte Differential $\delta S.\,dE$ muß $= o$ geſezt werden.

Da aber $\delta S.\,dE = S\delta.\,dE$, oder, da es einerley iſt, ob man zuerſt die Summe $S.\,dE$ ſucht, und hiervon wiederum beſagtermaßen das Differential nimmt, oder ob man vorher dE eben ſo differentiirt, und hiernächſt dieſes Differential integrirt, ſo kann man dE (x und dx beſtändig genommen) differentiiren, und dann dieſes Differentials Integral, $S.\,\delta dE = o$ ſetzen.

Da ſich das ordentliche Differential ddE, bey beſtändigem dx, auf dieſe allgemeine Form bringen läßt, $Adx + Bdy + Cddy + Dd^3y$ ꝛc.; ſo folgt, daß unſer Differential des Größten oder Kleinſten, $\delta.dE$, oder die Aenderung von $dE = B\delta y + C\delta dy + D\delta d^2y$ ꝛc. Denn die Aenderung von dE, d. i. $\delta.dE$ iſt von dem ordentlichen Differential $d.\,dE$ nur darinn unterſchieden, daß in Formirung $\delta.dE$ die Größe x beſtändig genommen wird.

Alſo $\delta.dE = B\delta.\,y + C\delta.dy + D\delta.d^2y + +$ und daher $S.\,\delta.\,dE = S.\,B\delta.\,y + S.\,C\delta.\,dy + S.D\delta.\,d^2y$ ꝛc.

Dieſe Summe $S.\,\delta.\,dE$ aber muß $= o$ geſezt werden, damit $S.\,dE$ den größten oder kleinſten Werth erhält, und dann muß aus dieſer Gleichung $S.\,\delta dE = o$ das Verhältnis der Größen x, y, und anderer,

die

die die Gleichung für die geſuchte Kurve ACa beſtimmen, erkannt werden.

Allgemein iſt alſo die Auflöſung der Aufgabe in zwey Regeln enthalten. **Erſtlich** nehme man das Differential der Größe dE, ſo daß x und dx beſtändig ſind. **Zweytens**, ſuche man die Summe, oder das Integral dieſes Differentials $\delta . dE$.

Das Differentiiren hat keine Schwierigkeit, ſelten aber läßt ſich das hierauf anzuſtellende Integriren verrichten. Daher muß man allgemein ein ſolches Verhältnis der in dieſer Summe vorkommenden Größen B, C, D ſuchen, daß dieſe Summe verſchwindet, und daraus das Verhältnis der Größen, die die geſuchte Kurve beſtimmen, ermeſſen.

Zu dem Ende iſt 1.) zu merken, daß die Größen B, C, D in dem Differential $\delta . dE$ ſelbſt dergeſtalt von einander unabhängig ſind, daß ſie jede beſonders verſchwinden können, und doch $S. \delta . dE = o$ werden muß. Dies iſt aus der Natur und Entſtehnng dieſes $\delta . dE$ begreiflich. Denn das ganze $\delta . dE = B\delta . y + C\delta . dy + D\delta . d^2y + +$ drückt die Aenderung der Größe dE aus, wenn ſie aus der Kurve ACa in jede andere, auf eben die Axe x bezogene, übergetragen wird, wenn gleich dieſe nicht durch den Punkt C geht, d. i. wenn ſie gleich keine gemeinſchaftliche Ordinate y auf der gemeinſchaftlichen Abſciſſe x hat. Denn vergleicht man die Linie ACa mit dergleichen Linien, ſo iſt in dieſen verſchiedenen Linien, auſer x keine gemeinſchaftliche Größe vorhanden, folglich müſſen alle übrigen als veränderlich anzuſehen, und

$$S.B\delta . y + S.C\delta . dy + S.D\delta . d^2y \text{ ꝛc.} = o$$ ſeyn.

Dies

Dies iſt aber nicht genug. Denn laſſet uns annehmen, daß andere Kurven, mit welchen ACa verglichen werden ſoll, zugleich durch den Punkt C gehen, ſo daß alle dieſe Kurven einerley Ordinate y auf der angenommenen Abſciſſe x gemein haben. Hier ändert ſich alſo der Werth der Ordinate y nicht, wenn dE aus ACa in eine andere dieſer Gattung Kurven übergetragen wird. Folglich fehlt in δ. dE das erſte Glied B δ.y. Daher muß auch S. C. δdy + S. D. δd^2y ꝛc. beſonders verſchwinden, wenn gleich das erſte Glied B. δy fehlt. Eben ſo ſchließt man auch, wenn andere Kurven mit ACa einerley Element Ca gemein haben, (a unendlich nahe an C geſezt), ſo wird keine Aenderung von dy, oder kein δ. dy vorhanden ſeyn, wenn die Kurve ACa mit andern dieſer Gattung verglichen wird, wegen dem gemeinſchaftlichen dy. Demnach kann auch das zweyte Glied Cδ. dy wegfallen, und demohngeachtet muß S. Dδ. $d^2y = o$ ſeyn.

Auch kann C aus dem Differential δ. dE wegfallen, und doch Bδy darinn bleiben. Denn wird ACa mit andern Kurven verglichen, worinn die Ordinate y auf eben der Abſciſſe x nicht einerley iſt, ſo kann doch in dieſen verſchiedenen Kurven gleiches Wachsthum der Ordinaten, d. i. dy kann eine beſtändige oder gemeinſchaftliche Größe ſeyn. Eben ſo läßt ſich auch auf die übrigen Glieder in δ. dE, wenn auch gleich mehrere vorhanden ſind, ſchlieſen, woraus allgemein erhellet, daß die Größen Bδy, Cδdy, Dδd^2y, von einander unabhängig einzeln wegbleiben können, und dennoch S. δ. dE = o ſeyn muß, es mögen alle Glieder da ſeyn, oder dieſe oder jene wegfallen.

2.) Sind

2.) Sind in dieſer Summe $S.\delta.dE$, ſowohl die Aenderungen $\delta.y$, $\delta.dy$, $\delta.d^2y$, als auch die der geſuchten Kurve zugehörigen Differentiale dy, ddy, d^3y ꝛc. mit einander vermiſcht. Jene ſind einzeln genommen $= o$. Denn $\delta.y = o$ in dem Fall, wo ACa mit andern, durch eben den Punkt C gehenden Kurven verglichen wird; $\delta.dy$ in einem andern Fall, wo ACa mit andern Kurven verglichen wird, die einerley Differential dy gemein haben, u. ſ. f. Um alſo aus der Gleichung

$$S.\delta.dE = S.B\delta.y + S.C\delta.dy + S.D\delta.d^2y \text{ ꝛc.}$$

etwas ſchlieſen zu können, müſſen ſowohl die endlichen Größen, als die der Kurve ſelbſt zugehörigen Differentiale von jenen Aenderungen abgeſondert werden. Dies geſchieht folgendergeſtalt:

$S.B\delta.y = By - S.y\delta B$. Denn ändert ſich By, d. i. wird es ſo differentiirt, daß ſeine Aenderung heraus kommt, ſo wird $\delta.(By) = B\delta.y + y\delta B$, daher $S.\delta.By$, oder das eingerichtete Integral $By = S.B\delta.y + S.y\delta.B$.

Ferner $S.C\delta.dy = Cdy - S.dy.\delta.C$.

und $S.D\delta.d^2y = Dd^2y - S.d^2y.\delta D$.

Folglich $S.\delta dE = By + Cdy + Dd^2y - S.y\delta.B - S.dy\delta C - S.d^2y\delta D$. ꝛc.

Da aber $\delta.B$, $\delta.C$, $\delta.D$, die Aenderungen δy, $\delta.dy$, $\delta.d^2y$ enthalten, die ſämmtlich $= o$, ſo können die Größen unter dem Integralzeichen weggeworfen, und die übrigbleibenden zur Kurve ſelbſt gehörigen Größen, zuſammengenommen $= o$ geſezt werden. Demnach muß ſeyn

$S.\delta.dE$

$S.\delta.dE = By + Cdy + Dd^2y = o.$

Aber $Cdy = d.(Cy) - y.dC.$

Und $Dd^2y = d.(Ddy) - dy.dD$, und wiederum $dy.dD = d.(y.dD) - y.ddD.$

Daher $By + Cdy + Dd^2y = y(B - dC + ddD) + d(y.C - y.dD) + d.(dy.D) = o.$

In dieſer Function aber muß ins beſondere ſeyn ſowohl $B - dC + ddD = o$, als $C - dD = o$, und $D = o$. Denn das Verhältnis dieſer Größen muß ſo beſchaffen ſeyn, daß $By + Cdy + Dd^2y$ auch verſchwindet, wenn ſämmtliche Glieder fehlten, wegen den von einander unabhängigen Größſen B, C, D, die jede für ſich entweder $= o$ oder beſtändig ſeyn können. Iſt aber z. B. $B = o$, ſo bekommen wir $Cdy + Dd^2y = o$, d. i. $Cdy + d.(Ddy) - dy.dD = (C - dD)dy + d.(Ddy) = o$, welche Gleichung auch ſtatt haben muß, wenn $D = o$; daher nothwendig $G - dD = o$, und $C = dD$.

Eben ſo iſt es von den übrigen klar. Sind alſo gleich dieſe Größen B, C, D, in einem gegebenen Fall nicht $= o$, ſo muß doch angeführtes Verhältnis derſelben ſtatt finden, damit $S.\delta.dE$ den größten oder kleinſten Werth erhält. Iſt daher das Verhältnis der Größen zur Kurve aus der Gleichung $B - dC + ddD = o$ hergenommen, ſo kann man zu mehrerer Beſtimmung deſſelben auch die übrigen zu Hülfe nehmen; welches bisweilen nöthig iſt.

Hat man den Grund dieſer Rechnung begriffen, ſo ſchließt man leicht, wie in den Fällen zu verfahren, wo S. dE nicht in jedem Punkte der Kurve ACa das Kleinſte oder Größte iſt, ſondern nur im Punkt C,

wo

wo ihre Abſciſſe AD von beſtimmter Länge iſt. Man ſuche erſtlich das Verhältnis zwiſchen x und y, wie vorhin, aus S. δdE = o, die aus der Aenderung der gegebenen Größe S. dE, wenn ſie für die von gehöriger Länge genommene Abſciſſe AD in eine andere Kurve übergetragen wird. Aber eben dieſe Größe δ. S. dE, oder S. δdE, muß auch verſchwinden, wenn ſie in der Kurve ACa ſelbſt aus dem Punkt D, in einen andern Punkt der Abſciſſe z. B. in g getragen wird. Sezt man daher x = a, ſo muß in der Kurve ACa ſelbſt S. δdE = o ſeyn. Aber ddE, oder die Aenderung des Elements dE in der Kurve ſelbſt = Adx + Bdy + Cddy + +, folglich S. ddE = S. Adx + S. (Bdy + Cddy + +). Man trage alſo das gefundene Verhältnis zwiſchen x und y, unter welchem leztere Summe verſchwindet, in dE, und nehme dann wieder δdE, welches Differential = Aδx + Bδy + Cδ.dy. Da aber durch das gefundene Verhältnis zwiſchen x und y, die Summe der Glieder, in welchen δy und δdy vorkommt, auf o gebracht wird, ſo bleiben nur die durch S. Adx ausgedrückten Glieder übrig, die man, wenn x = a, ebenfalls = o ſetzen muß. Und ſo wird endlich das beſtimmtere Verhältnis der zu der geſuchten Kurve gehörigen Größen gefunden, unter welchen die gegebene Größe für die beſtimmte Abſciſſe ein Größtes oder Kleinſtes wird, wenn ſie mit einer ähnlichen Größe in andern durch die Punkte A und C gehenden Kurven verglichen wird. Dies iſt die Rechnungsmethode im allgemeinen, die aber wegen dem in der vorgegebenen Größe dE vorhandenen Integral, etwas weitläuftiger wird.

Dieſe

Dieſe allgemeine Auflöſung wollen wir hier auf das Problem vom geſchwindeſten freyen Fall ſchwerer Körper anwenden.

Man ſoll alſo die Linie finden, worinn unter allen, über eben der Abſciſſe AD durch den Punkt C der Ordinate CD, gezogenen Linien, ein Körper in der kleinſten Zeit fällt, oder, worinn $S.\frac{ds}{\sqrt{x}}$, wenn ds das Element des Raums, und $\sqrt{x}$ die Geſchwindigkeit bedeutet, ein Kleinſtes wird.

$$\frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(dx^2dy^2)}}{\sqrt{x}}$$, und ddE, dergeſtalt genommen, daß x und dx als beſtändig angeſehrn werden, $= \frac{dy.ddy}{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, u. S. $\frac{dyddy}{\sqrt{x}.\sqrt{dx^2+dy^2)}}$ $= o$.

Vergleicht man dieſe Summe mit der allgemeinen Formel $S.Bdy + S.C.ddy + +$, ſo wird $B = o$, und $C = \frac{dy}{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Zugleich muß aber ſeyn $B = DC$, odee $dC = o$. Hieraus ſchließt man, daß die Größe C ſelbſt beſtändig genommen werden muß. Denn hier iſt $B = o$, und, weil $B = dC$, iſt C beſtändig, und aus d. (Cy—ydD) ſchließt man, daß hier C von endlicher Größe ſeyn muß. Wir bekommen alſo die Gleichung $\frac{dy}{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = C$,

oder,

oder, wenn $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$ geſezt wird, um gleiche Abmeſſung in beyden Theilen der Gleichung zu erhalten, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{dy}{\sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Daher $dy\sqrt{a} = \sqrt{x}.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, und $dy = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, welches die Gleichung für die Radlinie iſt.

Denn $\frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}} - \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax-xx}} = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}} - d.\sqrt{(ax-xx)}$, folglich $S.\frac{xdx}{\sqrt{(ax-xx}} = S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}} - \sqrt{(ax-xx)}$.

Es ſey ACE (Taf. II. Fig. 9.) eine halbe Radlinie, und BFE der Halbkreis, von deſſen Punkt E die Radlinie beſchrieben wird; es ſey auch AO = BH $= x$, ſo wird $BD = S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, wenn $BE = a$. Demnach wird $y = BD - DH$.

 Aber

Aber in der Radlinie CD = ED, daher, weil AB = BDE, AI + FB (oder OC + FB) = DB; folglich auch DB — FB = DB — DH = OC = y, daraus erhellt, daß die geſuchte Linie die Eigenſchaften hat, die bekanntlich der Radlinie zukommen. Auf eben die Art, und nach eben den Regeln werden mehrere ähnliche Aufgaben aufgelöſt. Gegenwärtige Methode iſt aber noch nicht zu allen ſogenannten iſoperimetriſchen Fragen hinreichend. Die vollſtändige Ausführung hiervon iſt zu weitläuftig, als daß ſie hier Platz finden kann. Wir verweiſen daher die Leſer, die mehreres, und beſonders Auflöſungen mehr zuſammengeſezter Aufgaben verlangen, auf Jac. Bernoulli Opp. Tom. II. und Joh. Bernoulli Opp. Tom. II. Comment. Petrop. T. VI. Tom. VIII. Maclaurin *in Treatiſe of Fluxions*, Lib. II. cap. 13. und insbeſondere auf Eulers ſolutionem problem. iſoperimetrici ſenſu latiſſimo accepti. 1744.

Vierte

Vierte Vorleſung.

Geſetze der Schwere durch Verſuche beſtätigt. Gleichförmig verminderte Bewegung. Bewegung ſchwingender Körper.

Inhalt.

§. 83. — 87. Geſetze der Schwere, mit Hülfe der Radlinie aus dem Fall ſchwerer Körper gefolgert. §. 87. Geſchwindeſter Fall. §. 88. — 91. Regeln der gleichförmig verminderten Bewegung. §. 92. — 97. Bewegung der Pendeln in der Radlinie und in kleinen Kreisbogen. Warum die Schwingung der Pendeln in kleinen Kreisbogen beſſer von ſtatten geht, als bey den, zwiſchen cykloidalen Blechen ſchwebenden Pendeln?

§. 83.

Die im vorhergehenden erklärten Geſetze der Schwere ſind von ſolcher Wichtigkeit, daß wir von ihrer Wahrheit vollkommen überzeugt ſeyn müſſen; und nichts iſt daher für überflüßig zu halten, wodurch wir belehrt werden, daß ſie ſich wirklich in der Natur, wie wir ſie angenommen haben, befinden. Wir leiteten dieſe Geſetze daraus her, daß die Schwere eine beſtändig gleichförmig wirkende Kraft iſt, und jede Materie überall auf einerley Art antreibt. Und ob wir ſchon zugleich erwieſen haben, daß dieſer Behauptung kein Zweifel entgegen geſezt werden kann, ſo müſſen wir ſie doch auch durch Verſuche zu beſtätigen ſuchen: und dieſes iſt es, womit wir uns in gegenwärtiger Vorleſung beſchäftigen werden.

Die Geſetze der Schwere zu finden, ſcheint weiter nichts nöthig, als Körper von einer Höhe fallen zu laſſen, und die Zeit ihres Falles genau anzumerken: allein wegen dem Widerſtand der Luft iſt dies nicht hinreichend, um etwas gewiſſes daraus zu ſchlieſen. Denn da dieſer beſtändig wächſt, ſo wie die durch den Fall in den Körpern erzeugte Geſchwindigkeit zunimmt, ſo ſieht man leicht, daß ſich ſo viel Fehler und Abweichungen bey ſolchen Verſuchen einſchleichen, daß ſich ſchlechterdings keine zuverläßigen und genauen Geſetze der Schwere daraus ſchlieſen laſſen.

§. 84.

Ja es kann auch nicht jeder die Grundgeſetze der Schwere, worauf die ganze Mechanik beruht, aufſuchen, oder erweiſen. Hierzu gehört eine mehr als gemeine Kenntnis der höhern Geometrie, und insbeſondere genaue Kenntnis der Radlinie. Dieſe Kurve müſſen wir aufmerkſam betrachten, um eine Sache von ſolcher Wichtigkeit, wie die Geſetze der Schwere, zu entdecken und einzuſehen.

Ehe wir aber zeigen, was ſich, durch Hülfe der Radlinie, hier ausrichten läßt, wollen wir anmerken, daß dieſe Linie durch die Bewegung eines Punkts E (Taf. II. Fig. 9.) im Umfang des Kreiſes BDE erzeugt wird, wenn ſich dieſer Kreis auf der Linie AB herumdreht.

§. 85.

Wir wollen hier nicht alle Eigenſchaften der Radlinie erklären, die man in der Geometrie zu betrachten, und mit Nutzen in der Mechanik anzuwenden pflegt. Wir bemerken blos, daß ſich folgendes erweiſen läßt:

1.) Es

1.) Es ſey ACE eine umgekehrte Radlinie, deren Scheitel E; und die Linie AB horizontal; ein ſchwerer Körper falle in der Radlinie; ſo iſt die Zeit des Falles beſtändig einerley und gleichgros, der Körper mag größere oder kleinere Bogen, AE, oder CE, oder KE zurücklegen. (§. 38. Zuſ.)

2.) Die Länge dieſer Kurve ACE iſt = 2 BE, oder doppelt ſo gros, als der Durchmeſſer des Kreiſes, der die Radlinie erzeugt.

§. 86.

Dies vorausgeſezt, ſieht man ohne Schwierigkeit den Nutzen des Werkzeugs, das wir die **Radlinie** nennen, und zugleich, **wie vermittelſt deſſelben die Geſetze des Falles ſchwerer Körper aus ſinnlicher Erfahrung erwieſen werden.**

Es iſt aber das Werkzeug ϙCHh (Taf. III. Fig. 1.) eine hole Rinne in Geſtalt einer halben Radlinie. Zugleich iſt Ach eine andere, der erſtern in allem ähnliche Rinne. Aus den Punkten H und h ſind gerade Horizontallinien, oder vielmehr gleiche Horizontalebnen HhBD und HDKQ gezogen. Dieſes Werkzeug ruht auf drey Schrauben, womit es in wagrechte Lage gebracht werden kann; und dieſe Lage erkennt man daraus, daß das Gewicht P, ſo ſich in S auf und nieder ziehen läßt, genau den Punkt P des Werkzeugs trift, oder mit ihm in einerley Vertikallinie fällt.

In beyden Rinnen aber ſind verſchiedene Punkte bezeichnet, um mehrere und verſchiedene Verſuche über den Fall ſchwerer Körper anſtellen zu können. Zwey derſelben ſeyn E und G; die von dieſen Punkten auf die horizontale Tangente der Cykloide gezogenen Linien EF, GL ſeyn vertikal, und ihre Länge verhalte

ſich wie 9 zu 4. Nun iſt aus §. 79. bekannt, daß die Geſchwindigkeit, die der Körper im Fall durch den Bogen EH erlangt, $= \sqrt{FE}$; ſo wie die im Fall durch den Bogen Gh in der andern Radlinie erzeugte, $= \sqrt{GL}$; folglich verhalten ſich auch die am Ende des Falls in den Punkten H und h erlangten Geſchwindigkeiten, wie 3 zu 2.

Und hierinn beſteht die Vortreflichkeit der Radlinie, daß die fallenden Körper zu den Horizontalpunkten H und h in eben dem Augenblick gelangen, der Fall mag vom Punkt E, oder vom Punkt G anfangen; dann aber von den Punkten h und H mit gleichförmiger Geſchwindigkeit fortlaufen, und die horizontalen Räume hB und QK zurücklegen. Nimmt man alſo dieſe Räume in der Verhältnis 2 zu 3, ſo wird in eben dem Augenblick, da der eine Körper den Punkt t erreicht, der andere in R eintreffen, wenn ht ſich zu HR verhält wie 2 : 3.

Um uns deſto mehr von der Wahrheit dieſer Sache zu überzeugen, müſſen wir dieſen Verſuch zu mehrern malen wiederholen; nimmt man immer andere und andere von den erſten verſchiedene Höhen, wie EF und GL, und ändert zugleich die horizontalen Räume, daß ſie die gehörigen Größen bekommen; ſo wird auch allemal der Erfolg einerley ſeyn.

§. 87.

So wird aus der Erfahrung erwieſen, daß die im Fall durchlaufenen Räume ſich verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, die die ſchweren Körper durch den Fall erlangen. Auſer dieſer Eigenſchaft der Radlinie, die wir auch in der Folge brauchen werden, giebt es noch eine andere

dere mechaniſche, die hier nicht auſer Acht zu laſſen iſt. Ein Körper gelangt in dieſer Kurve am geſchwindeſten von einem Punkt zu einem andern in einer andern Vertikallinie. Iſt gleich dieſe Eigenſchaft derſelben hier minder fruchtbar, als die vorhergehende; ſo ſcheint mirs doch der Mühe werth, das Werkzeug zu beſchreiben, wodurch gezeigt wird, daß der Fall in der Radlinie von einem Punkt nach einem andern in einer andern Vertikallinie geſchwinder ſey, als auf der geraden Linie, zwiſchen dieſen Punkten. (§. 53. Zuſ.)

Dieſes Werkzeug (Taf. III. Fig. 2.) beſteht in einer ganzen umgekehrten ausgehölten Cykloide, woran eine viereckigte Regel mit einer Rinne befeſtigt iſt. In der Cykloide ſelbſt ſind mehrere Löcher angebracht, worein ein Pflock geſteckt, und die Regel darauf geſtellt wird. Das Werkzeug wird eben ſo, wie das vorige, mittelſt der Schrauben in H und H wagerecht geſtellt, und das mit ſeiner Schärfe genau im Punkt K ruhende Loth I zeigt dieſe wagerechte Lage an. Nach dieſer Verrichtung laſſe man von dem Punkt a zwo Kugeln, die eine in der Cykloide, die andere in der Rinne der Regel fallen; ſo wird jene allemal eher den Punkt S erreichen, als dieſe leztere den Punkt G, welche Punkte doch hier als ein einziger anzuſehen ſind.

§. 88.

Wir haben im vorhergehenden zur Genüge gezeigt, wie die Geſchwindigkeit durch die ſtäte Wirkung der Kräfte erzeugt wird, und zugleich beſtändig zunimmt. Wir wollen nun annehmen, daß eben die Kraft, wodurch beſagtermaßen eine gewiſſe

Geſchwindigkeit erzeugt worden, ihre Richtung in die entgegengeſezte umkehre, und in den mit dieſer erzeugten Geſchwindigkeit verſehenen Körper, nach umgekehrter Richtung, aber nach eben dem Geſetz wirke, nach welchem ſie vorher hervorgebracht wurde; ſo wird dieſe vorher erlangte Geſchwindigkeit auf eben die Art und in eben dem Verhältnis vermindert, worinn ſie erzeugt und vermehrt wurde.

§. 89.

Bewegt ſich alſo der Körper in einer Richtung, die der Richtung der wirkenden Kräfte entgegengeſezt iſt, ſo muß er dieſe Veränderung ſeiner Bewegung erdulden. Vermindern die Kräfte die Bewegung gleichförmig. ſo nennen wir dieſe Bewegung ſelbſt gleichförmig vermindert.

Da ſich alſo jede Geſchwindigkeit anſehen läßt, als wäre ſie im Fall durch die Vertikallinie AB (Taf. IV. Fig. 1.) erzeugt worden, §. 79. ſo folgt, daß ein durch BA mit der, im Fall durch AB erlangten Geſchwindigkeit ſteigender Körper in eben der Linie den Punkt A erreichen kann, ehe ſeine Geſchwindigkeit gänzlich verſchwindet. Wir ſagen aber, was in der freyen ungehinderten Bewegung erfolgen muß, und der Grund unſerer Behauptung iſt offenbar. Denn die Schwere wird durch ihre entgegengeſezten Wirkungen und Reizungen die Bewegung eben ſo gleichförmig zerſtören, als ſie ſelbige vorher erregt hatte.

§. 90.

So oft alſo eine Verminderung der Bewegung von einer gleichförmig wirkenden Kraft, wie die

Schwere

Schwere, entſteht, wird folgendes ſtatt haben: (§. 88. 89.)

1.) Ein durch die Kurve AE gefallener Körper kann durch jede andere Linie CE oder CD zu eben der Höhe AB wieder ſteigen, wodurch er gefallen iſt; und die Geſchwindigkeiten in gleich hohen Punkten über den Horizont F und G, ſind im Fallen und Steigen gleichgros.

2.) Iſt die Kurve ED der Kurve AE in allen ähnlich, ſo kann die Zeit in beyden einerley, aber auch verſchieden ſeyn. Denn in gleichhohen geneigten Linien verhalten ſich die Zeiten, worinn ſie zurückgelegt werden, wie die Längen; (§. 81. 5.) ſie ſind alſo ungleich, wenn die Linien verſchiedene Längen haben; aber gleich, wenn die Längen einerley ſind.

3.) **Die in der gleichförmig verminderten Bewegung verlohrnen Theile der Geſchwindigkeit verhalten ſich wie die Zeiten.** §. 72. 1. u. 89.

§. 91.

Sollen daher die in der gleichförmig verminderten Bewegung in gleichen Zeiten zurückgelegten Räume, aus der gegebenen anfänglichen Geſchwindigkeit beſtimmt werden; ſo berechne man die Räume, die in jedem Augenblick im Fall durch die Linie AB, wodurch die gegebene Geſchwindigkeit hätte erlangt werden können, vom Anfang bis zu Ende des Falles zurückgelegt werden, ſo ſind dieſe Räume in verkehrter Ordnung genommen, die geſuchten.

Bekannt iſt aus §. 50. daß die Räume im Fallen im Verhältnis der ungeraden Zahlen wach-

 ſen;

ſen; daraus erhellt, daß bey der verminderten Bewegung die Räume im umgekehrten Verhältnis derſelben zu nehmen ſind.

Z. B. ſey die Geſchwindigkeit des Körpers diejenige, womit er in Zeit von einer Sekunde in horizontaler Richtung einen Raum = 120′ zurücklegt, ſo findet man die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= \frac{120 \cdot 120}{60} = 240'$ (§. 57.) ſo wie das Quadrat der Zeit $= \frac{240}{15} = 16$. §. 48. 56. daher die Zeit ſelbſt, worinn die Geſchwindigkeit erlangt wird, $= 4''$. Da aber die in dieſer Zeit durchlaufenen Räume ſich verhalten wie 1 : 3 : 5 : 7, oder wie 15, 45, 75, 105; ſo wird der Körper, deſſen Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung 120′ iſt, in der erſten Sekunde 105′, in der zweyten 75′, in der dritten 45′, und endlich in der vierten 15′ ſteigen.

§. 92.

Dergleichen Bewegung, die in eben dem Verhältnis vermindert und zerſtört wird, worinn ſie erzeugt wird und zunimmt, kommt bey der Bewegung der **Pendeln**, oder **ſchwingender Körper**, vor. Um aber zu verſtehen, was ein **Pendel** iſt, ſey CD (Taf. IV. Fig. 2.) eine unbiegſame in C aufgehängte Linie, an deren Ende D ein ſchwerer Körper hängt, der frey durch den Bogen EDF von E nach F, und wieder zurück ſchwingen kann: ſo **heißt der Körper** D ſelbſt **ein ſchwingender Körper, oder ein Pendel, ſo wie wir auch ſeinen Schwung durch den ganzen Bogen EDF einen Pendelſchwung nennen.**

§. 93.

§. 93.

Aus §. 90. erhellt alſo, daß das Pendel, wenn es vorher bis zu E erhoben werden, durch den Bogen ED fallen, und mit der durch dieſen Fall erlangten Geſchwindigkeit wieder nach F durch den Bogen DF ſteigen, von da ſich wieder durch eben den Bogen DF zum Punkt D herunter bewegen, und von dieſem wieder nach E ſteigen muß. Dieſe Schwungbewegung des Pendels würde ohne Ende fortdauern, und der Bogen DE beſtändig dem Bogen DF gleich ſeyn, wenn nicht theils von dem ſtäten Widerſtande der Luft, theils von dem aus der Friction des Punkts C entſtehenden Hindernis, die Bewegung des Pendels vermindert würde.

§. 94.

Wegen dem großen Nutzen der Pendeln, ſowohl in der Mechanik, als auch bey genauer Beſtimmung der Zeit, können wir nicht umhin, die Natur dieſer Bewegung noch ausführlicher vorzutragen. *) Zu dem Ende müſſen wir zur Radlinie zurückkehren, und eine geometriſche Eigenſchaft derſelben betrachten, ohne die eine andere mechaniſche, deren wir uns hier bedienen wollen, nicht verſtanden werden kann.

Es

*) Jedes Pendel AH (Taf. IV. Fig. 3.) kann in jeder Kurve ſchwingen, wenn es zwiſchen zwo Linien AB und AC aufgehängt wird, durch deren Abwickelung die dritte BEC, worinn das Pendel gehen muß, erzeugt wird; welche Abwickelung, ſo wie die Bewegung des Pendels, eben ſo wie bey der Radlinie, erfolgen muß. Die Radlinie betrachten wir hier insbeſondere, weil die Bogen dieſer Kurve nebſt den Kreisbogen in der Ausübung, wo Pendeln anzuwenden ſind, den Bogen anderer Kurven, die durch Schwingen beſchrieben werden könnten, weit vorgezogen zu werden verdienen. (v.)

Es ſey alſo (Taf. IV. Fig. 3.) AB eine halbe Radlinie, und FGB der Kreis, wodurch die Radlinie erzeugt wird; da der Bogen der halben Radlinie AB = 2 FB, (§. 85. 2.) ſo nehme man einen Faden von der Länge 2 FB, und lege ihn um den Bogen der Radlinie. Nun laſſe man den Faden nach und nach dergeſtalt vom Bogen ſich abwickeln, daß der Faden ſelbſt überall die Richtung der Tangente z. B. hH behält; ſo wird der Faden durch ſeine Abwickelung eine Kurve BHE beſchreiben, die mit der halben Radlinie AB einerley, aber verkehrt iſt, ſo daß der Scheitel B in den Punkt E fällt. **Die Radlinie entwickelt ſich alſo ſelbſt**, und dies iſt es, was wir von dieſer Linie hier vorausſchicken müſſen.

§. 95.

Iſt daher die Radlinie AB im Punkt A dergeſtalt befeſtigt, daß ihre Tangente in die Horizontallinie BD fällt, ſo wird das Pendel ADE, deſſen Länge = 2 FB, indem es von B nach E ſchwingt, die halbe Radlinie BE beſchreiben. Iſt auch AC eine Radlinie, gleich und ähnlich der Radlinie AB, ſo wird das durch EC ſchwingende Pendel wieder eine halbe Radlinie, der erſtern gleich und ähnlich beſchreiben. §. 94. Demnach beſchreibt es, indem es durch BEC ſchwingt, durch ſeine Bewegung von B nach C eine ganze Radlinie, folglich iſt ſeine Bewegung mit der Bewegung eines Körpers durch die ganze Radlinie einerley. Die Bewegung des Pendels durch die ganze Radlinie BEC nennen wir ſeine **ganze Schwingung**; deren **Hälfte** die Bewegung durch die halbe Radlinie BE oder CE iſt.

§. 96.

§. 96.

Auch wird bewieſen, daß die Zeit, worinn das Loth H durch die halbe Radlinie BE fällt, ſich verhält zur Zeit des freyen Falles durch die Vertikallinie DE, oder den Durchmeſſer des Kreiſes, der die Radlinie erzeugt, wie der halbe Umfang des Kreiſes zum Durchmeſſer. (§. 35. Zuſ.)

Und da der Durchmeſſer des Kreiſes, der die Radlinie erzeugt, die halbe Länge des Pendels iſt, ſo verhält ſich auch die Zeit durch die halbe Radlinie zur Zeit durch die halbe Länge des in der Radlinie ſchwingenden Pendels DE, wie der halbe Umfang des Kreiſes zum Durchmeſſer, oder wie 11 : 7 beynahe.

Eben ſo erhellt, daß die Zeit der ganzen Schwingung durch BEC zur Zeit durch die halbe Länge des Pendels DE ſich verhält, wie der ganze Umfang des Kreiſes zum Durchmeſſer, oder wie 22 : 7 beynahe. Denn die Zeit durch CE iſt der Zeit durch BE gleich. §. 90. 2.

§. 97.

Aus §. 94. folgt, daß das, eine Radlinie beſchreibende Pendel AE (Taf. IV. Fig. 3.) in E und den zunächſt liegenden Punkten, Kreisbogen beſchreiben muß. Da alſo die Zeit durch die ganze Radlinie mit der Zeit durch kleine Kreisbogen einerley iſt, ſo wird auch folgendes wahr ſeyn:

2.) Die Zeit durch kleine Kreisbogen iſt mit der Zeit durch kleine Bogen der Radlinie einerley und gleichgros.

2.) Folglich iſt auch die Zeit durch einen kleinen Kreisbogen mit der Zeit in der Radlinie ſelbſt

einer-

einerley, d. i. die Zeit durch den Bogen EDF, (Taf. IV. Fig. 2.) wenn dieſer ſehr klein iſt, verhält ſich zur Zeit durch die halbe Länge des Pendels, oder durch $\frac{1}{2}$CD, wie der Umkreis zum Durchmeſſer, d. i. wie 22 : 7.

3. **Demnach laſſen ſich beym Pendelſchwung kleine Kreisbogen an die Stelle der Cykloidenbogen ſetzen,** welches in der Ausübung ſehr bequem iſt. Der Gebrauch der Radlinienpendel iſt nicht rathſam, weil die cykloidalen Bleche, zwiſchen welchen der Faden aufgehängt werden muß, elaſtiſch ſeyn müſſen: dadurch geſchieht es aber, daß ſie den Faden, wenn er etwas ſtark an ſie anſchlägt, zurückſtoßen, und dadurch ſeine Bewegung ſtören. Zu freyen, in Kreisbogen ſchwingenden Pendeln ſind die von merklicher Länge am beſten: denn alsdenn durchlaufen ſie in ihren ganzen Schwingungen nicht ſo leicht einen Bogen, der über 15 oder 18 Grad ſteigt. Auch iſt zu merken, daß das am Ende des Fadens hängende Loth etwas ſchwer ſeyn muß. Denn je leichter es iſt, deſto leichter und geſchwinder wird ſeine Bewegung von der Luft geſtört und gehindert; aus dieſem Grunde giebt man ihm die Geſtalt einer Linſe.

4.) **Iſt die Zeit, worinn ein Körper durch den Bogen fällt, kürzer als die Zeit des Falles durch die Sehne.** Denn es ſey T die Zeit der ganzen Schwingung durch den Bogen, und t die Zeit durch die halbe Pendellänge; ſo iſt $T : t = p : d$; und $t = \frac{dT}{p}$. Aber die Zeit durch die Sehne

iſt

iſt der Zeit durch den Durchmeſſer gleich. §. 76. 82. Um alſo die Zeit durch die Sehne zu finden, ſuche man die Zeit des Falles durch die Höhe, die der halben Pendellänge viermal genommen gleich iſt; denn die halbe Pendellänge, oder der halbe Halbmeſſer, iſt der vierte Theil des ganzen Durchmeſſers des Kreiſes, durch deſſen Bogen das Pendel ſchwingt.

Aber die von ſchweren Körpern im Fallen zurückgelegten Räume verhalten ſich wie die Quadraten der Zeiten. §. 47. Iſt alſo L die doppelte Pendellänge, ſo wird $\sqrt{\frac{1}{4}L} : \sqrt{L} = \frac{dT}{p} : \frac{2dT}{p}$, und dies iſt die Zeit durch den Durchmeſſer = der Zeit durch die Sehne. Sezt man alſo d : p = 7 : 22, ſo wird dieſe Zeit $\frac{14}{22}T$, die doppelt genommen werden muß, wenn die Zeit des Fallens und Steigens durch die Sehne mit der Zeit der ganzen Schwingung verglichen werden ſoll; daß alſo die Zeit der ganzen Schwingung durch die Sehnen $= \frac{28}{22}T = \frac{14}{11}T$. Daher verhält ſich die Zeit der Schwingung durch die Sehne zur Zeit T der Schwingung durch den Bogen, wie $\frac{14}{11} : 1 = 14 : 11$. **Demnach iſt die Zeit durch die Sehne größer, als die Zeit durch den Bogen**, welches ſich auch deswegen ſo verhalten muß, weil hier die Kreisbogen mit den Bogen der Radlinie zuſammenfallen, in dieſer aber der Fall am geſchwindeſten iſt. §. 87.

Fünfte Vorleſung.

Vom Schwerpunkt.

Inhalt.

§. 98. Schwerpunkt. §. 99. wie er in den Körpern mechaniſch gefunden wird. §. 100 — 102. Ruht der Schwerpunkt, ſo kann ſich der Körper nicht bewegen. §. 103. Wie es ſich verhält, wenn die Körper auf geneigten Ebenen liegen. §. 104. Lage der Körper, worinn ſie am meiſten zum Fallen geneigt ſind. §. 105. Schwerpunkt im Dreyeck. §. 106. im Kreisbogen. §. 107. in Kreisabſchnitten. §. 108. Mittelpunkt der Größe und Schwere in Priſmen, Pyramiden und Kegeln. §. 109. Auf einer geneigten Ebene ſteigender Cylinder. §. 110. Warum durch geneigte Ebenen fallende Körper bald rollen, bald in unveränderter Lage durch die Ebene fallen. §. 111. Für ſich aufwärts rollender doppelter Kegel.

§. 98.

Ehe wir in Betrachtung der Pendeln weiter fortgehen, müſſen wir etwas vom Schwerpunkt vorausſchicken. Bisher nahmen wir am Pendel nur einen einzigen ſchweren Punkt D an; hier ſetzen wir an die Stelle dieſes Punkts ein in D angehängtes Gewicht, wodurch das Pendel in Schwung gebracht wird; und deſſen Schwerpunkt, wenn es ſehr klein iſt, ſich in eben dem Punkt D, ohne merklichen Irrthum annehmen läßt. Durch den Schwerpunkt aber verſtehen wir den Punkt im Körper, worinn der Körper dergeſtalt getheilt wird, daß die Theile nach allen Seiten dieſes Punkts gleich ſtark

ſtark drücken, was auch der Körper für eine Lage in, oder über, oder unter der Horizontallinie haben mag.

Anmerkung. Der Punkt, den wir den Schwerpunkt nennen, und der die Eigenſchaft hat, daß der in ihm aufgehangene Körper beſtändig ruht, und dieſelbe Lage beybehält, er mag in der wagerechten, oder in jeder andern, gegen die wagerechte geneigten Linien liegen, wäre in keinem Körper zu finden, wenn die Schwere unveränderlich, und nicht auch zugleich ihre Richtungen gleichlaufend ſind. Da alſo die Richtungen der Schwere gegen den Mittelpunkt der Erde, oder wenigſtens nach einem Punkt zuſammenlaufen, der, wegen der afterkugelhaften Geſtalt der Erde, von dem Mittelpunkt ſelbſt zwar verſchieden, aber doch in der Nähe deſſelben befindlich iſt, ſo erhellt deutlich, daß man, wenn wir der genauern Theorie gemäs reden wollen, nicht ſagen kann, ein Körper habe einen Schwerpunkt, der in jeder Lage deſſelben einerley und unveränderlich ſey. Folglich kann man nur alsdenn den Körpern einen Schwerpunkt zueignen, wenn ihre Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde für unendlich gros, und daher in Anſehung der in nicht ſehr groſen Körpern entfernten Theile, für gleichlaufend zu halten ſind.

Um uns von der Wahrheit dieſer Behauptung zu überzeugen; laſſet uns zwey Theilchen eines Körpers in A und B (Taf. V. Fig. 2.) betrachten, die von unveränderlichen Kräften gegen den Mittelpunkt D getrieben werden, und deren Maſſen wir A und B nennen wollen. Laßt uns alſo annehmen,

nehmen, dieſe Theile wären in der wagerechten Linie AB im Gleichgewicht, und in C ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt, AB komme aber hernach in eine andere Lage, z. B. aCb. Da aber A und B in wagerechter Lage im Gleichgewicht ſind, ſo verhalten ſich die Preſſungen, oder die Gewichte A und B unter einander, wie Ce : Cd = A : B, oder wie ſin. x : ſin. o, wenn der Winkel CDA = o, und der Winkel CDB = x geſezt wird: um nun in der andern Lage aCb das Gleichgewicht zu erhalten, muß ſeyn A : B = Cq : Cf = ſin. CDb : ſin. CDa. Daher wird nicht in jeder Lage das Gleichgewicht einerley bleiben, wenn nicht überall ſin. CDb : ſin. CDa = ſin. x : ſin. o, welches doch offenbar nicht ſtatt haben kann. Demnach wird, genau zu reden, der Schwerpunkt in der angegebenen Bedeutung, keinen Körper, wo die Schwere unveränderlich iſt, und nach einem gewiſſen Mittelpunkt ſtrebt, beyzulegen ſeyn.

Iſt aber die Entfernung des Mittelpunkts C in Vergleichung mit der Länge AB als unendlich anzuſehen, ſo wird auch allemal das Verhältnis ſtatt finden, ſin. CDb : ſin. CDa = ſin. x : ſin. o. Wo alſo dies nicht iſt, oder welches einerley, wo die Richtungen der Schwere nicht parallel angenommen werden, ſo iſt kein ſolcher Schwerpunkt in den Körpern zu finden. Zugleich erhellt aber, daß bey unendlich groſen Entfernungen nichts daran liegt, was man für ein Geſetz der Centralkräfte annimmt: denn was wir auch für eins erdenken, ſo ſind doch in unendlicher Weite die Kräfte als unveränderlich, und den Maſſen proportional anzuſehen.

Auch

Auch ſieht man, daß, wenn gleich der Schwerpunkt nicht gegeben iſt, doch in jeder einzelnen von der wågerechten verſchiedenen Lage des Kórpers ſich ein Punkt F beſtimmen låßt, ſo der Schwerpunkt der Maſſen A und B iſt. Dieſer wird gefunden, wenn der Winkel aDb von der Linie DF dergeſtalt geſchnitten wird, daß ſin. x : ſin. o = A : B, welches allemal angeht. (V.)

§. 99.

Daß es einen ſolchen Schwerpunkt in allen und jeden Kórpern giebt, daran låßt die Erfahrung nicht zweifeln. Sie lehrt uns zugleich die Durchmeſſer der Schwere, oder die im Kórper durch den Schwerpunkt gezogene Linie, ohne Mühe finden.

Um dieſe Linie zu beſtimmen, darf man nur den Kórper z. B. GEHK (Taf. IV. Fig. 4.) auf eine Linie, oder auf die Schårfe eines andern Kóepers, z. B. des Prisma ABCDM legen; und darauf ſo lang hin und her ſchieben, bis der Theil GI mit dem Theil IK im Gleichgewicht iſt; iſt dieſes geſchehen, ſo iſt die Linie IF entweder ein Durchmeſſer der Schwere, oder wenigſtens eine mit dem Durchmeſſer der Schwere gleichlaufende Linie; jenes, wenn der Schwerpunkt einer Flåche; dieſes aber, wenn der Schwerpunkt eines Kórpers geſucht wird. Auf eben die Art erhålt man noch eine andere Linie LM, die ebenfalls entweder ein Durchmeſſer, oder mit einem Durchmeſſer der Schwere gleichlaufend iſt. Der Punkt N, worinn ſich dieſe Linien ſchneiden, iſt bey Flåchen der Schwerpunkt ſelbſt, §. 98. bey Kórpern aber, die drey Ausmeſſungen haben, muß

noch überdies in einer andern Seite ein ähnlicher Punkt N geſucht werden.

Sind aber dieſe beyden Punkte gegeben, ſo wird die Stelle des Schwerpunkts in den Körpern leicht gefunden; denn der Schwerpunkt liegt in der Vertikallinie. §. 40. Laßt uns alſo zwo Linien vorſtellen, die aus dieſen Punkten gezogen, im Körper einander durchſchneiden, und, wenn der Körper umgekehrt wird, eine vertikale Lage erhalten, ſo wird der Schwerpunkt in ihrem Durchſchnittspunkt ſeyn.

Auf dieſe Art wird die Aufgabe, den Schwerpunkt zu finden, allgemein aufgelößt. Wir ſchlieſen hieraus zugleich, daß dieſer Punkt, wenn der Körper ein Parallelepipedum, oder überhaupt, wenn ſeine gleichlaufenden Schnitte gleich und ähnlich ſind, in die Mitte der geraden Linie fällt, die durch die in zwey entgegengeſezten Grundflächen gefundenen Punkte N geht.

§. 100.

Daraus folgt auch dieſes: es ſey der Körper AB (Taf. IV. Fig. 5.), der frey herunter fallen kann, in der Linie CD, worinn der Schwerpunkt befindlich, entweder aufgehängt, oder von einem Körper CEF unterſtüzt; ſo wird der Schwerpunkt ſelbſt, oder ein anderer Punkt in der Richtung des Schwerpunkts, aufgehängt oder unterſtüzt ſeyn. Iſt jenes, ſo wird in keiner wagerechten oder geneigten Lage des Körpers ein Theil deſſelben den andern überwiegen; findet aber jenes ſtatt, ſo wird der Punkt C das ganze Gewicht des Körpers unterſtützen, und auch alsdenn kein Theil des Körpers auf der einen Seite die-

ſes

ſes Punkts, den Theil auf der andern Seite überwiegen können, weil hier gleiche Preſſungen in entgegengeſezten Richtungen wirken, folglich ein Gleichgewicht hervorbringen müſſen. §. 29.

Da alſo, wenn nur ein einziger Punkt in der Richtung des Schwerpunkts unterſtüzt iſt, der Körper ruhen muß, ſo darf man nur den einen Punkt N (§. 99.) beſtimmen, um den Zuſtand zu finden, worinn der Körper ruht.

§. 101.

Ruht aber der Schwerpunkt, ſo daß er ſich ſchlechterdings nicht bewegen kann, ſo muß auch der ganze Körper in Ruhe beharren: daher gedenkt man ſich das ganze Gewicht des Körpers im Schwerpunkt vereinigt, und die Kraft, die zur Unterſtützung des Schwerpunkts eines Körpers nöthig iſt, wird auch zur Unterſtützung ſeines ganzen Gewichts hinreichen.

§. 102.

Wo ſich alſo der Schwerpunkt nicht bewegen kann, da kann auch der ganze Körper ſich nicht bewegen oder fallen. Daher pflegt man auch die Körper dergeſtalt auf Stützen A und B (Taf. IV. Fig. 6.) wagerecht zu legen, daß der Schwerpunkt C in die Mitte derſelben fällt.

Denn wenn der Schwerpunkt nicht fallen kann, muß der Körper, wo er nicht biegſam iſt, nothwendig ruhen. §. 100. Die Stützen A und B müſſen aber ſo ſtark ſeyn, daß ſie das Gewicht des aufgelegten Körpers tragen können.

§. 103.

Da die freywirkende Schwere ihre Wirkung und Effekt beſtändig in der Vertikallinie äuſert, §. 40. und ſich in die Stelle des ganzen Gewichts der Schwerpunkt ſetzen läßt; §. 101. ſo erhellt auch, daß der Körper weder herunter ſtürzen, noch auf irgend eine Weiſe ſinken kann, wenn die Richtungslinie des Schwerpunkts in die Grundfläche fällt, worauf der Körper ruht, der Körper mag aufrecht oder ſchief liegen. Fällt aber dieſe Linie auſerhalb der Grundfläche, ſo muß nothwendig der Körper wanken, und ſo lange fallen, bis er in die Lage kommt, wo ſein Schwerpunkt unterſtüzt wird. Denn hier hindert nichts, daß der Schwerpunkt in der Vertikallinie fällt, auf deſſen Bewegung die Bewegung der ganzen Maſſe folgt. §. 102.

Daher iſt es auch kein Wunder, daß die berühmten Thürme zu Piſa und Bologna nicht einfallen, ob ſie gleich ſehr gegen den Horizont geneigt ſind. Denn die Vertikallinie durch den Schwerpunkt, oder das vom Schwerpunkt gefällte Loth, fällt in ihre Grundfläche, und zwar in einer groſen Entfernung von ihren äuſerſten Enden. Dies iſt auch bey der Bewegung der Thiere zu merken. Dieſe ſind allemal, auf welcher Seite auch ihr Körper ruht, vor dem Fall ſicher, ſo oft die Vertikallinie durch ihre Mittelpunkte in die Grundflächen fällt, worauf ſie ſtehen. Je gröſſer auch dieſe Grundfläche iſt, und je weiter die Richtungslinie des Schwerpunkts fortrücken kann, ehe ſie auſerhalb der Grundfläche fällt, deſto ſchwerer wird der Körper umgeworfen, und

deſto

deſto ſicherer iſt er vor dem Fall. Je kleiner aber die Grundfläche, und je kürzer der Weg iſt, worinn das aus dem Schwerpunkt gefällte Loth in der Grundfläche fortrücken kann, deſto leichter wird der Körper umgeworfen, und deſto mehr iſt er der Gefahr zu fallen ausgeſezt; ob er gleich ſo lange unterſtüzt iſt, als jene Vertikallinie innerhalb der Grundfläche fällt, ſollte ſie auch in den äuſerſten Punkt derſelben treffen. Hierauf beruht die Kunſt der Seiltänzer. Sie beſteht in einer Fertigkeit, die Körper in der Lage zu unterſtützen, worinn ſie dem Fall am meiſten ausgeſezt ſind; und was uns über die Kunſtſtücke dieſer Leute in Bewunderung ſezt, rührt daher, weil wir uns nicht leicht vorſtellen, daß die Körper alsdenn unterſtüzt werden können, wenn wir den Schwerpunkt entweder auf dem äuſerſten Ende der Grundfläche, oder auf den nächſten Punkten ruhen ſehen, folglich iſt uns das unerwartet, was von dieſen Künſtlern gezeigt wird.

Bey dieſer Materie wollen wir uns aber weiter nicht aufhalten, ſondern nur folgende zwey Stücke bemerken:

1.) **Iſt der Schwerpunkt entweder gar nicht, oder nur zum Theil unterſtüzt, ſo daß er fallen kann, ſo muß der Körper ſelbſt fallen, und zwar nach eben der Seite, nach welcher der Schwerpunkt ſelbſt fallen kann.** Kann daher

2.) **der Schwerpunkt ſich nicht frey bewegen, oder nicht in der vertikalen, doch aber in einer andern Linie ungehindert fallen, ſo kann der Körper auch fallen, obgleich das aus dem Schwerpunkt gefällte Loth durch ſeine Grund-**

fläche geht. Und dies iſt der Grund, warum die Körper durch geneigte Ebenen fallen, obgleich die Richtung des Schwerpunkts auf ihrer Grundfläche, wiewohl ſchief, ſteht. Denn wir haben §. 71. gezeigt, daß ein Theil der Schwere in gleichlaufender Richtung mit den geneigten Ebenen wirkt; der Schwerpunkt wird alſo in doppelter Richtung getrieben, und damit er ruhe, muß eine Kraft in der Richtung der Ebene ſelbſt den Körper unterſtützen. Zugleich kann aber doch der Körper nicht vor ſich her ſtürzen, und durch die Ebene rollen, ſo oft die aus dem Schwerpunkt gefällte Vertikallinie durch ſeine Grundfläche geht.

§. 104.

Hieraus läßt ſich in jedem vorkommenden Falle beurtheilen, ob ein Körper in gewiſſer Lage, in der wagerechten Ebene vor dem Fall ſicher iſt, oder nicht. Ueberdies ſieht man auch hieraus: wenn ein ruhender Körper anfängt zu wanken, oder ſich vorwärts zu neigen; ſo wird er, wenn ſeine Höhe größer iſt, eher und leichter fallen, als ein anderer, deſſen Winkelbewegung eben dieſelbe, die Höhe aber kleiner iſt. Es ſey z. B. ABKL (Taf. IV. Fig. 7.) ein Körper von kleinerer Höhe, und ABFG ein Körper von größerer Höhe; ſo kann dieſer leichter als jener vorwärts fallen. Denn bewegen ſich beyde Körper unter gleichen Winkeln um den Punkt B, ſo wird das aus dem Schwerpunkt C des Körpers KLBA gefällte Loth noch in die Grundfläche AB in H fallen, wenn der Körper in die Lage BlKa kommt; da die Vertikallinie durch den Schwerpunkt c des Körpers AFGB, in der Lage aBgf ſchon

bis

bis M gerückt iſt, welcher Punkt dem äuſerſten Punkt B der Grundfläche näher iſt, als der Punkt H. Demnach wird der Körper von größerer Höhe bey fortgeſezter Bewegung, auch weit eher in die Lage kommen, wo das Loth auſerhalb der Grundfläche fällt, als der andere, deſſen Höhe kleiner iſt; wenn nämlich beyder Körper Winkelbewegung einerley iſt.

Will man die Winkelbewegung beyder Körper genauer beſtimmen, ehe ſie in die Lage kommen, worinn ſie fallen, und daraus beurtheilen, wie weit ein Körper geneigt werden kann, bis er in die Lage kommt, wo er zwar dem Fall am nächſten, aber doch noch ſtehen bleibt, und für ſich ſelbſt wieder in ſeine Grundfläche zurückfällt; ſo laſſet uns zu dem Ende die **ſiebente und achte Figur** (Taf. IV.) betrachten. Es seyn die Schwerpunkte der Körper C und D; man ziehe die Linien CB und DB, ſo iſt ſin. BDC = CB, ſo wie ſin. BCH = DB. Um nun die Gränze zu finden, die die Körper in der größten Winkelbewegung durch die Bogen Dm und CL erreichen können, ehe ſie fallen, ſo laſſet uns annehmen, die Bewegung geſchehe um B, und der Körper ABLK ſey in der Gränze des Falles, wenn ſein Schwerpunkt C durch den Bogen LC gerückt iſt; eben ſo ruhe der Körper ABFG auf dem äuſerſten Punkte ſeiner Grundfläche, wenn ſein Schwerpunkt den Bogen Dm durchlaufen hat. Hier iſt aber HCB = CBG, und HDB = DBG. Daher kann KLBA den Winkel HCB beſchreiben, ehe er fällt, und AFGB den Winkel HDB. Die Größe dieſer Winkel aber wird durch die aus den Schwerpunkten auf die Grundfläche gefällten Lothe, und durch die Linien beſtimmt, die von dieſen Schwerpunkten zu dem äuſerſten Punkt

der Grundfläche, worauf die Körper ruhen, gezogen werden. Daher ſchlieſen wir ferner:

1.) Weil die Sinus der Winkel HCB und HDB (Fig. 8.) ſich verhalten wie DB und CB, ſo ſey H die Höhe DH des Schwerpunkts D, und h die Höhe CH des Schwerpunkts C; die Breite der Grundfläche HB aber, worauf die Schwerpunkte ruhen, $= b$, ſo verhalten ſich beſagte Sinus unter ſich, wie $\sqrt{(H^2+b^2)} : \sqrt{(h^2+b^2)}$. Hieraus ſchlieſen wir, **daß ein Körper deſto eher fällt, je größer bey einerley Grundfläche ſeine Höhe iſt**; denn der Sinus der Winkelbewegung iſt alsdenn kleiner.

2.) Da $\frac{b}{h}$ die Tangente des Winkels HCB ausdrückt, ſo iſt dieſe Tangente deſto größer, je gröſſer die Grundfläche b, und je kleiner die Höhe des Schwerpunkts; daher auch deſto größer der Winkel, um den der Körper, ehe er fällt, ſich neigen kann.

§. 105.

Wie der Schwerpunkt durch Erfahrung zu finden, haben wir ſchon §. 99. gezeigt; **wir wollen auch darthun, wie er blos geometriſch in einigen Körpern beſtimmt wird.** Hiervon wollen wir einige Beyſpiele geben:

Zuerſt wollen wir zeigen, **wie der Schwerpunkt in einem Dreyeck gefunden wird**, welche Figur wir überall in allen ihren Theilen gleich ſchwer und dicht annehmen. Es ſey alſo (Taf. IV. Fig. 9.) ADB ein

ein Dreyeck, deſſen Seiten AB und DB in zwey gleiche Theile getheilt ſind; ſo iſt bekannt, daß die Linie DC alle mit der Linie AB gleichlaufenden Linien ab in zwey gleiche Theile durchſchneidet, daß alſo die Linie DC ein Durchmeſſer der Schwere: aus eben dem Grunde halbirt auch die Linie AF alle mit der Seite DB gleichlaufende Linien gh, daher auch AF im Durchmeſſer, und der Punkt e, worinn dieſe beyden Durchmeſſer einander ſchneiden, der Schwerpunkt. Es iſt alſo nur übrig, zu ſuchen, was für ein Theil der Linie DC die Linie eC iſt.

Man ziehe PC parallel mit DB, ſo ſind die Dreyecke PeC und DeF ähnlich; daher De : eC = DF : PC. Da aber überdies APC und AFB ähnliche Dreyecke, und AC = $\frac{1}{2}$AB, vermöge der Verzeichnung, PC = $\frac{1}{2}$BF = $\frac{1}{2}$DF, ſo wird auch ſeyn eC = $\frac{1}{2}$De = $\frac{1}{3}$DC.

Demnach liegt der Schwerpunkt im Dreyeck in der Linie, die aus der Spitze des einen Winkels zu der gegenüberſtehenden Seite gezogen, dieſe in zwey gleiche Theile ſchneidet; er iſt von der Spitze um $\frac{2}{3}$ dieſer Linie; von der gegenüberſtehenden Seite aber um $\frac{1}{3}$ derſelben entfernt.

§. 106.

Laſſet uns das zweyte Beyſpiel hinzufügen, und **den Schwerpunkt für jeden Kreisbogen finden.** Hier müſſen wir die Methode vorausſchicken, nach **welcher der Schwerpunkt in jedem Umfang gefunden wird, den die in einem Kreis zuſammengezogenen Sehnen ausmachen.**

Es ſeyn dieſe in der Kreisfläche ABCDE (Taf. IV. Fig. 10.) gezogenen Sehnen AB = BC = CD = DE; und in a, b, c, d, in gleiche Theile getheilt: man ſetze, ſie ſeyn ſchwer; ſo ſind ihre Schwerpunkte in den Punkten a, b, c, d. Zieht man dieſe Punkte mit den Linien ab, cd zuſammen, ſo ſind auch dieſe in f und e halbirt; der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Sehnen CD und DE, iſt f. Man ziehe überdies die Linie ef, und theile ſie in g in gleiche Theile, ſo iſt klar, daß dieſer Punkt g der gemeinſchaftliche Schwerpunkt iſt aller Sehnen AB, BC, CD, DE. Wie gros auch die Anzahl der Sehnen, ſo wird ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt eben ſo beſtimmt.

Die Lage des Punkts g aber muß in Theilen des Halbmeſſers GC ausgedrückt werden. Man ziehe alſo die Linie Gd, die auf DE ſenkrecht iſt, weil DE in d in zwey gleiche Theile getheilt iſt, auch ziehe man den Halbmeſſer GE auf die Sehne CE in E. So ſind die Dreyecke fdG und DFE ähnlich, weil in F und f rechte Winkel ſind, und der Winkel am Umkreis DEC auf einem Bogen ſteht, der doppelt ſo gros iſt, als der Bogen des Winkels DGd am Mittelpunkt. Daher iſt DE : EF = Gd : Gf, und 2DE : 2EF = Gd : Gf, d. i. CD + DE : CE = Gd : Gf. Ueberdies ſind die Dreyecke CEH und Gfg ähnlich, weil in g und H rechte Winkel, und der Winkel am Mittelpunkt CGf auf dem halben Bogen des Winkels CEH am Umkreis ſteht. Folglich CE : EH = Gf : Gg. Daher weil auch CD + DE : CE = Gd : Gf, vermöge des vorhergehenden, ſo wird auch CD + DE : EH = Gd : Gg, und daher 2 (CD + ED) : 2 EH

$2EH = Gd : Gg$, oder $AB + BC + CD + DE : EA = Gd : Gg$. Woraus wir folgendes ſchlieſen:

a) Da wir beſtändig auf eben den Schluß kommen, wie gros auch die Anzahl der Sehnen angenommen wird, wofern ſie nur auf beyden Seiten des Halbmeſſers CG gleich gros iſt, und da der ganze Bogen als eine unendliche Summe kleinſter Sehnen anzuſehen iſt; ſo ſchlieſen wir, daß die ganze Summe dieſer kleinſten Sehnen, d. i. der ganze Bogen ACE, ſich verhält zu der Sehne AE dieſes Bogens ACE, wie das auf eine dieſer kleinſten Sehnen gefällte Loth, d. i. wie der Halbmeſſer des Kreiſes, zu der Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt.

b) Daher verhält ſich auch der halbe Umkreis zum Durchmeſſer, wie der Halbmeſſer zur Entfernung des Schwerpunkts des halben Umkreiſes vom Mittelpunkt.

§. 107.

Hat man den Schwerpunkt für den Bogen gefunden, ſo wird er auch leicht in jedem Kreisausſchnitt beſtimmt. (Taf. IV. Fig. 11.) Denn der ganze Ausſchnitt iſt aus unendlich vielen gleichen Dreyecken, wie fgE, ghE, hiE ꝛc. zuſammengeſezt anzuſehen. Man ſieht aber aus §. 105. daß der geometriſche Ort der Schwerpunkte aller dieſer Dreyecke fgE ꝛc. der mit dem Halbmeſſer $= \frac{2}{3}AE$ beſchriebene Kreisbogen CklD iſt. Iſt alſo der Schwerpunkt für dieſen Bogen beſtimmt, ſo verhält ſich (§. 106. *a*) CkD zur Sehne des Bogens CD, wie CE zur geſuchten Entfernung des Schwerpunkts vom Punkt E, oder, welches einerley, $\frac{2}{3}AgB$ verhält ſich

zu

zu $\frac{2}{3}$ AB, wie $\frac{2}{3}$ AE zur Entfernung des Schwerpunkts von E, d. i. AgB verhält ſich zur Sehne AB, wie $\frac{2}{3}$ AE zur geſuchten Entfernung. Hieraus ſieht man

1.) daß die Entfernung des Schwerpunkts des Ausſchnittsbogens zur Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Ausſchnitts, beyde vom Mittelpunkt an gerechnet, ſich verhält wie 3 zu 2.

2.) Iſt die Entfernung des Schwerpunkts des Halbkreiſes vom Mittelpunkt = $\frac{2}{3}$ aus dem Quadrat des Durchmeſſers durch den Umkreis dividirt.

§. 108.

Mehreres iſt noch hier beyzufügen übrig. Wir haben noch nicht erklärt, was beym Gleichgewicht der Kräfte auf den Schwerpunkt ankommt. Dieſes verſpaten wir aber in die folgende Vorleſung; hier wollen wir nur etwas vom Unterſchied zwiſchen dem Schwerpunkt und dem Mittelpunkt der Größe hinzuſetzen. Durch den Mittelpunkt der Größe verſtehen wir den Punkt im Körper, wodurch ſein geometriſcher Raum überall in zwey gleiche Theile getheilt wird; er mag mit einer Ebene durchſchnitten werden, welches bey Körpern geſchieht, oder nur mit einer Linie, welches bey Flächen ſtatt findet. Im Schwerpunkt aber werden, wie wir oben geſagt haben, die Maſſen der Körper in zwey gleichwichtige Theile getheilt, welches bey Körpern von Ebenen, bey Flächen aber von Linien durch den Schwerpunkt geſchieht. §. 99.

Es

Es erhellt ſogleich, daß die Mittelpunkte der Größe und Schwere in einen Punkt zuſammen fallen, wenn die Körper regulär oder Parallelepipeda, oder mit einem Mittelpunkt im ſtrengern Verſtande, wie Kreiſe, verſehen ſind, und zugleich aus Theilen beſtehen, die überall gleich dicht und ſchwer ſind.

Bey dieſer Gelegenheit wird es nicht unnütz ſeyn, hier beyzufügen, in welcher Stelle der Schwerpunkt bey einigen Körpern angetroffen wird; und zwar

1.) liegt der Schwerpunkt bey geraden Parallelepipeden im Mittel der Linie, die vom Mittelpunkt der obern Grundfläche zum Mittelpunkt der untern gezogen wird, und als die Axe dieſer Körper anzuſehen iſt. Denn die auf dieſe Linie ſenkrechte Ebene ſchneidet den prismatiſchen Körper in zwey gleiche Theile, und wird ſelbſt wieder von der Linie durch die Mittelpunkte der Grundflächen in zwey gleiche Theile geſchnitten. Daher muß der Mittelpunkt ſowohl der Schwere, als der Größe, in die Mitte dieſer Linie fallen.

Es ſey z. B. abhkd (Taf. VI. Fig. 10.) ein gerades Parallelepipedum; man ziehe nach den Regeln der Geometrie in der obern Grundfläche die Diagonalen ac und bd, ſo findet man den Schwerpunkt e dieſer Grundfläche; eben ſo wird der Schwerpunkt g in der untern Grundfläche durch die Diagonalen hk, or beſtimmt. Demnach wird der, entweder in e oder in g, oder auch in den, eben ſo durch Diagonalen gefundenen, Mittelpunkten der Seitenflächen, unterſtützte Körper ruhen.

2.) Bey

2.) **Bey dreyeckigten Priſmen** iſt der Schwerpunkt der Grundfläche vom Mittelpunkt der Größe verſchieden. Dieſe beyden Punkte fallen in Dreyecken nicht zuſammen. Man ſuche die Schwerpunkte der beyden Grundflächen abc und dor (Taf. VI. Fig. 12.); ſo iſt der Mittelpunkt der Linie eg durch beyde Schwerpunkte, der Schwerpunkt des Priſma.

Der Schwerpunkt der Grundfläche iſt nach §. 105. zu beſtimmen. Hat man aber die Schwerpunkte der Grundflächen priſmatiſcher Körper, oder auch die Schwerpunkte zweyer Seitenflächen, die, wie aus der Geometrie bekannt iſt, Parallelogrammen ſind, gefunden, ſo laſſen ſich die Durchmeſſer der Schwere ziehen. §. 99.

3.) **Bey geraden Cylindern** liegt der Mittelpunkt der Größe und Schwere in der Mitte der Axe.

4.) Eben dieſes hat auch bey **ſchiefen priſmatiſchen Körpern** ſtatt, wie leicht einzuſehen, und im folgenden Zuſatz erwieſen wird; denn der Schwerpunkt liegt im Mittel der Linie durch die Schwerpunkte der beyden Grundflächen.

5.) **Bey geraden Pyramiden und Kegeln** iſt der Schwerpunkt um $\frac{3}{4}$ der Axe von der Spitze entfernt.

Anmerkung. **Wallis** hat zuerſt die Lehre vom Schwerpunkt in ſeinem Calculo centri gravitatis ausführlich und deutlich abgehandelt. Hierzu bediente er ſich unendlicher Reihen, die ſchon vor Erfindung der **Integralrechnung** bey den Meßkünſtlern im Gebrauch waren. Zuweilen iſt aber die ſynthetiſche Beweisart ſehr ſchwer und ver-

wickelt,

wickelt, jedoch für **Wallis** Zeiten vortreflich. Weit allgemeiner und leichter iſt die Integralrechnnng, ſo wie auch die Methode, vermittelſt derſelben den Schwerpunkt durch analytiſche Rechnung zu beſtimmen, die wir auch im folgenden Zuſatz anwenden werden.

Verlangen wir aber die **ſynthetiſche** Methode, den Schwerpunkt zu finden, ſo iſt gewiß **Ozanams** ſeine im Curſu mathematico, Tab. IV. Lib. 2. vor andern die vorzüglichſte. Doch iſt ſie auch nicht leicht auf andere, als im ſtrengern Sinn ſogenannte **geometriſche** Körper, von deren Schwerpunkten wir bereits geſagt haben, anwendbar. Mehrers werden wir im Zuſatz denen zu Gefallen ſynthetiſch erweiſen, denen der Gebrauch der Integralrechnung entweder nicht verſtattet, oder nicht gelegen iſt.

Bey den **Pyramiden** hat zwar **Ozanam** den Ort des Schwerpunkts angezeigt, aber den Beweis nicht beygefügt. Dieſer läßt ſich folgendergeſtalt anſtellen:

Es ſey ABCD (Taf. VII. Fig. 4.) eine **Pyramide**, BDC ihre Grundfläche, worinn CF die Seite BD in F halbirt; ſo iſt der Schwerpunkt der Grundfläche in der Linie CF, und zwar im Punkt E, wenn FE $= \frac{1}{3}$FC genommen wird. §. 105. Man ziehe ferner die Linie AE von der Spitze der Pyramide A, ſo geht dieſe Linie durch die Schwerpunkte aller Dreyecke, die mit der Grundfläche gleichlaufende Schnitte ſind, wie btc; folglich liegt der Schwerpunkt der Pyramide in der Linie AE.

Man denke ſich nun die Seitenfläche der Pyramide ABD als ihre Grundfläche, ſo iſt C die dieſer Grundfläche entgegengeſezte Spitze; man ziehe AF, die die Seite BD der Grundfläche in zwey gleiche Theile ſchneidet, ſo liegt der Schwerpunkt der Grundfläche in der Linie AF, und zwar im Punkt derſelben G, wenn FG $= \frac{1}{3}$ AF. §. 105. Zieht man alſo die Linie CG, ſo wird dieſe aus eben dem Grund wie AE, ein Durchmeſſer der Schwere ſeyn. Demnach muß der Schwerpunkt der Pyramide in o ſeyn, in dem Punkte nämlich, worinn dieſe Durchmeſſer GC und AE einander ſchneiden.

Nun ziehe man Gp parallel mit FC, ſo ſind Gpo, oEC, ingleichen AGp, AFE ähnliche Dreyecke; daher AG : Gp = AF : FE; da aber AG $= \frac{2}{3}$ AF, ſo iſt auch Gp $= \frac{2}{3}$ FE $= \frac{1}{3}$ EC, denn FE : EC = 2 : 1. Weil aber Gp : EC = po : oE, ſo wird auch po $= \frac{1}{3}$ oE, daher auch AG : AF = Ap : AE, und Ap $= \frac{2}{3}$ AE.

Alſo po $= \frac{1}{12}$ AE, und Ao $= (\frac{8}{12} + \frac{1}{12})$AE $= \frac{3}{4}$ AE. Daraus erhellt, daß **der Schwerpunkt in der Pyramide von der Spitze um $\frac{3}{4}$AE, und um $\frac{1}{4}$AE von der untern Grundfläche entfernt iſt.** AE iſt aber die Linie, die von der Spitze der Pyramide zum Schwerpunkt der gegenüberſtehenden Grundfläche gezogen wird.

Der Kegel iſt nichts anders, als eine Pyramide; daher muß auch ſein Schwerpunkt in der Axe liegen, und zwar um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von der Spitze entfernt. (V.)

§. 109.

§. 109.

Was wir vom Unterſchied zwiſchen Schwerpunkt und Mittelpunkt der Größe geſagt haben, dient zum Verſtand des folgenden. Denn da die Körper fallen müſſen, wofern nicht der Schwerpunkt unterſtüzt iſt; und dieſer Punkt in geneigten Ebenen oder Linien nur zum Theil erhalten wird, zum Theil aber der niederwärts drückenden Wirkung der Schwere ausgeſezt iſt. §. 71. 72. ſo iſt auch nichts gewiſſer, als daß alle Körper auf geneigten Ebenen und Linien herunter fallen müſſen.

Dieſes hindert aber nicht, daß zuweilen der Erfolg anders zu ſeyn ſcheint. Wir wollen den hier statthabenden Fall erklären: Es ſey BC (Taf. III. Fig. 3.) ein gegen den Horizont geneigtes Bret, ſo wird der darauf gelegte Cylinder A, ſtatt herab zu rollen, ſich vielmehr hinauf bewegen, und eher ſteigen als fallen.

Um dieſe ungewöhnliche Wirkung der Schwere einzuſehen, laſſet uns betrachten, wie dieſer Cylinder verfertigt iſt. Er beſteht zwar aus Holz, hat aber in F nahe am Umfang eine Hölung, worinn ein kleinerer Cylinder von Bley befindlich. Der Mittelpunkt der Größe des Cylinders A liegt in ſeiner Axe, z. B. in E (Fig. 4.) und der Schwerpunkt des bleyernen Cylinders fällt mit ſeinem Mittelpunkt der Größe zuſammen. Daher muß der gemeinſchaftliche Schwerpunkt des hölzernen und kleinern Cylinders, d. i. der Schwerpunkt des ganzen Körpers, viel näher beym Umfang, z. B. in D liegen, als der Mittelpunkt der Größe. §. 108. 3. Da aber die Körper gegen die Seite zu fallen, nach welcher ſich der

Schwerpunkt bewegen kann, §. 103. ſo laſſet uns den Cylinder A als einen Kreis vorſtellen (Fig. 4.) der den Cylinder durch den Schwerpunkt ſchneidet. Dieſer Kreis ruhe auf der geneigten Ebene NBC, ſein Mittelpunkt der Größe ſey in E, der Schwerpunkt in D. Fielen dieſe Punkte E und D zuſammen, ſo würde das aus dem Schwerpunkt D gefällte Loth durch Ef fallen, und der Körper entweder herunter ſtürzen, oder auf andere Art durch die Ebene herunter fallen. Denn unter dieſer Vorausſetzung würde das Loth niemals mit Eh zuſammenfallen, d. i. es würde niemals in dem Punkte ruhen, worinn die Ebene den Kreis berührt, wofern nicht BN wagerecht, und mit BC einerley iſt. Liegt aber der Schwerpunkt D höher, und näher beym Umfang, ſo kann allerdings der Cylinder auf der Ebene ruhen, wenn nur die Vertikallinie durch den Schwerpunkt genau in EH *) fällt; denn alsdenn wirkt die ganze Kraft der Schwere auf

*) Das aus dem Schwerpunkt gefällte Loth, oder die Vertikallinie durch den Schwerpunkt, kann mit der auf die Ebene ſenkrechten Linie EH ſchlechterdings nicht zuſammenfallen, wo nicht die Ebene ſelbſt wagerecht iſt. Fällt aber dieſe Vertikallinie genau in den Punkt h, worinn der Körper auf der Ebene ruht, und iſt keine Friction da, ſo wird ſich der Körper nach der Ebene herunter bewegen, doch ſo, daß er zum Theil rollt, weil der Schwerpunkt zu unterſt zu fallen ſtrebt: iſt aber Friction vorhanden (vergl. §. 110.) ſo haben wir den Fall, wo der Körper, was nämlich den Berührungspunkt betrifft, in der Ebene weder ſteigt, noch fällt, doch wird er wegen dem Sinken des Schwerpunkts zum Theil umgeworfen. Dieſe Bewegung ändert ſich aber mit dem Orte des Schwerpunkts bald ins Fallen oder Steigen, nachdem die Friction und der Ort des Schwerpunkts iſt. (T.)

auf die Ebene ſenkrecht, und der Körper wird von keinem Theile derſelben in gleichlaufender Richtung mit der Ebene niederwärts getrieben. Liegt hingegen dieſes Loth wie die Linie Dg, ſo muß der Körper herunter rollen, oder nach der Seite fallen, worinn der Schwerpunkt fällt, und ſolchergeſtalt muß der Körper durch die Ebene ſteigen.

Anmerkung. Mehr merkwürdiges von dieſem Cylinder und ſeiner Bewegung iſt beym **Desaguliers** in ſeiner **Naturlehre, und zwar im Zuſatz zur zweyten Vorleſung** nachzuleſen. Wir wollen nur folgende Stücke anmerken:

1.) Der Cylinder, wovon hier die Rede iſt, kann nicht nur in geneigten, ſondern auch in wagerechten Ebenen ſich ſelbſt in Bewegung ſetzen. Ja in dieſen muß ſeine Bewegung am geſchwindeſten ſeyn und deſto langſamer werden, je mehr die Ebene von der wagerechten abweicht, oder je mehr ſie erhöhet wird. Doch geht dieſe Bewegung nicht aufwärts nach einem höhern Ort, wo der Cylinder nicht auf einer geneigten Ebene liegt.

Nichts iſt leichter einzuſehen. Denn wir dürfen nur erwägen, daß der Grund des Steigens bey dieſem Cylinder in dem Unterſchiede zwiſchen dem Gewicht des bleyernen und hölzernen Cylinders zu ſuchen iſt. Daher geſchieht es, daß der Schwerpunkt im Punkt D (Taf. V. Fig. 10.) und vom Mittelpunkt der Größe verſchieden iſt; und dies iſt wieder Urſache, daß der Cylinder §. 109. erklärtermaßen ſteigt.

Was es aber auch für eine Urſache iſt, und auf welcher Seite des Loths ſie wirkt, ſo iſt gewiß kein

Zweifel, daß ihre Wirkung, nach welcher der Körper ſich aufwärts bewegt, deſto mehe geſchwächt wird, je mehr ſich die geneigte Ebene der vertikalen nähert; wofern nur die wirkende Kraft für ſich betrachtet unveränderlich und gleichförmig iſt: wie aus dem, was von geneigten Ebenen §. 71. geſagt worden, leicht abzunehmen iſt. Denn je größer die Erhöhung iſt, deſto größer iſt die Kraft, womit der ganze Cylinder ſich in der Ebene herunter bewegt, und dieſe kann ſo gros werden, daß ſie jene Kraft, womit der Cylinder ſteigt, gänzlich vernichtet. Je kleiner aber die Neigung der Ebene iſt, deſto geringer wird auch das Beſtreben zu fallen beym Cylinder ſeyn. Hieraus folgt, daß das Hindernis, ſo der Kraft **aufwärts** von dem Beſtreben **niederwärts** entgegengeſezt wird, in der wagerechten Ebene am kleinſten ſeyn muß; folglich iſt die Bewegung des Cylinders in dieſer Ebene am geſchwindeſten, deſto langſamer aber, je größer der Winkel, unter welchem die Ebene vom Horizont erhöht wird.

2.) Liegt der Cylinder in der wagerechten Ebene BF, (Taf. V. Fig. 10.) ſo, daß der Schwerpunkt D in die Linie ADB durch den Mittelpunkt C und den Berührungspunkt B fällt, ſo muß er ruhen. Fällt aber der Schwerpunkt auſerhalb der Linie CB, ſo muß der Cylinder ſich durch BF herumwälzen, und zwar nach F, bis der Punkt A die halbe Radlinie AF beſchrieben hat. Hier aber in F fällt der Schwerpnnkt über den Punkt A, und iſt in ſeiner niedrigſten Stelle. Weil aber der von A nach F fallende Cylinder eine gewiſſe Geſchwindigkeit erlangt, ſo kann er in F nicht ruhen, ſondern muß ſich durch FG

aus

aus eben dem Grund und auf eben die Art, wie Pendeln §. 93. fortbewegen. Dieſe Bewegung aber durch FG wird ſo lange dauern, bis der Schwerpunkt wieder zur höchſten Stelle gelangt, ſo daß er wieder über D fällt; und in dieſer vor- und rückwärts ſchwingenden Bewegung wird der Körper ſo lange beharren, bis endlich der Schwerpunkt, wie in den Pendeln, in ſeiner unterſten Stelle F zur Ruhe gelangt.

3.) Hieraus ſieht man, daß ſich der Schwerpunkt D des, in der wagerechten Ebene liegenden Cylinders dergeſtalt bewegen muß, daß er von der Vertikallinie, oder von der Linie, nahe an der vertikalen, nach einer andern Vertikallinie fortrückt, worinn er ſeine unterſte Stelle einnimmt. Sein Fall wird alſo, nach dem Bogen AnB gerechnet, 180° ſeyn, welcher Bogen in der geneigten Ebene allemal kleiner iſt. Hieraus läßt ſich der Neigungswinkel der Ebene beſtimmen, unter welchem der ſteigende Cylinder ſtill ſtehen muß, wenn der Schwerpunkt aus der Vertikallinie in die wagerechte Lage gekommen, oder wenn die Linie CD (Taf. V. Fig. 13.) durch die Mittelpunkte der Größe und Schwere, die im Anfang der Bewegung vertikal war, wagerecht wird. Denn es ſey BF (Taf. V. Fig. 10.) eine wagerechte Ebene, und die Linie CD durch die Mittelpunkte der Größe und Schwere gleichfalls wagerecht; ſo iſt Dd die Richtungslinie des Schwerpunkts D, mit der andern Linie gleichlaufend, die vom Mittelpunkt der Größe C zum Berührungspunkt B gezogen wird. Nun bleibe die Linie CD in dieſer wagerechten Lage, und die Ebene werde ge-

 neigt:

Zweifel, daß ihre Wirkung, nach welcher der Körper ſich aufwärts bewegt, deſto mehe geſchwächt wird, je mehr ſich die geneigte Ebene der vertikalen nähert; wofern nur die wirkende Kraft für ſich betrachtet unveränderlich und gleichförmig iſt: wie aus dem, was von geneigten Ebenen §. 71. geſagt werden, leicht abzunehmen iſt. Denn je größer die Erhöhung iſt, deſto größer iſt die Kraft, womit der ganze Cylinder ſich in der Ebene herunter bewegt, und dieſe kann ſo gros werden, daß ſie jene Kraft, womit der Cylinder ſteigt, gänzlich vernichtet. Je kleiner aber die Neigung der Ebene iſt, deſto geringer wird auch das Beſtreben zu fallen beym Cylinder ſeyn. Hieraus folgt, daß das Hindernis, ſo der Kraft **aufwärts** von dem Beſtreben **niederwärts** entgegengeſezt wird, in der wagerechten Ebene am kleinſten ſeyn muß; folglich iſt die Bewegung des Cylinders in dieſer Ebene am geſchwindeſten, deſto langſamer aber, je größer der Winkel, unter welchem die Ebene vom Horizont erhöht wird.

2.) Liegt der Cylinder in der wagerechten Ebene BF, (Taf. V. Fig. 10.) ſo, daß der Schwerpunkt D in die Linie ADB durch den Mittelpunkt C und den Berührungspunkt B fällt, ſo muß er ruhen. Fällt aber der Schwerpunkt auſerhalb der Linie CB, ſo muß der Cylinder ſich durch BF herumwälzen, und zwar nach F, bis der Punkt A die halbe Radlinie AF beſchrieben hat. Hier aber in F fällt der Schwerpnnkt über den Punkt A, und iſt in ſeiner niedrigſten Stelle. Weil aber der von A nach F fallende Cylinder eine gewiſſe Geſchwindigkeit erlangt, ſo kann er in F nicht ruhen, ſondern muß ſich durch FG

aus

aus eben dem Grund und auf eben die Art, wie Pendeln §. 93. fortbewegen. Dieſe Bewegung aber durch FG wird ſo lange dauern, bis der Schwerpunkt wieder zur höchſten Stelle gelangt, ſo daß er wieder über D fällt; und in dieſer vor- und rückwärts ſchwingenden Bewegung wird der Körper ſo lange beharren, bis endlich der Schwerpunkt, wie in den Pendeln, in ſeiner unterſten Stelle F zur Ruhe gelangt.

3.) Hieraus ſieht man, daß ſich der Schwerpunkt D des, in der wagerechten Ebene liegenden Cylinders dergeſtalt bewegen muß, daß er von der Vertikallinie, oder von der Linie, nahe an der vertikalen, nach einer andern Vertikallinie fortrückt, worinn er ſeine unterſte Stelle einnimmt. Sein Fall wird alſo, nach dem Bogen AnB gerechnet, 180° ſeyn, welcher Bogen in der geneigten Ebene allemal kleiner iſt. Hieraus läßt ſich der Neigungswinkel der Ebene beſtimmen, unter welchem der ſteigende Cylinder ſtill ſtehen muß, wenn der Schwerpunkt aus der Vertikallinie in die wagerechte Lage gekommen, oder wenn die Linie CD (Taf. V. Fig. 13.) durch die Mittelpunkte der Größe und Schwere, die im Anfang der Bewegung vertikal war, wagerecht wird. Denn es ſey BF (Taf. V. Fig. 10.) eine wagerechte Ebene, und die Linie CD durch die Mittelpunkte der Größe und Schwere gleichfalls wagerecht; ſo iſt Dd die Richtungslinie des Schwerpunkts D, mit der andern Linie gleichlaufend, die vom Mittelpunkt der Größe C zum Berührungspunkt B gezogen wird. Nun bleibe die Linie CD in dieſer wagerechten Lage, und die Ebene werde ge-

neigt: ſo wird CB immer näher nach Dd rücken, und endlich Cd und Dd im Punkt d, worinn der Körper die Ebene berührt, zuſammenſtoßen. S. Fig. 13. Es iſt aber GdF ein rechtwinklicht Dreyeck, daher dGF = EdF = CdD. Demnach wird der Cylinder in der geneigten Ebene ruhen, wenn der Schwerpunkt eine wagerechte Lage, und die Ebene GA den Neigungswinkel hat, deſſen Sinus DC, d. i. die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Größe. Denn DC iſt der Sinus des Winkels CdD, und daher auch der Sinus des Neigungswinkels dGE.

4.) Je kleiner alſo die Linie DC, d. i. je näher der Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Größe rückt, deſto kleiner wird auch die Schwingung ſeyn, womit der Cylinder in, unter einerley Winkel geneigten Ebenen aufwärts rollt; und deſto kleiner auch der größte Erhöhungswinkel, unter welchem ſich der Cylinder noch aufwärts bewegen kann. Je größer hingegen DC, deſto längere Schwingungen wird der Cylinder in Ebenen von einerley Erhöhung zurücklegen; und deſto mehr können ſich die Ebenen den vertikalen nähern, ehe die Erhöhung das Steigen des Cylinders hindert.

5.) Das leztere deſto beſſer zu verſtehen, wollen wir bemerken, daß der Cylinder nicht nur alsdenn ruht, wenn ſo was ſtatt hat, wie in der 13ten Figur ausgedrückt wird, d. i. wenn der Neigungswinkel AGC dem Winkel CdD gleich iſt, und zugleich die Linie CD wagerecht; ſondern auch in andern Ebenen, unter was für Winkeln ſie auch geneigt ſind, wenn nur das erſtere vorhanden iſt, daß nämlich

nämlich die Richtungslinie des Schwerpunkts mit Cd einen Winkel CdD macht, der der Ebene Neigung gleich iſt. Dieſes wird in jeder Ebene erfordert, wenn das weitere Steigen des Cylinders verhindert werden ſoll. Es kann aber da ſeyn, wenn auch gleich nicht, wie in den Fällen (4.) CD wagerecht iſt. Denn es giebt, wenn der Cylinder zur Ruhe gebracht worden, mehrere Linien CD, und verſchiedene Lagen derſelben, wie man in der 15ten Figur ſieht. Ja in einerley Ebene kann der Schwerpunkt in zwey Stellen, zu oberſt in D, und zu unterſt in d zu finden ſeyn. Aber auch darinn unterſcheiden ſich dieſe Fälle von jenen (4.), daß hier die Linien DB und dB nicht, wie dort, gleich gros ſind; denn dort kann der Schwerpunkt, wenn der Cylinder ruhen ſoll, nur eine einzige Lage haben, die zugleich die höchſte und tiefſte iſt.

Unterſuchen wir die Bewegung des Schwerpunkts in den beyden Lagen deſſelben, die auch in der wagerechten Ebene ſtatt finden, genauer, ſo erhellt ſogleich, daß der Schwerpunkt, wenn er am niedrigſten iſt, der Cylinder mag ſich nach G oder nach A bewegen, ſteigen, und hierauf wieder nach ſeiner unterſten Stelle d fallen muß. Weil aber der Schwerpunkt nicht ſteigen kann, ſo entſteht auch keine Bewegung in der Ebene, wenn der Schwerpunkt am niedrigſten iſt. Liegt er aber zu oberſt in D, ſo muß er, wenn der Cylinder gegen G geneigt wird, ſinken, ja auch, wenn der Cylinder gegen A gereizt wird: und allgemein, es mag dieſes oder jenes erfolgen, muß der Schwerpunkt, wenn die Bewegung ſonſt nicht gehindert wird, ſich niederwärts bewegen.

Demnach wird der in ſeiner Ruhe geſtörte Cylinder durch die Ebene ſteigen, bis er in die Lage CD kommt, worinn er, weil der Schwerpunkt am niedrigſten iſt, vermöge des geſagten, ruhen wird.

Eben daraus folgt aber, daß der Cylinder in den Fällen (4.) auf keine Weiſe durch die Ebene ſteigen wird. Denn da dort DB = dB, ſo kann der Schwerpunkt von keinem höhern Orte fallen, welches doch die einzige Urſache iſt, daß der Cylinder ſteigen kann. Hier giebt es alſo eine Gränze, oder eine gewiſſe Lage, worinn der Cylinder dergeſtalt in der Ebene ruhet, daß er ſchlechterdings nicht weiter ſteigen kann, und dieſes geſchieht, wenn CD, oder vielmehr $\frac{CD}{CB}$ der Sinus des Neigungswinkels der Ebene AGC iſt.

6.) Wir haben erwieſen, daß der in der wagerechten Ebene liegende Cylinder (Fig. 10.) ſich durch einen Bogen von 180° bewegen kann, ehe er zur Ruhe kommt. Der Schwerpunkt muß aber im Anfang der Bewegung ſeine höchſte Stelle eingenommen haben, und, wenn ſich der Cylinder durch die Linie BF bewegt hat, zur niedrigſten gefallen ſeyn. Eben ſo läßt ſich auch die Größe des Bogens in dem Fall, da die Bewegung in einer geneigten Ebene geſchieht, beſtimmen; d. i. finden, wie viel Grade des Halbkreiſes der Cylinder beſchreibt, indem der Schwerpunkt von der höchſten bis zur niedrigſten Stelle fortrückt. Denn da bey der Umdrehung des Cylinders die Linie Dc beſtändig einerley bleibt; ſo iſt auch dB = eD (Fig. 15.). Man verlängere die

Linie

Linie cb in x, ſo ſind die Dreyecke bxG, AGC, und cbB ähnlich, folglich der Winkel bcB = AGC = Aca = ace.

Laſſet uns annehmen, indem D nach d fällt, bewege ſich der Cylinder durch die Ebene bis in l, ſo iſt Bl = Bg, und g fällt mit l zuſammen, wenn l der Punkt iſt, worinn der Cylinder ruht. Um dieſen Punkt zu finden, wollen wir bemerken, daß, die Sehne gDm durch D gezogen, gD = De = dB. Denn iſt der in l liegende Punkt g ſo beſchaffen, ſo iſt offenbar der Schwerpunkt in dieſem Punkte l in ſeiner niedrigſten Stelle. Denn wenn gD = eD, ſo iſt auch Dm = DB, weil im Kreiſe überall eD. DB = gD. Dm. Daher auch gDm = eDB, wenn die Lage in l ſo iſt, wie ſie ſeyn muß.

Hieraus findet man den Bogen Bg = 180° — Ag = 180° — Ace (= 2 AGC) — eg. Die Sache kömmt alſo auf die Beſtimmung des Bogens eg an. Es ſind aber alle Seiten in den Dreyecken eDc und gDc gleichgros; daher der Winkel ecf = gcf und ge = 2fg. Demnach iſt der Bogen fg, oder der Winkel Dcg zu beſtimmen; welcher Winkel gefunden wird, wenn im Dreyeck Dcg auſer den gegebenen Seiten Dc und cg auch die dritte Seite Dg gegeben iſt.

Um aber dieſe Seite zu finden, iſt zu merken, daß Dg = dB. Nun ergiebt ſich ck im Dreyeck ckB aus dem gegebenen CB, dem rechten Winkel bey k, und dem Winkel cBk = AGC. Ueberdies erhält man auch kd aus den gegebenen cd und ck im rechtwinklichten Dreyeck cdk. Es iſt nämlich kB — kd

— kd = dB = Dg, daher iſt auch der Winkel fcg gegeben, der ſich alſo ſogleich ohne Rechnung beſtimmen läßt.

Man ziehe aus dem Berührungspunkt B den Durchmeſſer AcB, und die Vertikallinien ax, eB; und nehme ace = Aca. Man ziehe auch cf durch den Schwerpunkt D, oder durch den Punkt, worinn der mit dem Halbmeſſer cD beſchriebene Kreis von der Linie eB geſchnitten wird, und nehme ef = fg. Iſt dieſes geſchehen, ſo iſt der geſuchte Bogen gB, deſſen Länge Bl, oder die Linie, die der durch die Ebene ſteigende Cylinder zurück legen kann. (V.)

§. 110.

Hier iſt auch zu merken, daß die Körper in geneigten Ebenen auf eben die Art in der Richtung der Ebene herunter fallen müſſen, wie dieſes in der Vertikallinie geſchieht, obgleich nach §. 73. mit verſchiedener Kraft, wo die Ebene nicht ſelbſt der Bewegung auf irgend eine Art widerſteht. Denn der Fall der Körper muß dergeſtalt erfolgen, daß alle Theile des Körpers mit eben der gleichlaufenden und gleichförmigen Bewegung fortrücken, da nichts daran liegt, ob die Theile des Körpers einzeln in der Ebene fallen, oder ob ſie ſich alle zugleich mit der Geſchwindigkeit ihres Schwerpunkts bewegen. Der Körper muß alſo mit Beybehaltung der Lage der Theile durch die Ebene fallen, wo nicht in der Ebene ſelbſt ein anderes Hindernis auſer demjenigen vorhanden, das von der Neigung entſteht, und einen Theil der Schwere zu wirken hindert.

Und dieſes muß bey eckigten Körpern ſowohl, als bey runden erfolgen, die Vertikallinie durch den Schwer-

Schwerpunkt mag in ihre Grundfläche fallen, oder nicht. Doch lehren uns die Verſuche noch etwas anders. Denn wir bemerken, daß die Körper durch geneigte Ebenen bald auf die eine, bald auf die andere Art ſich bewegen und fallen. Entweder rücken ſie dergeſtalt in der Ebene herunter, daß dieſe beſtändig von eben den Theilen des Körpers berührt wird; oder ſo, wie beym Rollen der Kugeln, daß immer andere Theile zur Berührung mit der Ebene gelangen: welche Bewegung auch daher das Rollen durch die Ebene heißt. Aus der Vereinigung dieſer beyden Bewegungen in einem und demſelben Körper kann eine dritte, von jenen verſchiedene, entſtehen. Dieſe Bewegung von der dritten Gattung, ſo wie auch die von der zweyten, nämlich das Rollen, entſteht wenigſtens zum Theil von dem Hinderniſſe ſo die Rauhigkeit der Ebene dem bewegenden Körper entgegenſezt, und die Friction oder das Reiben heißt. Denn ſtellen wir uns die Rauhigkeit der Ebene als eine Kraft E vor, (Taf. V. Fig. 3.) wodurch die Grundlinie ED des Parallelogramms HD gegen EA in eben der Zeit getrieben wird, worinn der Schwerpunkt von einem Theil der ganzen natürlichen Schwere in der mit der Ebene AC gleichlaufenden Richtung FG fortgeſtoßen wird; ſo ſieht man, daß dieſe beyden Kräfte, von welchen der Körper in entgegengeſezten Richtungen getrieben wird, ſich ſo unter einander verhalten können, daß, wenn die Vertikallinie durch den Schwerpunkt auſerhalb der Grundfläche fällt, der Körper von der gleichzeitigen Wirkung dieſer Kräfte herumgetrieben wird und herunter rollt. Hieraus fließt folgendes:

1.) Ku-

1.) **Kugelhafte und andere runde Körper rollen durch geneigte Ebenen herunter**, weil das Loth vom Schwerpunkt allemal auſerhalb der Grundfläche fällt; auch wird hier keine große Friction erfordert, wo nicht vielleicht die Vertikallinie durch den Schwerpunkt D (Taf. III. Fig. 4.) gegen die Seite A fällt, wodurch verurſacht würde, daß die Körper, wie §. 109. weitläuftig ausgeführt worden, vielmehr aufwärts rollen. Eben dieſe Rauhigkeit der Ebene mit der daher entſtehenden Friction iſt auch die Urſache, warum in wagerechten Ebenen geworfene runde Körper fortrollen, da doch ihre Bewegung und Geſchwindigkeit nach einer einzigen geraden Linie gerichtet iſt.

2.) **Je breiter die Grundfläche der Körper iſt**, wenn ſie nämlich ebene Grunflächen haben, eine **deſto größere Reibungskraft** wird, wenn das übrige einerley iſt, zu **ihrer Herumtreibung** und Herunterwälzung erfordert.

Es erhellt alſo, daß der Körper nicht allein deswegen in der geneigten Ebene herunter rollet, weil die Vertikallinie durch den Schwerpunkt nicht in die Grundfläche fällt; ſondern es muß zugleich eine Friction von beſtimmter Größe hinzukommen, und eine Bewegung durch ED (Taf. V. Fig. 3.) hervorzubringen ſtreben, die der, von der Schwere herrührenden Bewegung des Körpers durch FG entgegengeſezt iſt. In Ermangelung dieſer Kraft kann der Körper nicht herunter rollen. In der Folge werden wir mit mehrern von dieſer Friction reden.

§. 111.

§. III.

Laſſet uns zu einer andern Art Bewegung kommen, worinn der Körper durch die geneigte Ebene aufwärts ſteigt, doch ſo, daß der Schwerpunkt ſeine gewöhnliche und natürliche Stelle in dem Körper ſelbſt behält, und nicht, wie im vorigen Fall, wegen dem damit verbundenen ungleichartigen ſchweren Körper in eine andere Stelle gerückt iſt. Um dieſe dem Anſehen nach widerſinnige Erſcheinung zu begreifen, laſſet uns das Werkzeug (Taf. III. Fig. 5.) betrachten: I iſt ein hölzerner Kreis, woran in der Mitte ein doppelter Kegel, oder ein Kegel auf beyden Seiten, gleichfalls von Holz, befeſtigt iſt. Dieſer Kegel liegt auf zwey vertikal geſtellten Bretern CE und BD, deren obere Flächen gegen den Horizont etwas geneigt ſind. Die Breter ſelbſt ſind ſo geſtellt, daß ſie in einen Winkel DKE zuſammenſtoßen. Zugleich iſt das Werkzeug mit zwey Füßen F und G verſehen, die entweder in einer genau wagerechten, oder wenigſtens ihr ſehr nahe kommenden Ebene liegen müſſen. Die Oberfläche des doppelten Kegels nimmt von L nach H zu, welches im Durchſchnitt in der kleinen Figur (Taf. III. Fig. 6.) deutlicher zu ſehen, wo HL und Hl zwey Schnitte durch die Mitte des doppelten Kegels ſind. HM iſt der Halbmeſſer der Kreisfläche I. Dieſes aufmerkſam betrachtet, erhellt, daß der Körper in A wirklich einen höhern Ort einnimmt, als wenn er in einem höher liegenden Ort der Ebene, z. B. in CB läge. Denn in A liegt der Kegel mit ſeinem dickern Theile auf der Ebene; in CB ruhen aber auf der Ebene die der Spitze des Kegels nähern Theile, wo der Kegel dünner, folglich ſeine Axe von der wagerechten

gerechten Ebene weniger entfernt iſt. Da aber ſchwere Körper ſich beſtändig niederwärts, d. i. von höhern Orten nach niedrigern bewegen, bis ſie in den niedrigſten Ort gelangen; ſo iſt kein Wunder, daß der Kegel in der geneigten Ebene ſteigt, indem der Schwerpunkt, und daher auch der Körper ſelbſt, nach dem niedrigern Ort fällt.

Zu mehrerer Erläuterung deſſen, ſey FAE (Taf. V. Fig. 12.) der mittlere Kreis des doppelten Kegels, BD die Höhe der Ebene EABD; CE der Halbmeſſer des Kreiſes, und BD = EA; ſoll ſich der Schwerpunkt durch die Linie CB bewegen; ſo muß AE etwas kleiner ſeyn, als CE. Weil aber, wenn die Spitze des Kegels in E auf der Fläche ruht, der Schwerpunkt ſich in C befindet; beym Umlauf des Kegels aber, durch die Linie CB fortrückt; ſo muß offenbar CE größer ſeyn, als AE, wenn die Bewegung des Schwerpunkts auf der Ebene ABDE erfolgen ſoll.

Sechſte

Sechſte Vorleſung.

Vom Gleichgewicht ſchwerer Körper.

Inhalt.

§. 112. — 118. Hebel; Grundregel des Gleichgewichts. Dieſes iſt vorhanden, wenn die Gewichte der Maſſen ſich verkehrt verhalten, wie die Geſchwindigkeiten, womit ſie ſich gleichförmig bewegen können. §. 119. — 121. Wie mehrere Körper ruhen können, deren Schwerpunkt auſerhalb ihrer Oberfläche fällt. §. 122. — 124. Den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt mehrerer Körper zu finden. §. 125. — 131. Gleiche Momente der Preſſungen auf beyden entgegengeſetzten Seiten im Zuſtand der Ruhe. Beſtimmung des Uebergewichts beym Mangel des Gleichgewichts.

§. 112.

In der vorhergehenden Vorleſung verſprachen wir, vom Gleichgewicht ſchwerer Körper ausführlicher zu handeln. In der That iſt dieſes der nützlichſte Theil der Mechanik. Die hieher gehörigen Lehren kommen beynahe überall in der Ausübung, beſonders bey Maſchinen, vor; daher müſſen wir auf die Unterſuchung und Erklärung derſelben vorzüglichen Fleis verwenden. Allgemein ſagt man, zwo Kräfte **ſind im Gleichgewicht**, wenn keine die andere überwinden und bewegen kann. Damit aber erhellt, was zum Gleichgewicht erfordert wird, beſonders wo ſchwere Körper ſtatt der Kräfte gebraucht werden, ſo ſey AB (Taf. IV. Fig. 12.) eine

Stange, die im Punkt C der Stütze CG, die die Unterlage heißt, aufliegt; überdies ſeyn A und B zwey ſchwere Körper, an der Stange AB dergeſtalt angebracht, daß weder A den Körper B, noch B hinwiederum A bewegen kann; dies vorausgeſezt, werden die Körper A und B im Gleichgewicht ſeyn. Den Punkt C nennen einige den Ruhepunkt; andere den Bewegungspunkt.

§. 113.

Daß aber dieſe beyden Maſſen A und B im Gleichgewicht ſind, wenn ſie ſelbſt gleichgros, und auch in gleichgroßen Entfernungen AC und CB vom Punkt C auf der Stange liegen, iſt für ſich klar. Die Kraft in A mag beſchaffen ſeyn, wie ſie will, ſo wirkt ſie daſelbſt auf eben die Art, mit eben der Größe und Gewalt, als in B. Da aber auch ihre Wirkungen einander entgegengeſezt ſind, ſo muß nothwendig Gleichgewicht da ſeyn.

§. 114.

Was aber zu Hervorbringung des Gleichgewichts erfordert wird, wenn die Maſſen a und D ungleich, und auch ihre Entfernungen CD und aC vom Ruhepunkt C ungleich ſind, iſt verwickelter; aber aus dem, was wir oben §. 25. von der Gleichheit der Kräfte geſagt haben, einzuſehen. Wir haben geſagt, daß die Effekte der Preſſungen an ſich betrachtet, gleich ſind; daher werden die Kräfte im Gleichgewicht ſeyn, wenn die bewegten Maſſen ſich umgekehrt verhalten, wie die Räume, wodurch ſie, wenn eine Bewegung erfolgte, zu gleicher Zeit fortrücken würden.

Laßt

Laßt uns alſo dieſe Regel anwenden, und ſehen, was ſich daraus ſchlieſen läßt. Die Maſſen verhalten ſich aber wie die Gewichte der Körper a und D, §. 35. und die Räume, wodurch ſie ſich zu gleicher Zeit bewegen müſſen, wie Aa und DE, oder da Aa und DE ähnliche Bogen, wie die Halbmeſſer aC und DC. Wenn alſo Gleichgewicht vorhanden, ſo muß auch ſeyn a.aC = D.DC, oder a : D = DC : aC, d. i. die Maſſen, oder welches hier einerley, die Gewichte der Körper a und D müſſen ſich umgekehrt verhalten, wie die Entfernungen vom Ruhepunkt, wenn Gleichgewicht ſtatt habenſoll.

§. 115.

Iſt alſo AC = BC, wie wir §. 113. angenommen haben, und A = B, ſo iſt auch Aa = Bb, und auch in dieſem Fall werden die Maſſen im Gleichgewicht ſeyn, wenn ſie ſich unter einander umgekehrt verhalten, wie ihre Entfernungen.

§. 116.

Wir haben §. 23. geſagt, daß es bey Meſſung der Elementarpreſſungen, dergleichen die Kräfte ſind, die ein Gleichgewicht auf einer Linie liegender ſchwerer Körper hervorbringen, einerley ſey, ob man ihre Kräfte aus den Räumen, oder aus den Geſchwindigkeiten, in die Trägheiten multiplicirt, beurtheilt, weil dieſe jenen proportional ſind.

Daher läßt ſich die §. 114. vorgetragene Regel auch ſo ausdrücken: zwey Körper in ungleichen Entfernungen vom Ruhepunkt, ſind im Gleichgewicht, wenn ihre Gewichte ſich verkehrt verhalten, wie die anfänglichen Geſchwindigkeiten.

Denn ſo viel eine Maſſe kleiner iſt, ſo viel iſt ſie geſchwinder; und was einem Körper an Geſchwindigkeit abgeht, geht ihm an der Maſſe zu.

§. 117.

Vielleicht kann daher ein Zweifel entſtehen, daß wir ſagen, die Gewichte verhalten ſich verkehrt wie die Geſchwindigkeiten, wenn Gleichgewicht vorhanden, da doch ſchlechterdings keine wirkliche Geſchwindigkeit hier vorkommt, die doch, da ſie zu Vergleichung der Kräfte gebraucht wird, nothwendig da zu ſeyn ſcheint. Allein ob es gleich ungereimt ſeyn würde, zu behaupten, die Körper im Gleichgewicht bewegten ſich mit einer wirklichen Geſchwindigkeit, und dieſe bewirke ihr Gleichgewicht; ſo folgt doch daraus nicht, daß die **anfängliche Geſchwindigkeit**, oder vielmehr das **Beſtreben zur Bewegung**, und ſeine Größe hier nicht in Betracht gezogen werden könne oder müſſe. Die Körper, ob ſie gleich im Gleichgewicht ruhen, werden doch von der Schwere zur Bewegung gereizt, und äuſern ein beſtändiges Beſtreben, ſich und andere zu bewegen. **Dieſe Beſtreben aber ſind mit den Elementargeſchwindigkeiten einerley**, und verhalten ſich wie die Räume aA, DE, (Taf. IV. Fig. 12.) oder wie die endlichen Geſchwindigkeiten, womit ſie ſich bewegen würden, wenn wirkliche Bewegung erfolgte. Da alſo die Größe der Preſſungen aus der Größe dieſer Beſtreben zu beſtimmen iſt, ſo ſind ohne Zweifel auch dieſe bey Meſſung jener zu gebrauchen. Daher laſſen ſich zu dieſer Abſicht auch die **Elementargeſchwindigkeiten**, oder die ihnen verhältnismäſigen endlichen Geſchwindigkeiten und Räume anwenden. Und nun

ſieht

ſieht man, in welchem Sinn und Maaße ſich den Körpern im Gleichgewicht Bewegung und Geſchwindigkeit beylegen läßt.

§. 118.

Eine Stange, wie ACB, heißt ein Hebel, und die Entfernungen vom Ruhepunkt, die Hebelarme. Bedienen wir uns dieſer Benennungen, ſo können wir das §. 114. abgehandelte Geſetz mit dieſen Worten ausdrücken: **Körper am Hebel ſind im Gleichgewicht, wenn ihre Gewichte ſich umgekehrt verhalten wie die Längen der Hebelarme.**

§. 119.

Hier haben wir vom Hebel nur, was in der Mechanik unentbehrlich iſt, beygebracht. Da die Lehre vom Gleichgewicht eigentlich in die Statik gehört, ſo wollen wir ſie gegenwärtig weiter nicht verfolgen. Wir können aber nicht mit Stillſchweigen übergehen, daß wir in dem, was wir bisher vom Schwerpunkt geſagt haben, allemal angenommen haben, dieſer Punkt falle in den Körper ſelbſt. Allein es kommen andere merkwürdige Fälle vor, wo er ſich nicht im Körper ſelbſt, ſondern auſerhalb ſeiner Oberfläche befindet. Dies findet ſtatt, wo mehrere unter ſich vereinigte Körper ein Körperſyſtem ausmachen. Denn iſt AD (Taf. V. Fig. 4.) ein Ring, deſſen Maſſe zwiſchen AD und BE enthalten, in BE aber hol iſt; ſo wird ſich der Schwerpunkt dieſes Ringes, wenn ſeine Materie überall gleich dicht iſt, in C, und daher in einem von Materie leeren Raume befinden.

§. 120.

Ein ſolcher Körper, deſſen Schwerpunkt in C iſt, kann demohngeachtet durch einen Körper FG unterſtützt werden, wofern nur die Vertikallinie durch den Schwerpunkt C auf den Körper FG ſenkrecht ſteht.

§. 121.

Laßt uns aber zu andern ähnlichen und nützlichern Fällen kommen, und daher die beyden Körper A und B (Taf. V. Fig. 5.) betrachten, deren Schwerpunkte auf den äuſerſten Theilen des Hebels AB ruhen, den wir unbiegſam und ohne alle Schwere annehmen. Der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Körper A und B kann weder in A noch in B ſeyn, er muß in einer Stelle C der Linie AB durch beyde Schwerpunkte ſeyn. Dieſer Punkt C läßt ſich nach §. 118. beſtimmen.

Ja noch mehr wird der gemeinſchaftliche Schwerpunkt auſerhalb der Oberfläche der Körper fallen, wenn wir uns ein Syſtem dreyer Körper gedenken; denn es ſeyn dieſe Körper A, B, C (Taf. V. Fig. 6.) und hängen an drey nicht ſchweren Hebeln AB, BC, AC, die man doch hier auch ſchwer annehmen kann. Sind nun die Punkte A, B, C die Schwerpunkte dieſer Körper, ſo haben A und B ihren gemeinſchaftlichen Schwerpunkt im Punkt D der Linie AB, §. 118. und der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Körper D und C iſt im Punkt E der Linie DE; folglich iſt der Punkt E der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der drey Körper, A, B, C, in dieſem Syſtem. Hieraus erhellt, daß der Schwerpunkt nicht in die Materie der Körper ſelbſt fällt, da die ganze Linie DE auſerhalb den Körpern liegt.

§. 122.

Wie aber der gemeinſchaftliche Schwerpunkt mehrerer Körper gefunden wird, wollen wir zeigen, vorher aber folgendes anmerken:

1.) Wird die Stange oder der Hebel AB (Taf. V. Fig. 5.) ohne alle Schwere angenommen, damit das Anfangs geſuchte Grundgeſetz nicht mit zu vielen Schwierigkeiten verwickelt wird; hier iſt es unnütz, den Hebel als ſchwer zu betrachten, da bey gegenwärtigem Geſchäft nichts an ſeinem Gewicht liegt. Bey Maſchinen aber iſt die Schwere des Hebels nicht auſer Acht zu laſſen. Nur dann kann man ſie bey Seite ſetzen, und den ſchweren Hebel als nicht ſchwer anſehen, wenn ſein Schwerpunkt D mit dem Ruhepunkt zuſammen fällt. Iſt dieſes, ſo tragen ſeine Arme im geringſten nichts zur Wirkung der Körper A und B (Taf. V. Fig. 5.) bey, fiele auch der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Körper C auſerhalb dem Schwerpunkt des Hebels D.

2.) Iſt es einerley, ob die Körper unmittelbar mit dem Hebel AB zuſammenhängen, und ihre Entfernungen vom Ruhepunkt mit den Entfernungen der Schwerpunkte vom Ruhepunkt einerley ſind, wozu erfordert wird, daß die Schwerpunkte der Körper mit dem Ruhepunkt in einer Linie liegen; oder ob A und B am Hebel, vermittelſt nicht ſchwerer Linien, durch die Schwerpunkte A und B hängen.

Im leztern Fall iſt es wieder gleichviel, ob dieſe Linien lang oder kurz ſind. Das Gewicht wird durch ihre Länge weder vermehrt, noch vermindert, und obgleich nach der ſchärfſten Theorie, die Schwere und das Gewicht deſto mehr zunimmt, je mehr ſich

die Körper dem Mittelpunkt der Erde nähern, ſo iſt doch bey den Hebeln, deren wir uns bedienen, der Unterſchied der Entfernungen der Körper vom Mittelpunkt der Erde ſo gering, daß der daher entſtehende Unterſchied im Gechwichte ſchlechterdings für nichts zu achten iſt. §. 43.

§. 123.

Oben ſagten wir, der Schwerpunkt ſey der Punkt, wo von einer zureichenden und der Schwere entgegengeſezten Kraft unterſtüzt, der Körper ruhen muß; und liege im Körper ſo, daß die Maſſe auf der einen Seite deſſelben, die auf der entgegengeſezten Seite nicht überwältigen und bewegen kann. Wenden wir dieſes auf den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt mehrerer Körper an, ſo iſt klar, daß dieſer gemeinſchaftliche Schwerpunkt gefunden wird, wenn man den Punkt C (Taf. V. Fig. 5.) in der Linie AB, durch die Schwerpunkte der Körper A und B, ſucht, von welchem an die Entfernungen AC und CB ſich umgekehrt verhalten wie die Schweren B und A. §. 118.

Z. B. ſey die Linie $AB = a$, die Entfernung $AC = x$, ſo iſt $CB = a - x$, und wir bekommen $A : a - x = B : x$. §. 118. Folglich $x = \frac{a.B}{B+A}$. Demnach wird die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts vom Schwerpunkt des einen Körpers gefunden, wenn man das Gewicht des andern Körpers mit der Entfernung der Körper multiplicirt, und das Produkt durch die Summe der Gewichte dividirt.

§. 124.

§. 124.

Hieraus ſieht man auch, wie bey drey Körpern (Taf. V. Fig. 6.) zu verfahren iſt. Man ſuche nämlich D nach §. 123. und hierauf den Punkt E; denn es läßt ſich in D ein Gewicht ſo gros, als die beyden A und B zuſammengenommen, denken.

Da in allen ähnlichen Fällen beſtändig eben ſo verfahren wird, ſo wollen wir mehrere derſelben nicht durchgehen, ſondern nur diejenigrn, ihres anderweitigen vorzüglichen Nutzens wegen, hinzufügen, wo die Schwerpunkte mehrerer Körper in einer geraden Linie liegen. Hier müſſen wir aber wieder einiges vorausſchicken.

§. 125.

Die Kraft des Körpers, womit er in einen andern, der mit ihm im Gleichgewicht ſteht, wirkt, das ſogenannte **Moment des Gewichts**, iſt nicht aus dem Gewicht allein, ſondern aus dem Gewicht, in ſeine Entfernung vom Ruhepunkt multiplicirt, zu ſchätzen. Denn die Kraft, womit A (Taf. V. Fig. 5.) wiegt, und gegen B wirkt, iſt A. AC; und umgekehrt die Kraft B, womit ſie gegen A wirkt, B. BC. §. 123. 118.

§. 126.

Das Moment in B bleibt einerley; wenn auch der Körper B plötzlich weggenommen, und eine andere gleichgroße Kraft an ſeine Stelle geſezt wird. Wirkt daher ein Druck B in vertikaler Richtung auf den Hebel, deſſen Ruhepunkt in C, ſo wird die Größe der Wirkung, womit er den Hebel drückt, ebenfalls aus dem Produkt B. BC zu ſchätzen ſeyn; und es iſt gleich-

viel, ob dieſer Druck ein ſchwerer Körper, oder eine andere Kraft iſt. Sezt man daher dieſe Kraft in B, ſo iſt das Moment der Kraft, oder die Größe der Wirkung, womit ſie den Hebel in Bewegung ſezt, B.BC.

§. 127.

Kurz, wenn Preſſungen auf den Hebel wirken, ſo beſtimmt das Produkt aus den Preſſungen, oder welches einerley, aus den Gewichten, die ihre Effekte ſind, in die Hebelarme, woran ſie angebracht ſind, die Größe der Wirkung.

Und da die Hebelarme ſich verhalten wie die Geſchwindigkeiten der Maſſen, die von den Kräften getrieben werden, §. 116. ſo wird auch die ganze Wirkung des Drucks, womit er auf den Hebel wirkt, **aus dem Produkt des abſoluten Drucks in die Geſchwindigkeit des von dieſem Druck angegriffenen Punkts, zu ſchätzen ſeyn.**

§. 128.

Dieſe Anmerkungen vorausgeſchickt, laſſet uns zu den §. 124. erwähnten Fällen kommen. Hier merken wir zuerſt an, daß, wenn mehrere Körper P, P′, P″, P‴ (Taf. V. Fig. 8.) auf beyden Seiten des Ruhepunkts A an dem nicht ſchweren, in B unterſtüzten Hebel im Gleichgewicht ſind, die Momente auf beyden Seiten des Punkts A gleich ſeyn müſſen, oder $P.PA + P'.P'A = P''.P''A + P'''A$.

Dieſes leichter zu erweiſen, laſſet uns nur drey Körper (Taf. V. Fig 7.) annehmen, damit der Beweis nicht zu weitläuftig und verworren wird: bey mehrern wird die Sache eben ſo erwieſen.

Hier

Hier kommt alles darauf an, zu erweiſen, daß ſich an die Stelle der beyden Gewichte E und B in ihrem gemeinſchaftlichen Schwerpunkt D ihre Summe E + B ſetzen läßt. Alsdenn iſt offenbar im Gleichgewicht $A.AC = (E+B)\,DC$. §. 114. Es iſt alſo zu erweiſen, daß $(E+B)\,DC = E.EC + B.BC$.

Zu dem Ende iſt vorher die Stelle des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts D zu beſtimmen. Es iſt aber §. 123. $\frac{E.EB}{E+B} = ED$. Daher auch $DC = BC - \frac{E.EB}{E+B} = \frac{E(BC-EB)+B.BC}{E+B}$, folglich $(E+B)\,DC = E.EC + B.BC$. Demnach iſt offenbar einerley, ob die Körper E und B in verſchiedenen Entfernungen vom Ruhepunkt, oder ihre Summe in der Weite ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunkts aufgehängt wird.

§. 129.

Hieraus ſieht man auch, wie mehrerer, an einer unbiegſamen aller Schwere beraubten Linie aufgehängter Körper P, P′, P″, P‴ (Taf. V. Fig. 8.) gemeinſchaftlicher Schwerpunkt, der mit dem Ruhepunkt einerley iſt, gefunden wird.

Die ganze Linie PP‴ ſey $= a$; der Schwerpunkt in A, $PA = x$, $PP' = b$, $P''P''' = c$. Sind nun die Entfernungen aller Schwerpunkte vom Punkt A beſtimmt, ſo wird, §. 128.

$$Px + P'.(x - b) = P''.(a - x - c) + P'''.(a - x)$$

$$Px + P'x - P'b = P''a - P''x - P''c + P'''a - P'''x$$

$$x = \frac{P'b + P''a - P''c + P'''a}{P + P' + P'' + P'''} = \frac{P'b + P''(a - c) + P'''a}{P + P' + P'' + P'''}.$$

Um alſo die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von dem einen Körper zu finden, multiplicire man jeden der übrigen Körper in ſeine Entfernung vom erſten; die Summe dieſer Produkte dividire man durch die Summe aller Körper.

§. 130.

Es ſeyn, wie vorhin, mehrere Körper P, P′, P″, P‴ (Taf. V. Fig. 8.) an einer Linie aufgehängt, die Linie ſelbſt ſey entweder von einer Kraft in B aufgehängt, oder von einem Körper BA unterſtützt; es ſey aber zwiſchen P, P′, und P″, P‴ kein Gleichgewicht vorhanden, ſondern die Körper auf der einen Seite überwiegen die auf der andern. So iſt das Uebergewicht unter dieſer Vorausſetzung $P.PA + P'.P'A - P''.P''A - P'''.P'''A$. Dieſes Gewicht iſt den leichtern in P″ und P‴ zuzuſetzen, wenn die Momente auf beyden Seiten des Punkts A gleichgros, und Gleichgewicht da ſeyn ſoll.

§. 131.

Endlich laßt uns noch hinzufügen, daß ſich der gemeinſchaftliche Schwerpunkt ſehr leicht verändern läßt,

läßt, nicht allein durch Zuſatz oder Wegnahme eines Gewichts, ſondern auch durch die mindeſte Verrückung eines Körpers aus ſeiner Stelle, wodurch der Hebelarm entweder länger oder kürzer, und die Rechnung alsdenn offenbar einen andern Ort des Schwerpunkts angeben wird.

Vierter Zuſatz.

Von Körpern, die mit einer gegebenen Geſchwindigkeit ſteigen. Vom Schwerpunkt.

Inhalt.

§. 54 — 56. Steigen ſchwerer Körper. §. 57. Allgemeine Regel, den Schwerpunkt zu finden. §. 58 — 60. in geraden Linien. §. 61 — 63. in Figuren mit einer Axe, worinn der Schwerpunkt liegt. Ingleichen §. 64. in Fällen, wo Theile der Figur auf eine andere Axe bezogen werden, die auf die erſte ſenkrecht iſt. §. 65. Allgemeine Methode, aus dem gegebenen Schwerpunkt des Ganzen, und dem Schwerpunkt des einen Theils, den Schwerpunkt des andern zu finden. §. 66. Allgemeine Methode, den Schwerpunkt in Figuren mit zwo Axen zu finden. §. 67. 68. Den Schwerpunkt in Figuren zu finden, deren Aeſte ungleich ſind. §. 69. In abgekürzten und abgeſchnittenen Figuren. §. 70. In Kreisbogen. §. 71. In Bogen überhaupt. §. 72 — 74. Allgemeine Methode, den Schwerpunkt der Körper zu beſtimmen. §. 75. Mittelpunkt der Größe. §. 76. — 79. Den Schwerpunkt in Körpern zu finden, worinn die Linie, darinn er liegt, gegeben iſt. §. 80. Beſtimmung des Schwerpunkts in jeder Gattung von Körpern, worauf in der Ausübung das meiſte ankommt. §. 81. In Kegelſchnitten. §. 82. In elliptiſchen Afterkugeln. §. 83. Es entſteht einerley Moment,

ment, man mag die Körper einzeln in ihre Entfernungen von einer wagerechten Ebene, oder ihre Summe in die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von dieſer Ebene multipliciren.

---

§. 54.

Steigt ein ſchwerer Körper mit einer gegebenen Geſchwindigkeit vom Punkt B durch BA (Taf. V. Fig. 9.) ſo ſetzet $Bd = x$; die anfängliche Geſchwindigkeit in $B = C$, und die geſuchte Geſchwindigkeit in $d = v$; ſo iſt §. 9. $-vdv = gdx$, wo das Zeichen (—) zu gebrauchen iſt, weil die Richtung der anfänglichen Geſchwindigkeit der Richtung der Schwere entgegengeſezt iſt. Daher $-v^2 = 2gx + C$, woraus die Geſchwindigkeit in jedem Punkte gefunden wird, wenn C vorher folgendergeſtalt beſtimmt worden. Wenn $x = 0$; ſo iſt $v = c$; daher $v^2 = c^2$, daß alſo $c^2 - v^2 = 2gx$, und $v = \sqrt{(c^2 - 2gx)}$.

§. 55.

Sezt man alſo $vv = cc - 2gx$; ſo ſey auch a die der Geſchwindigkeit c, und V die der Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe: und es wird ſeyn §. 17. $V = a - x$, weil $\sqrt{2gx}$, die im Fall durch x erlangte Geſchwindigkeit ausdrückt. §. 10. 12. Daher iſt das Quadrat der Geſchwindigkeit 2gx in einerley Verhältnis mit x. §. 17. Hieraus ſchlieſen wir weiter:

1.) Daß $V = 0$, wenn $x = a$, daher kann kein Körper zu einer größern Höhe ſteigen, als die, wodurch er gefallen iſt; erreicht er dieſe, ſo hat er nothwendig ſeine ganze Geſchwindigkeit verlohren.

2. Iſt

2.) Iſt die Geſchwindigkeit eines Körpers im Fall durch AB erzeugt worden, und der Körper ſteigt mit dieſer Geſchwindigkeit entweder durch eben dieſe, oder durch eine andere Linie; ſo hat er in Punkten, die in einerley Horizontallinie liegen, gleiche Geſchwindigkeit. Denn die der Geſchwindigkeit in jedem Punkt zukommende Höhe V iſt überall $a - x = Ac$.

§. 56.

Eben ſo wird die Zeit der Bewegung beſtimmt. Denn da $\frac{dx}{v} = dt$, und $v = \sqrt{2g} . \sqrt{(a-x)}$, ſo wird $\frac{dx}{\sqrt{2g} . \sqrt{(a-x)}} = dt$, und $t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}$ $(\sqrt{a} - \sqrt{(a-x)})$, wenn nämlich das ganze Integral ausgedrückt wird. Was alſo die Zeit betrifft, wird aus dem, was wir im zweyten Zuſatz bereits ausgeführt haben, leicht hergeleitet.

§. 57.

Um die Lehre vom Schwerpunkt weiter zu verfolgen, laſſet uns mehrere ſchwere Körper (Taf. V. Fig. 7. n. 2.) ſo viel man will, an einer Linie, die an dem einen Ende beweglich iſt, aufgehängt annehmen: Sie ſeyn P, P′, P″, P‴, die in der um den Punkt A beweglichen Linie AP‴ wiegen; dies vorausgeſezt, ſoll der Punkt Q in der Linie AP‴ gefunden werden, daß eine Kraft P⁗ der Summe aller Gewichte, in dieſem Punkt eben das auszurichten vermag, was alle Gewichte zuſammengenommen, d. i. mit ihnen Gleichgewicht halten kann.

Da

Da alſo Gleichgewicht vorausgeſezt wird, (§. 101. 128.) ſo iſt

$$P.PA + P'.P'A + P''.P''A + P'''.P'''A. + + + = P''''QA$$

$$\frac{P.PA + P'.P'A + P''.P''A + P'''.P'''A. + + +}{P + P' + P'' + P''' + + +} = QA$$

weil $P'''' = P + P' + P'' + P'''$. §. 101.

Dies wird mit Worten ſo ausgedrückt: **Man multiplicire ſämmtliche Körper in ihre Entfernungen vom Bewegungspunkt, die Summe der daher entſtehenden Produkte dividire man durch die Summe aller Gewichte: der Quotient zeigt den geſuchten Punkt Q.** Daß dieſer Punkt der gemeinſchaftliche Schwerpunkt dieſer Gewichte iſt, ſieht man daraus, weil die in dieſem Punkt vereinigte Summe der Gewichte eben das ausrichten kann, was ſämmtliche Gewichte einzeln in ihre Entfernungen von A multiplicirt. Daß aber dieſes das Kennzeichen des Schwerpunkts, iſt oben §. 129. Vorl. erwieſen.

§. 58.

Wir wollen an einigen einfachen Beyſpielen zeigen, wie der Schwerpunkt nach dieſer Regel gefunden wird. Zuerſt wollen wir ihn in der geraden Linie beſtimmen. Es ſey alſo AB (Taf. V. Fig. 9.) eine gerade Linie in A aufgehängt, ihre Punkte ſeyn alle gleichſchwer, und cd ein kleinſtes ſchweres Element derſelben. Die ganze Linie wollen wir a nennen, Ad = x, und cd = dx; ſo iſt die Summe aller kleinſten Gewichte, jedes beſonders in ſeine Entfernung vom Punkt A multiplicirt, = S.xdx; die

Summe

Summe aber der kleinen Gewichte ſelbſt S. dx. Demnach iſt S. xdx : S. dx $= \frac{1}{2}x^2 : x = \frac{1}{2}x$ die geſuchte Größe.

Wenn $x = a$, ſo iſt dieſe Größe $\frac{1}{2}a$; der Schwerpunkt fällt alſo in die Mitte der geraden Linie, und daß dem Integral keine beſtändige Größe zuzuſetzen, iſt daraus offenbar, weil, $x = o$ geſezt, das Integral zugleich verſchwindet.

§. 59.

Iſt aber die Schwere der Punkte der geraden Linie verſchieden und ungleichartig, z. B. den Entfernungen vom Punkt A proportional: ſo laſſet uns die Entfernungen x, cd, dx und $AB = a$, wie vorhin benennen; und wir bekommen $\frac{S.\,xxdx}{S.\,xdx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x$, und für die ganze Linie $\frac{2}{3}a$. Weil aber das Integral $= o$ wird, wenn $x = o$, ſo iſt nichts zu addiren.

§. 60.

Nimmt man das Gewicht oder die Schwere der einzelnen Punkte im verkehrten Verhältnis der Entfernungen von A an, und die Schwere in der Weite $a = p$, ſo wird $Ad = x$ geſezt, der Abſtand des geſuchten Punkts vom Punkt $A = \frac{S.\,apdx}{S.\,(apdx):x}$, welches iſt $\frac{apx}{ap.\log.x}$, und a ſtatt x geſezt, für die ganze Linie, $\frac{a}{\log.a}$.

§. 61.

Auch wird der Schwerpunkt in den Figuren leicht beſtimmt, die ſich in unendlich-kleine Parallelogrammen zerlegen laſſen, und ihre Schwerpunkte in der Axe haben; denn alsdenn iſt die ganze Figur als eine Linie anzuſehen.

Z. B. ſey ACD (Taf. V. Fig. 18.) ein Dreyeck, und der Schwerpunkt in der Linie AB, die alle mit der Grundlinie CD gleichlaufende Linien km in zwey gleiche Theile ſchneidet. Weil aber dieſe Linie nicht vertikal, noch auf der Grundlinie CD ſenkrecht iſt, ſo fälle man das Loth AE, ſo aus den gegebenen Seiten und Winkeln des Dreyecks bekannt iſt; auch ſey AE $= p$, AB $= a$, CD $= b$, Ag $= x$, ſo iſt

$$AB : CD = Ag : Km, \text{ oder } a : b = x : \frac{bx}{a} = km,$$

und $AB : AE = Ag : Af$, oder $a : p = x : \frac{px}{a}$

$= Af$. Alſo $fh = \frac{pdx}{a}$, und fh. km, oder das

ſchwere Element kmni $= \frac{bx}{a} \cdot \frac{pdx}{a}$, dieſes in den Hebel gA multiplicirt, entſteht das ganze Moment der Schwere, §. 127. welches in jedem Element iſt

$\frac{bpx^2dx}{a^2}$. Die Summe aber dieſer Elemente iſt

$\frac{S.bpxdx}{a^2}$. Folglich die Weite des geſuchten Punkts vom Punkt A = $\frac{S.bpx^2dx}{a^2} : \frac{S.bpxdx}{a^2}$

$= \frac{\frac{1}{3}bpx^3 : a^2}{\frac{1}{2}bpx^2 : a^2} = \frac{2}{3}x$, und im ganzen Dreyeck, wo $x = a$; $= \frac{2}{3}a$.

§. 62.

Eben ſo iſt der Schwerpunkt in allen krummen Linien zu beſtimmen, deren Aeſte gleichgros, oder überhaupt, die mit einer Axe verſehen ſind. Hiervon wollen wir, da die Sache keine Schwierigkeit leidet, nur ein einziges Beyſpiel anführen:

Es ſey CAF (Taf. VI. Fig. 1.) eine im Punkt A aufgehängte Parabel, und AB ihre Axe. Es ſey $AE = x$, $CE = y$; und der Parameter der Parabel $= p$. So iſt bekanntlich in dieſer Kurve $px = y^2$, ſo wie $gf = y = \sqrt{px}$, und $cefd. = 2dx\sqrt{px}$. Daher das Moment der einzelnen Elemente $= 2dx\sqrt{px^3}$, folglich der Abſtand des geſuchten Punkts

vom Punkt A $= \frac{2\sqrt{p}.S.x^{\frac{2}{3}}.dx.}{2\sqrt{p}.S.x^{\frac{1}{2}}.dx} = \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}x$,

welches für einen beſtimmten Theil der Parabel, wenn $AB = a$, in $\frac{3}{5}a$ übergeht.

Iſt auch die Parabel auf einen andern, von ihrer Axe verſchiedenen Durchmeſſer gebracht, ſo muß der Schwerpunkt im Durchmeſſer ſelbſt liegen, und die Rechnung iſt, wie vorhin, wofern hier nur durch p der, dieſem Durchmeſſer zugehörige Parameter verſtanden wird. Daß aber dieſer Parameter vom Parameter der Axe um eine beſtändige Größe unterſchieden iſt, iſt aus der Lehre von den Kegelſchnitten bekannt. Auch wird in andern Kurven, wenn die Schwerpunkte der ſchweren Elemente alle in einer geraden Linie liegen, der Schwerpunkt der ganzen Kurve eben ſo, wie im vorigen Beyſpiel, durch eine einzige Rechnung gefunden.

§. 63.

Wir verlaſſen die Parabel noch nicht. Auch in der äuſern **Parabel**, die zwey Theile HAC und IAF (Taf. VI. Fig. 1.), auf die Axe HI bezogen, enthält, **ſoll der Schwerpunkt beſtimmt werden.** Dies wird leicht bewerkſtelligt, wenn beyde Theile einerley gemeinſchaftliche Axe haben. (Taf. VI. Fig. 2.) Dann wird der Schwerpunkt unmittelbar aus §. 57. gefunden. Denn in der äuſern Parabel ABC ſtehen die Ordinaten und Abſciſſen in eben dem umgekehrten Verhältnis, wie in der innern Parabel; Cd mit hB, und dB mit Ch, daß alſo die Gleichung für jeden Punkt in ABC iſt $ay = x^2$. Daher $df = \frac{ady}{2\sqrt{ay}}$, und das Element CdfE doppelt genommen $= \sqrt{ay}.dy$; dieſes in den Hebel dB multiplicirt, iſt das ganze Moment $= x\sqrt{ay}.dy$, und (weil $x = \sqrt{ay}$) $= aydy$, deſſen Integral $\frac{1}{2}ay^2 =$

$\frac{x^4}{2a}$. Aber die Summe aller ſchweren Elemente

$$= S. \sqrt{ay}.dy = \frac{2\sqrt{a}}{3}.y^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{a}}{3}.\frac{x^3}{a\sqrt{a}} = \tfrac{2}{3}.\frac{x^3}{a}.$$

Wird alſo $\frac{x^4}{2a}$ durch leztere Summe $\frac{2}{3}.\frac{x^3}{a}$ dividirt, ſo bekommen wir $\frac{3}{4}x$, und für die ganze äuſere Parabel BAD, wo BC = b, iſt die geſuchte Weite des Schwerpunkts von B = $\frac{3}{4}$b.

Es erhellt alſo, daß dieſer Schwerpunkt leicht gefunden wird, wenn wir die äuſere Parabel von der innern dergeſtalt abſondern, daß beyde auf eine und dieſelbe Axe gebracht werden.

§. 64.

Verhält ſich es aber wie **Fig.** 3. **Taf.** VI. wo die Theile AEF und AGH auf verſchiedenen Seiten eben derſelben innern Parabel liegen: ſo ſey EFGH ein Parallelogramm, deſſen Schwerpunkt in den Mittelpunkt B der Axe AK fällt. Nun kömmt es darauf an, daß aus dem gegebenen Schwerpunkt des ganzen Parallelogramms, das ſowohl die äuſere, als die innere Parabel enthält, und dem Schwerpunkt des einen Theils dieſes Parallelogramms, nämlich der **innern Parabel**, der Schwerpunkt des andern Theils, oder der **äuſern Parabel** EFA und AGH gefunden wird. Es iſt aber des ganzen Parallelogramms Schwerpunkt in B, und wenn AK = a, ſo iſt AB = $\frac{1}{2}$a: der innern Parabel Schwerpunkt iſt in C, und AC = $\frac{3}{5}$a. §. 62.

Laßt uns annehmen, der geſuchte Schwerpunkt ſey in D, ſo ſind die Gewichte in den Schwerpunkten D, B und C als ſchwere Körper an dem nämlichen Hebel AK anzuſehen, ſo daß das Gewicht in B, wenn es in einer, den Richtungen der übrigen D und C entgegengeſezten Richtung wirkte, mit ihnen im Gleichgewicht ſeyn müßte. Alsdenn muß auch ſeyn $D.DA + C.CA = B.BA$. (§. 128. Vorl.)

Um aber hieraus das geſuchte zu ſchlieſen, iſt das, was in der höhern Geometrie erwieſen wird, hinzuzuſetzen, **daß nämlich die innere Parabel $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms EFHG, und die äuſere $\frac{1}{3}$ deſſelben enthält**; ſezt man daher das ganze Parallelogramm $= c$, ſo verhält ſich die innere Parabel zur äuſern, wie $\frac{2}{3}c : \frac{1}{3}c = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

Nun ſey $AD = x$, ſo wird $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.\frac{3}{5}a = \frac{1}{2}a$, daher $x = \frac{3}{10}a$, welches die geſuchte Weite des Schwerpunkts D vom Punkt A angiebt.

§. 65.

Auf ähnliche Art wird auch in andern Fällen der Schwerpunkt beſtimmt. **Denn aus dem gegebenen Schwerpunkten der Theile läßt ſich ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt, der mit dem Schwerpunkt des Ganzen einerley iſt, finden; eben ſo läßt ſich aus dem gegebenen Schwerpunkt des Ganzen, und dem Schwerpunkt des einen Theils, der Schwerpunkt des andern Theils finden.** Es ſey B das im Schwerpunkt B vereinigte Gewicht des Ganzen, D das Gewicht des Theils im Schwerpunkt D, und C das Gewicht des andern Theils im Schwerpunkt C; die beyden Entfernungen DA und CA ſind gegeben, und die Entfernung AB

des

des Schwerpunkts des Ganzen vom Punkt A wird geſucht. BA heiſe x, ſo wird $Bx = D.DA + C.CA$,

und $x = \frac{D.DA + C.CA}{B}$.

Im Theile ABC der Parabel DBE, (Taf. VI. Fig. 6.) deſſen Gewicht $= K$, ſey gegeben die Weite BK des Schwerpunkts vom Punkt B, auch ſey gegeben BH, oder die Weite des Schwerpunkts der ganzen Parabel DBE, deren Gewicht $= H$: ſo findet man leicht die Weite des Schwerpunkts des Theils ACED, deſſen Gewicht $= I$. Denn es ſey dieſer Schwerpunkt in I, und $IB = x$, ſo wird $Ix = K.KB = H.HB$,

und $x = \frac{H.HB - K.KB}{I}$.

§. 66.

Liegen aber die Schwerpunkte der Elemente nicht in einer Linie, doch aber in einer Ebene; oder iſt die Linie, worinn ſich die Schwerpunkte befinden, unbekannt; ſo iſt der Kalkul zu Beſtimmung des Schwerpunkts auf doppelte Art anzuſtellen, um die Entfernung des Schwerpunkts von zwo in der gegebenen Ebene gezogenen, und den Bedingungen der Aufgabe gemäs angenommenen Linien zu bekommen.

Dieſe Rechnung wollen wir an einem Beyſpiel zeigen. Zu dem Ende laſſet uns das in B aufgehängte Dreyeck BDE (Taf. VI. Fig. 4.) betrachten, deſſen Lage auf die, mit der Grundlinie des Dreyecks DE gleichlaufende Linie ABC bezogen werden muß. Man fälle das Loth BF auf die Grundlinie DE, und denke

ſich die ſchweren Elemente des Dreyecks bcde an der Linie ABC aufgehängt. Auch ſey BF = a, DE = b; bf mit DE gleichlaufend, und Bh = x, ſo iſt bf = $\frac{bx}{a}$, und be = $\frac{bdx}{a}$, daher bcda = $(a-x)\frac{bdx}{a}$. Da aber der Schwerpunkt dieſes Parallelogramms in ſeiner Mitte iſt, ſo iſt die Entfernung dieſes Schwerpunkts von der Axe ABC = $\frac{a+x}{2}$, und daher das ganze Moment des Elements bcda in der Axe AG = $(a-x)\left(\frac{a+x}{2}\right).\frac{bdx}{a}$. Alſo die geſuchte Entfernung des Schwerpunkts von der Linie ABC =

$$\frac{S.\frac{b}{2a}(a^2-x^2)\,dx}{S.(a-x)\frac{bdx}{a}} = \frac{\frac{a^2}{2a}bx - \frac{bx^3}{3a}}{bx - \frac{b}{2a}xx} = \frac{a^2-\frac{1}{3}x^2}{2a-x}$$

Die Größe b fällt aus der Rechnung weg: ein Zeichen, daß bey Beſtimmung des Schwerpunkts auf die Grundlinie des Dreyecks nichts ankommt.

Um aber die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Dreyecks von der Linie AC zu bekommen, ſo ſetze man x = a, ſo wird ſelbige = $\frac{2}{3}$a = $\frac{2}{3}$BF. Daher wird der Ort des Schwerpunkts im Dreyeck beſtimmt, wenn man durch den Punkt K in der Linie

BF

BF die Linie RKM mit DE gleichlaufend zieht, wo FK $= \frac{1}{3}$ BF. Denn er liegt in dieſer Linie RKM.

Stellt man überdies die Rechnung für das Dreyeck auf die Linie GEH bezogen an, die man mehrerer Leichtigkeit wegen mit der Seite des Dreyecks BD gleichlaufend annimmt, ſo wird der Schwerpunkt genau beſtimmt. Denn fällt man das Loth EK, ſo iſt die Entfernung des Schwerpunkts von der Linie GEH wie vorhin $= \frac{2}{3}$ EK $=$ oE. Zieht man alſo durch o die Linie poq mit DB gleichlaufend, ſo iſt der Schwerpunkt des Dreyecks im Punkt n, wo dieſe Linie die erſtere RM durchſchneidet. Denn er iſt der Durchſchnittspunkt zweyer Durchmeſſer der Schwere.

§. 67.

Es erhellt aber, daß dieſe Methode allgemein, und bey allen Figuren überhaupt anwendbar iſt; wenn nur die Rechnung den Bedingungen der Aufgabe gemäs geführt wird. Zugleich iſt klar, wie **der Schwerpunkt auch in Kurven gefunden wird, deren Aeſte unähnlich, ſo wie in Figuren, die von unähnlichen Kurven begränzt ſind.** Man ſuche nach §. 65. zuerſt den Schwerpunkt G in der gegebenen Figur ABE, (Taf. VI. Fig. 5.) dann den Schwerpunkt F in der andern Figur ACD, und endlich den Punkt H, ſo daß FH und GH ſich umgekehrt verhalten, wie die Gewichte in F und G, ſo iſt H der geſuchte Schwerpunkt. §. 65. Zuſatz und §. 114. Vorl.

Hieraus folgt auch, daß eben dieſe Methode auf alle Figuren anwendbar iſt, ſie mögen aus ſo viel ungleichartigen Theilen beſtehen, als ſie wollen.

§. 68.

Doch braucht man nicht allemal den Schwerpunkt auf zwo Axen zu beziehen. Oefters erhellt ohne Umſchweife, in welcher Linie er liegt; und dann darf man die Figur nur auf eine einzige Axe beziehen. So ſuche man zum Beyſpiel den Schwerpunkt in der äuſern Parabel (Taf. VI. Fig. 3.) auf die beyden Axen EG und AK bezogen, die auf einander ſenkrecht, und unter allen andern Linien hierzu am bequemſten ſind. Hier erhellt ſogleich, daß der Schwerpunkt in der Axe AK ſelbſt liegt, da die Theile der Parabel AEF und AHG einander völlig gleich und ähnlich ſind. Alſo iſt nur noch der Punkt dieſer Linie Ak, worinn er liegt, zu finden; und dieſes wird nach der §. *66.* vorgetragenen Methode verrichtet.

Denn (§. 63.) $ay = x^2$, wenn $cd = y$, $Ac = x$, $bc = dx = \frac{ady}{2\sqrt{ay}}$. Ferner $bc.ab = \frac{aydy}{2\sqrt{ay}} = \frac{\sqrt{a}.y^{\frac{1}{2}}dy}{2}$, und $badc.\ \frac{1}{2}ab = \frac{\sqrt{a}}{4}.y^{\frac{3}{2}}dy$, davon die Summe $\frac{2\sqrt{a}}{4.5}.y^{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{10}.y^{\frac{5}{2}}$ durch die Summe der Elemente bcda dividirt werden muß.

Dieſe Summe iſt, wie vorhin geſagt worden, $S.\frac{\sqrt{a}}{2}.y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{\sqrt{a}}{2}.\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{a}}{3}.y^{\frac{3}{2}}$; daher $\frac{\sqrt{a}}{10}.y^{\frac{5}{2}} : \frac{\sqrt{a}}{3}.y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{10}y$, welches die Weite

des

des Schwerpunkts von der Axe EG ausdrückt, und da dieſer in der Linie AK liegt, zugleich die Weite AD $= \frac{3}{10}$ AK $= \frac{3}{10}$a andeutet, wie wir oben §. 64. auf eine andere Art erwieſen.

§. 69.

Nicht minder läßt ſich dieſe Methode, den Schwerpunkt zu beſtimmen, auf die abgekürzten Figuren anwenden. Iſt eine krumme Linie, ſo wie der von ihr begränzte Raum, mit einer Axe verſehen, die durch alle Schwerpunkte der Elemente geht; und wird ein von den übrigen abgeſonderter Theil dieſer Figur ABC (Taf. VI. Fig. 6.) von der Ordinate AC begränzt: ſo läßt ſich dieſe Figur auf eine mit den Ordinaten gleichlaufende und die Figur in ihrem Scheitel B berührende Ebene beziehen. Dies in jedem Fall in Acht genommen, läßt ſich die Rechnung wie oben §. 62. anſtellen; doch mit dem Unterſchiede, daß man hier zum Integral allemal eine beſtändige Größe addiren muß, wenn der Schwerpunkt der ganzen Figur berechnet werden ſoll, welches in den vorigen Beyſpielen nicht nöthig war.

Wir wollen dieſes mit einem Beyſpiel erläutern; zu dem Ende wollen wir zur Parabel zurückgehen, und die bereits §. 62. gefundenen Größen $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ und $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ auch hier anwenden. Es ſey alſo ABC (Taf. VI. Fig. 6.) das abgeſchnittene Stück der Parabel, deſſen Höhe in der Axe = b, ſo muß das Integral in o übergehen, wenn x = b geſezt wird. Daher wird für das Stück CEDA das erſtere Integral, ſo

der

der Zähler des Bruchs iſt, $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}b^{\frac{5}{2}}$; und das leztere, oder der Nenner des Bruchs, $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. Demnach iſt die Weite des geſuchten Punkts von B in dem unbeſtimmten Stück der Parabel DACE =

$$\frac{\frac{3}{5}(x^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}})}{x^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}$$

, und x = a = BG geſezt, iſt die Weite des Schwerpunkts in dem nunmehr beſtimmten Stück

$$DACE = \tfrac{3}{5} \cdot \left\{\frac{a^{\frac{5}{2}} - b^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Es erhellt aber, daß ſich der Schwerpunkt in dieſem und ähnlichen Beyſpielen auch nach §. 65. finden läßt: es läßt ſich nämlich der Schwerpunkt H der ganzen Figur, wie auch der Schwerpunkt K, im Theile ABC beſtimmen; aus den gegebenen Punkten H und K läßt ſich der Punkt I ſuchen, ſo daß die Gewichte in I und K ſich umgekehrt verhalten, wie IH und KH; hierdurch wird nach §. 114. **Vorl.** der Schwerpunkt des Theils DACE beſtimmt.

§. 70.

Auch wird der Schwerpunkt **in Bogen**, dergleichen ABC (Taf. VI. Fig. 8.) **wie auch überhaupt im Umfang der Figuren**, mit Hülfe dieſer oder jener Methode gefunden.

Z. B. ſey ABC ein Kreisbogen, deſſen Mittelpunkt D, der Halbmeſſer DC, Querſinus BE, Sinus CE. Ferner ſey $Bg = x$, $hg = dx$, $BD = a$, ſo iſt das Element des Bogens $\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Dies vorausgeſezt, ſey die Figur in B an die mit fg oder AC gleichlaufende Axe aufgehängt, und der Bogen von der Linie BD halbirt. Der Schwerpunkt liegt alſo in BD, welches einer von den obengedachten leichten Fällen iſt. Die Summe aller ſchweren Elemente iſt $2. S. \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, ſo wie die Summe aller Elementarmomente, oder die ganze Kraft, womit ſie den Punkt B drücken, $= 2. S. \frac{axdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; folglich der Abſtand des Schwerpunkts vom Punkt

$$B = \frac{a. S. \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}} - a. S. \frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}}{\text{Bogen Bf}} = \frac{a. \text{Bog. Bf} - a\sqrt{(2ax-xx)}}{\text{Bog. Bf}}.$$

Aber $\sqrt{(2ax-xx)}$ = der halben Sehne fg; ſezt man daher b ſtatt x für den ganzen Bogen, ſo wird auch Bf = AB, und fg geht in AE über. Hieraus folgt: **der gegebene Bogen verhält ſich zum Durchmeſſer, wie der um ſeinen Sinus verminderte halbe Bogen, zur** **geſuch-**

geſuchten **Entfernung des Schwerpunkts vom Punkt** $B = Bh$, wenn in h der Schwerpunkt geſezt wird.

Soll die Weite des Schwerpunkts vom Punkt D beſtimmt werden, ſo iſt $Dh = \frac{a.AB - a.AB + a.AE}{AB}$

$= a.\frac{AE}{AB}$. **Wie alſo der gegebene Bogen zur ganzen Sehne, ſo auch der Halbmeſſer zu** Dh, welches mit §. 106. a. **Vorl.** genau übereinſtimmt. Wir wollen aber dieſes übergehen, da das zum Schwerpunkt des Kreiſes gehörige in den Vorleſungen ſelbſt ausführlich abgehandelt worden: hier genügt es zu unſerm Zweck, die vorgeſchriebene Methode zu erläutern.

§. 71.

Sind aber ſolche Bogen von Kurven gegeben, die ſich durch eine gerade Linie nicht ſo theilen laſſen, daß die ſchweren Elemente auf beyden Seiten derſelben einerley Lage haben; ſo iſt ihr Schwerpunkt nach §. 64. oder §. 65. zu ſuchen. Da aber die Rechnung keine Schwierigkeit leidet; ſo brauchen wir dabey länger nicht zu verweilen. **Laßt uns alſo zur Beſtimmung des Schwerpunkts in den Körpern ſelbſt kommen.**

§. 72.

Der hier zu betretende Weg iſt mit vorigem völlig einerley. Allgemein iſt die Sache folgendergeſtalt anzuſtellen: Man beziehe die Körper auf drey Ebenen und beſtimme die Entfernung des Schwerpunkts

von

von jeder beſonders; der Punkt, worinn ſich dieſe Entfernungen durchſchneiden, iſt der Schwerpunkt. In dieſer allgemeinen Methode kommen Schwierigkeiten vor, die doch in den nützlichſten Fällen, wo auf die Kenntnis der Stelle des Schwerpunkts das meiſte ankommt, wegfallen. So erhellt z. B. daß der Schwerpunkt des Cylinders, deſſen Theile überall gleichdicht und ſchwer ſind, in der Mitte der Axe liegt. Und in allen Körpern, die durch Umdrehung einer Figur um eine unbewegliche Linie erzeugt worden, iſt die Berechnung des Schwerpunkts ſehr leicht. Denn da die Linie gegeben iſt, worinn der Schwerpunkt liegt; ſo iſt zugleich die Durchſchnittslini e zwoer Ebenen gegeben; und es iſt weiter nichts übrig, als die Entfernung des Schwerpunkts von der dritten angenommenen Ebene zu beſtimmen. Aus der Urſache wird auch in Kegeln der Schwerpunkt leicht beſtimmt. Denn die Axe der Schwere iſt bereits gegeben; folglich auch die Linie, worinn die Schwerpunkte der Elementarſchnitte des Körpers liegen, und woran ſie, wie an einem Hebel, durch ihre Schwere drücken. Wir wollen dieſes mit Beyſpielen erläutern.

§. 73.

In Parallelepipeden läßt ſich der Schwerpunkt, vermittelſt dreyer Ebenen ohne Umſchweife beſtimmen.

Es ſey adchgeb (Taf. VI. Fig. 9.) ein Parallelepipedum, deſſen Höhe ek; ſo iſt der Innhalt adcb + ck, der ſich auch durch ah ausdrücken läßt, wenn die Höhe h, und die Grundfläche abdc, a heißt. Da ſich alſo der Schwerpunkt in den Ebenen befindet, die das Parellelepipedum in gleiche Theile ſchneiden, ſo müſſen dieſe Ebenen nothwendig durch die Stellen

gehen,

gehen, wo die Theile auf beyden Seiten derſelben $\frac{ah}{2}$ ſind. Eine ſolche Ebene aber kann eine dreyfache Lage haben.

Denn $\frac{ah}{2} = \frac{a}{2} . h$, und $= a . \frac{h}{2}$. Das erſtere zeigt eine Ebene ache durch die Diagonallinien der Grundflächen an; weil es aber einerley iſt, ob ſie durch die Diagonale ac, oder bd geht; und kein Grund vorhanden, warum eher dieſes, als jenes, ſtatt haben ſoll; ſo iſt offenbar der Schwerpunkt in beyden Ebenen ache, dbgf, befindlich. Hieraus erhellt zugleich, daß er in der Linie pq liegt, als welche dieſe Ebenen durchſchneidet, und die Mittellinie ſowohl im Parallelepipedum, als in den Ebenen ſelbſt iſt, die Parallelogrammen ſind; denn q und p ſind die Durchſchnittspunkte der Diagonallinien.

Weil aber auch $\frac{ah}{2} = a . \frac{h}{2}$, ſo iſt eine Ebene mpon durch die Mitte l der Höhe ck, die dritte Ebene. Aber dieſe Ebene, wovon der Theil novt im Parallelepipedum ſelbſt liegt, iſt auf ck ſenkrecht, und mit der Grundfläche efgh gleichlaufend, weil ck auf dieſer Grundfläche ſenkrecht iſt. Da alſo die dritte Ebene den Körper in zwey gleiche Theile ſchneidet, ſo muß auch nothwendig die Linie rCl durch die Mitte der Linie pq gehen; und der Schwerpunkt in den Punkt C der Linie qp ſelbſt fallen. **Demnach liegt der Schwerpunkt in jeden Parallelepipedum in der Mitte der Linie durch die Schwerpunkte der Grundflächen.**

§. 74.

Da die prismatiſchen Körper durch ah gegeben ſind, ſo finden eben die Schlüſſe, deren wir uns im vorhergehenden Beyſpiel bedient haben, auch in andern ähnlichen ſtatt. Jene drey Ebenen aber können auf verſchiedene Art liegen: gegenwärtig wollen wir zeigen, daß ſie im dreyeckigten Prisma ſich eben ſo wie im Parallelepipedum (§. 73.) denken laſſen.

Es ſey nämlich ABCEF ein dreyeckigtes Prisma, N ein Punkt mit der Grundfläche CDE in einer Ebene, und FN die Höhe des Prisma. Durch die Schwerpunkte der dreyeckigten Grundflächen o und l, ziehe man die Linien Ah, Bg in der obern, und Ci, Dk in der untern Grundfläche: ſo bekommen wir nach Verzeichnung der Parallelogrammen ADkh, BCig, zwo Ebenen, wodurch der Körper in zwey gleiche Theile getheilt wird, Die dritte Ebene iſt HRGP, parallel mit der Grundfläche CDE, durch die Mitte der Höhe t. Die Linien ol und tv ſind die Durchſchnitte dieſer drey Ebenen; woraus man ſieht, daß der Punkt p, worinn dieſe beyden Linien, und daher die drey Ebenen einander ſchneiden, der Schwerpunkt iſt. Auch iſt op = $\frac{1}{2}$ol.

In jedem prismatiſchen Körper laſſen ſich in beyden Grundflächen zwey Durchmeſſer der Schwere ziehen. Daher läßt ſich auch in jedem Körper dieſer Art die Lage dieſer Ebenen eben ſo wie im angeführtem Beyſpiel gedenken. Hieraus kann man den allgemeinen Schluß ziehen: **Der Schwerpunkt aller prismatiſchen Körper liegt in der Mitte der Linie durch die Schwerpunkte der Grundflächen.**

Das hier vorgetragene haben wir nur zur Erläuterung der Methode beygefügt, die Schwerpunkte der Körper vermittelſt dreyer Ebenen zu beſtimmen, die eigentlich bey Körpern anzuwenden iſt. Sonſt hätten wir aus §. 99. ſehr leicht unmittelbar ſchlieſen können, daß der Schwerpunkt aller prismatiſchen Körper im Mittel der Linie, durch die Schwerpunkte zwoer gegenüberſtehenden, mit einander gleichlaufenden Seiten- oder Grundflächen liegt. Denn die Schwerpunkte aller mit der Grundfläche gleichlaufenden Schnitte des Prisma befinden ſich in dieſer Linie.

§. 75.

Hier müſſen wir auch kürzlich vom **Mittelpunkt der Größe der Figuren** reden. Dieſer Ausdruck wird nicht allemal richtig und auf einerley Art beſtimmt. Er läßt ſich für den **Punkt** nehmen, **wodurch** man eine **Linie ziehen kann, die die Figur in zwey** gleiche **Theile theilt**; alsdenn laſſen ſich mehrere ſolche Punkte in geradlinigten Figuren finden; ja **der Mittelpunkt der Größe in geradlinigten Dreyecken** iſt, wie aus §. 108. 2. **Vorl.** leicht geſchloſſen wird, **vom Schwerpunkt verſchieden.** Denn iſt ABC (Taf. V. Fig. 16.) ein Dreyeck, deſſen Schwerpunkt in E, und DEF mit BGC parallel, ſo iſt $ADF : ABC = AE^2 : AG^2$, weil die Dreyecke ADF und ABC ähnlich ſind; d. i. $ADF : ABC = 4 : 9$, alſo ADF kleiner, als die Hälfte des Dreyecks. Soll hingegen in der Linie AG der Punkt I gefunden werden, wodurch die mit BGC gleichlaufende Linie HIK das Dreyeck in zwey gleiche Theile

ſchnei-

ſchneidet; ſo muß ſeyn $AI^2 : AG^2 = 1 : 2$, und $AI = AG : \sqrt{2}$. Ueberdies fånde man auch in andern aus den Punkten B und C gezogenen Durchmeſſern ſolche Punkte, wie I, die von dem erſtgefundenen Punkt I verſchieden, doch ſo beſchaffen ſind, daß die mit den Seiten gleichlaufenden Linien durch dieſe Punkte das Dreyeck halbiren. Alſo giebt es mehrere Mittelpunkte der Gróße.

Nehmen wir hingegen den **Mittelpunkt der Größe**, oder den Mittelpunkt der Figur für den **Punkt an, wodurch alle Linien die Figur in gleiche Theile theilen**, welches die Durchmeſſer der Kreiſe und Ellipſen thun: ſo haben wir zwar in den Parallelogrammen, wo die Durchmeſſer oder Diagonalen einander ſchneiden, einen ſolchen Punkt: aber weder in Dreyecken, noch in andern geradlinigten Figuren iſt etwas åhnliches vorhanden.

Wir können auch durch **den Mittelpunkt der Größe**, oder die **Mitte** einer jeden Figur **den Punkt verſtehen, von welchem Linien gezogen, die Figur in ſo viel gleiche Dreyecke, als ſie Seiten hat, getheilt wird.** Dieſe Erklårung läßt ſich zwar auf die Figuren, die im engern Verſtand, mit einem Mittelpunkt, wie der Kreis, verſehen ſind, nicht anwenden, weil nicht mehrere Seiten da ſind: wohl aber auf die übrigen **ordentlichen Figuren**, deren Mittelpunkt überall mit dem Mittelpunkt des ein- oder umgeſchriebenen Kreiſes zuſammenfållt. *)

Q 2 Wird

*) **Für allen andern Figuren verdient der Mittelpunkt des Kreiſes ſeinen Namen.** Denn er iſt 1.) der Schwerpunkt; 2.) vom jedem Punkt des Umfangs gleich-

Wird aber dieſe Bedeutung des Worts beybehalten, ſo fällt der **Mittelpunkt der Größe** mit dem **Schwerpunkt** in den **Dreyecken** zuſammen. Denn man ziehe zum Schwerpunkt E (Taf. V. Fig. 16.) die Linien BE und CE, ſo iſt EG = $\frac{1}{3}$ AG. Man fälle die Lothe EL und AM, ſo iſt auch die Höhe EL = $\frac{1}{3}$ AM. Daher das Dreyeck BEC = $\frac{1}{3}$ AM. $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{6}$ AM. BC. = $\frac{1}{3}$ ABC. Welches ſich doch auch folgendergeſtalt erweiſen läßt: Es ſey ABC (Taf. V. Fig. 17.) ein Dreyeck, BD = DC, der Schwer-

gleichweit entfernt, welches dieſem Mittelpunkt eigen iſt; 3.) jede Linie durch dieſen Punkt halbirt die Kreisfläche; 4.) läßt ſich die Kreisfläche durch Linien aus dieſem Punkt in ſo viel gleiche Dreyecke theilen, als man ſich den Umfang in gleiche Seiten getheilt denkt.

Den Mittelpunkten der übrigen Figuren fehlt wenigſtens die eine oder die andere dieſer Eigenſchaften. Den Mittelpunkten aber der **ordentlichen geradlinigten Figuren**, wie auch der **Parallelogrammen** nur die zweyte, die allein dem Kreis eigen iſt. Den Mittelpunkten der **Dreyecke** kommt die erſte und vierte; den **unordentlichen Figuren** aber nicht einmal die leztere zu. Die Mittelpunkte in den **Kurven**, und **krummlinigten Figuren**, ſind gemeiniglich die Punkte, wodurch die bis an den Umfang gezogenen Linien halbirt werden. Dieſe nähern ſich in den verſchiedenen Figuren und Linien, mehr oder weniger dem Mittelpunkt des Kreiſes. Es giebt aber auch andere Punkte, die den Namen der Mittelpunkte führen, wie im weitläuftigſten Verſtande **der Mittelpunkt derjenige Punkt heißt**, wodurch die gezogenen Linien auf beyden Seiten deſſelben einerley Eigenſchaften haben, oder **wo ihre Verhältniſſe einerley ſind**; daß auch die Benennung der **Durchmeſſer** ſo weitläuftig genommen wird, iſt aus den Schriften der Analyſten bekannt. (T.)

Schwerpunkt in E, und daher ED = $\frac{1}{3}$ AD. Man ziehe BEG, wie auch mit AC die Parallele DF; ſo iſt DF = $\frac{1}{2}$ GC, da BFD und BGC ähnliche Dreyecke. Aber die Dreyecke FED und AEG ſind ebenfalls ähnlich, folglich DE : EA = FD : AG, oder 1 : 2 = $\frac{1}{2}$ GC : AG; daher AG = GC. Weil alſo GC : CA = CD : CB, ſo iſt GD mit AB gleichlaufend; folglich auch GED und AEB ähnliche Dreyecke, und GE : EB = DE : EA. Daher GE = $\frac{1}{3}$ BG. Hieraus erhellt, daß die Durchmeſſer der Schwere AD, BG, CK im Dreyeck ſich in einem Punkt, und zwar im Schwerpunkt E durchſchneiden, und daher ABE = BEC = AEC = $\frac{1}{3}$ ABC.

Den geradlinigten Figuren laſſen ſich eben ſo wie den Kurven Durchmeſſer beylegen. Denn **der Durchmeſſer der Figur** läßt ſich durch die gerade Linie beſtimmen, die die übrigen geraden Linien in der Figur, die in Rückſicht jener einerley Lage haben, und am Umfang der Figur ſtoßen, halbirt, wie wir an dem Beyſpiel (Taf. IV. Fig. 9.) und §. 105. **Vorl.** gezeigt haben. Demnach ſind im Dreyeck, wie bereits erwieſen, drey Durchmeſſer, die alle durch einen Punkt gehen. In Parallelogrammen aber viere, die die gegenüberſtehenden Seiten in den Mittelpunkten ſchneiden. **Und allgemein ſind in den ordentlichen Figuren ſo viel ſolche Durchmeſſer vorhanden, als dieſe Figuren Winkel oder Seiten haben, und alle dieſe Durchmeſſer laufen in einem Punkt zuſammen.** Heißt alſo dieſer Punkt die **Mitte** der Figur, ſo fällt der Schwerpunkt mit ihr zuſammen; wofern nur zugleich die Theile der Figuren gleichartig, und insge-

ſammt gleich ſchwer ſind. Dieſe lezte Beſtimmung des Mittelpunkts der Größe hat den größten Nutzen, wenn vom Schwerpunkt auf die Mitte der Figuren oder Körper geſchloſſen werden ſoll; es iſt aber zu merken, daß zum Mittelpunkt der Größe in dieſem Sinn nicht genug iſt, wenn wir ſagen, die Figuren werden von den dadurch gezogenen Linien in zwey Hälften getheilt: dieſe Linien müſſen zugleich Durchmeſſer der Figuren ſeyn, und ſich in dieſem Punkt ſchneiden.

§. 76.

Die in der Rechnung vorkommenden Schwierigkeiten, wenn vermittelſt dreyer Ebenen der Schwerpunkt geſucht werden ſoll, verſchwinden, wenn entweder der Durchſchnitt zwoer Ebenen, oder ein Durchmeſſer der Schwere durch den ganzen Körper gegeben iſt. Daher iſt die Rechnung bey Körpern, die durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe entſtehen, ſehr leicht. Z. B. ſey ABC (Taf. VII. Fig. 1.) ein Kegel, deſſen Axe $= a$, $gB = b$, das Verhältnis des Halbmeſſers zum Umkreis $= 1 : p$; $Af = x$, $fE = dx$. So iſt $Ag : gB = AE : Ed$, oder $a : b = x : \frac{bx}{a} = dE$, und die Kreisfläche, deren Halbmeſſer dE, $= \frac{pb^2x^2}{2a^2}$. Daher das cylindriſche Kegelelement, deſſen Dicke dx, $= \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$. Setzet nun, der Kegel ſey in A an einer mit ſeiner Grundfläche gleichlaufenden Ebene befeſtigt,

feſtigt, ſo iſt die Summe aller ſchweren Elemente $S.\frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$, und ihr ganzes Moment, womit ſie nach der Ebene in A zu fallen ſtreben, $S.\frac{pb^2x^3dx}{2a^2}$, hiraus wird die geſuchte Entfernung des Schwerpunkts von A, $S.\frac{pb^2x^3dx}{2a^2} : S.\frac{pb^2x^2dx}{2a^2} = \frac{pb^2x^4}{2a^2.4} : \frac{pb^2x^3}{2a^2.3} = \frac{3}{4}x$. Daher die Entfernung des Schwerpunkts von der Spitze im ganzen Kegel $= \frac{3}{4}Ag$.

Laßt uns nun annehmen, der Kegel ſey abgekürzt, es fehle das Stück Adh, und, die übrigen Zeichen beybehalten, ſey AE = C; ſo muß, wenn $x = c$, das Integral = o ſeyn; daraus findet man die Entfernung Ak des Schwerpunkts im abgekürzten Kegel $= \frac{\frac{1}{4}(x^4 - c^4)}{\frac{1}{3}(x^3 - c^3)}$.

Ohne Integralrechnung findet man ſelbige nach §. 64. aus dem Schwerpunkt f des abgeſchnittenen Stücks Adh, und dem Schwerpunkt n des ganzen Kegels ABC.

§. 77.

Nun laßt uns einen paraboliſchen, durch Umdrehung der halben Parabel um ihre Axe erzeugten Kegel gedenken. (Taf. VII. Fig. 2.) Die Parabel

ſelbſt ſey BAC, $Aa = x$, ſo iſt $de = \sqrt{ax}$; die kleine Kreisfläche $dehq = \frac{p.ax}{2}$, folglich das cylindriſche Element $= \frac{paxdx}{2}$. Daher auch die Summe der ſchweren Elemente $S.\frac{paxdx}{2} = \frac{p}{4}ax^2$: ihr ganzes Moment aber $= S.\frac{p}{2}ax^2dx = \frac{p}{6}ax^3$. Alſo die geſuchte Entfernung des Schwerpunkts vom Punkt $A = \frac{\frac{p}{6}.ax^3}{\frac{p}{4}.ax^2} = \frac{2}{3}x$, und im ganzen paraboliſchen Kegel $= \frac{2}{3}Ag$. Hierzu muß man aber, wenn der Kegel abgekürzt angenommen wird, eine beſtändige Größe addiren. Aus dieſen Beyſpielen erhellt zur Genüge, wie in andern ähnlichen Fällen zu verfahren; daß es alſo überflüßig, mehrere und ſchwerere beyzufügen.

§. 78.

Da wir von den Kegeln ſchon geſagt haben, ſo ſcheint hier der Ort zu ſeyn, auch von den Schwerpunkten der Pyramiden einiges hinzuzuſetzen. Es ſey

ſey alſo GABC (Taf. VII. Fig. 3.) eine Pyramide; GBA und GBC zwo Seiten derſelben, und DEF ein Parallelſchnitt mit ABC, der, wie aus der Geometrie bekannt, der Grunfläche ähnlich iſt. Daher ſind auch ABC, und jeder Parallelſchnitt, wie DEF, ähnliche Dreyecke. Nun ziehet eine Linie durch die Mittelpunkte aller Dreyecke, z. B. durch s und t, oder, allgemeiner zu reden, durch die Schwerpunkte der mit der Grundfläche gleichlaufenden Schnitte: ſo ſind die Dreyecke GsE und GtB ähnlich. Denn die Winkel bey s und t ſind gleichgros, und der Winkel EGs beyden gemein: ſind daher Eh und Bk die Höhen der Dreyecke ABC und DEF, ſo iſt überall DE : Eh, ſo wie AB : Bk ein beſtändiges Verhältnis, da in ähnlichen Figuren ähnlich liegende Linien unter ſich in einem beſtändigen Verhältnis ſtehen. Eben ſo iſt Gs : DF, und Gt : AC beſtändig, weil DE : AB = DF : AC = GE : GB = Gs : Gt. Es ſey alſo Gs = x, und 1 : m. ſo wie 1 : n, das Zeichen des beſtändigen Verhältniſſes; ſo läßt ſich DF = mx, und hE = nx ſetzen, und das Dreyeck DEF = $\frac{mnx^2}{2}$. Daher das Elementarprisma $\frac{mnx^2dx}{2}$, und die Summe der ſchweren Elemente = $\frac{mn}{2}$. $\frac{1}{3}x^3$. Das Moment der Elemente auf der Seite des Punkts G iſt $S. \frac{mn}{2} . x^3dx = \frac{mn}{2} . \frac{1}{4}x^4$. Daher die Entfernung des Schwerpunkts vom

Punkt G = $\frac{3}{4}x$, und in der ganzen Pyramide = $\frac{3}{4}a$, d. i. der Schwerpunkt der Pyramide iſt von ihrer Spitze $\frac{3}{4}$ der Linie entfernt, die von der Spitze zum Schwerpunkt der gegenüberſtehenden Grundfläche gezogen wird, und durch den Schwerpunkt des Parallelſchnitts mit der Grundfläche geht.

§. 79.

Daß der Schwerpunkt in Körpern, die durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe erzeugt werden, leicht gefunden wird, haben wir oben ſchon gezeigt: laßt uns hier kürzlich beyfügen, **wie ſelbiger durch Beziehung der Körper auf drey Ebenen beſtimmt wird**, und zu dem Ende den Kegel (Taf. VII. Fig. 5.) betrachten. Man beziehe ihn zuerſt auf die Ebene ACDB, worinn die Linie lk mit der Axe des Kegels eh gleichlaufend iſt; dieſe Ebene aber ſteht ſenkrecht auf der Mittellinie in dem auf eh ſenkrechten, und mit der Grundfläche gleichlaufenden Kegelſchnitt. Man gedenke ſich überdies den Kegel an der Ebene ACDB im Punkt k befeſtigt, ſo iſt der cylindriſche Elementarkegelſchnitt, deſſen Grundfläche

$$adc = \frac{pb^2x^2dx}{2a^2}$$, wie oben §. 76. und ihre Summe

$$\frac{pb^2x^3}{6a^2}.$$ Und da der Punkt d der Schwerpunkt des cylindriſchen Elements, ſo iſt dl der Hebel dieſes Elements = hk = b, wenn wir die Zeichen §. 76. beybehalten. Auch iſt das ganze Moment der

Elemente

Elemente in KI $= S. \frac{pb^2x^2dx}{2a^2} = \frac{pb^2x^3}{6a^2}$. Dieſe Summe alſo durch die erſtere $\frac{pb^2}{6a^2} . x^2$ dividirt, giebt b für die Entfernung des Schwerpunkts von der Ebene ABCD. Hieraus ſchließt man, daß der Schwerpunkt in der, durch die Axe des Kegels mit ABCD gleichlaufenden Ebene liegt.

Laßt uns nun ferner beſtimmen, wo dieſe Ebene von einer andern Ebene, die ebenfalls durch den Schwerpunkt geht, geſchnitten wird. Man bringe daher den Kegel auf die, mit der Grundfläche LKI gleichlaufende Ebene GHMN, und da eb $= \frac{3}{4}$eh nach §. 76. (denn die dortige Rechnung wird hier eben ſo wiederholt) ſo befindet ſich der Schwerpunkt in der Linie, worinn die Ebene durch die Axe, die andere mit der Grundfläche gleichlaufende Ebene ſchneidet. Hier braucht man zwar den Punkt dieſer Linie, worinn der Schwerpunkt liegt, nicht zu ſuchen, da wir bereits wiſſen, daß er in der Axe liegt: ſoll er aber doch auch gefunden werden, ſo betrachte man die dritte Ebene EFQ; und es erhellt, daß der Schwerpunkt in b in der Linie qbr, dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der beyden erſtern Ebenen, liegt; ſo daß qb = rb = b; und daher der Schwerpunkt in der Axe ſelbſt, und zwar in der Weite $\frac{3}{4}$ derſelben von der Spitze des Kegels liegt, wie §. 76.

§. 80.

Ehe wir gegenwärtige Abhandlung ſchlieſen, wollen wir denen zu Gefallen, die hier eine Anzeige der nützlich-

nützlichſten und in der Ausübung am häufigſten vorkommenden Falle wünſchen, folgendes hinzufügen, das, wenigſtens größtentheils, ſehr leicht zu verſtehen ſeyn wird.

1.) Wird in Trapezien ABCD (Taf. VII. Fig. 6.) der Schwerpunkt aus §. 65. leicht beſtimmt. Denn zieht man die Diagonale BD, und beſtimmt die Schwerpunkte a und b der Dreyecke ABD und BDC, ſo wird der Schwerpunkt des ganzen Trapeziums gefunden, wenn man nach §. 123. **Vorl.** den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt c jener Schwerpunkte ſucht.

2.) Daher wird in **prismatiſchen**, von Trapezien erzeugten **Körpern**, die Linie, in deren Mitte der Schwerpunkt liegt, gefunden, wenn man ſowohl in der obern, als untern Grundfläche einen ſolchen Punkt wie c, oder den Schwerpunkt der Grundfläche ſucht. Durch dieſe Punkte gehe die gerade Linie, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt ſeyn muß.

3.) In **ordentlichen Figuren** fällt der Mittelpunkt des ein- oder umgeſchriebenen Kreiſes mit dem Schwerpunkt zuſammen: wie man leicht ſieht. Denn hat die ordentliche Figur eine gerade Seitenzahl, ſo iſt der Satz klar. Iſt aber die Seitenzahl ungerade: ſo iſt zwar der Beweis etwas verwickelter, doch aber leicht einzuſehen. Denn es ſey ABDGI (Taf. V. Fig. 14.) eine ordentliche Figur, und EFDB der umgeſchriebene Kreis; CE, CF ꝛc. bis an den Umkreis verlängerte Lothe auf die Sehnen; ſo iſt kein Zweifel, daß der Schwerpunkt des Kreiſes in C liegt. Dieſer Kreis enthält aber ſowohl die Dreyecke BCD, DCG ꝛc. worein ſich die ordentliche Figur theilen läßt, als auch die Abſchnitte BDE, DGF ꝛc. Setzet alſo, die

die Schwerpunkte der Abſchnitte wären in den Punkten a, a, und die Schwerpunkte der Dreyecke in den Punkten b, b, und gedenket euch aller Gewichte in dieſen Punkten a und b vereinigt: ſo iſt klar, daß ſämmtliche Gewichte in a, wie auch die in b, vom Mittelpunkt C gleichweit entfernt ſind.

Daher müßen dieſe Gewichte in a und b ihren gemeinſchaftlichen Schwerpunkt im Mittelpunkt C haben. Denn laſſet uns annehmen, ſämmtliche Gewichte in den Punkten a würden um etwas vermindert, ſo wird dieſes nicht hindern, daß das Gleichgewicht am Hebel EC, CF ꝛc. fortdauert: denn alle Momente auf allen Seiten des Punkts C ſind gleichviel vermindert worden. Folglich wird auch eben das Gleichgewicht unter den Körpern in b, b bleiben, wenn die in den Punkten a, a völlig vernichtet ſind; oder welches einerley, die ordentliche Figur wird ihren Schwerpunkt in C haben.

Wollen wir uns der, §. 105. **Vorl.** angewandten Methode bedienen, ſo wird die Sache noch deutlicher. Man fälle von dem Winkel B das Loth BH auf die gegenüber ſtehende Seite IG, (oder ziehe die Diagonale der Figur, wenn die Seitenzahl gerade iſt) und denke ſich die ganze Figur aus Linien beſtehend, die auf BH, IE ꝛc. ſenkrecht ſind; ſo werden offenbar alle dieſe Linien, folglich die ganze Figur, durch den Durchmeſſer BH in zwey gleiche Theile getheilt, daß alſo der Schwerpunkt in ihm befindlich ſeyn muß. Eben das gilt auch von jeder andern ähnlichen Linie, z. B. AF, die auch ein Durchmeſſer der Schwere ſeyn wird. Demnach liegt der Schwerpunkt in dem Punkte, wo dieſe Linien ſich einander durchſchneiden. Die-

ſer

ſer Durchſchnitt geſchieht aber offenbar im Mittelpunkt des ein- oder umgeſchriebenen Kreiſes, da ſowohl BH, als AF Lothe auf die Sehnen IG, GD ſind, und ſelbige halbiren.

Folglich iſt auch der Mittelpunkt des Umfangs der ordentlichen Figur, vom Schwerpunkt der Figur ſelbſt, nicht verſchieden.

4.) Iſt die Figur unordentlich; (Taf. VII. Fig. 7.) ſo können wir die §. 65. vorgetragene Methode hier auch anwenden. Denn die Vielecke werden durch Diagonalen in Dreyecke ABC, BCD, CDE getheilt; deren Schwerpunkte a, b, d ſind. Iſt nun c der gemeinſchaftliche Schwerpunkt der Punkte a und b, und e wieder der gemeinſchaftliche Schwerpunkt in Rückſicht c und d; ſo iſt e der Schwerpunkt der ganzen Figur.

Sind die Grundflächen prismatiſcher Körper ſolche unordentliche Vielecke, ſo befindet ſich ihr Schwerpunkt ebenfalls in der Mitte der Linie, durch die Schwerpunkte der Grundflächen; ſind alſo dieſe Schwerpunkte der Grundflächen beſtimmt, ſo iſt zugleich die Lage von jenem beſtimmt.

§. 81.

Der Schwerpunkt der ganzen Kugel wird ſehr leicht beſtimmt: um ihn aber auch in Abſchnitten derſelben zu finden, welches nützlich und nicht ſelten nöthig iſt, iſt folgendes zu merken.

Es erhellt ſogleich, daß man ſich vorſtellen kann, als wären die Abſchnitte durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe, d. i. um ihren Durchmeſſer entſtanden: denn ihre Grundflächen werden mit dem größten

größten Kreis der Kugel gleichlaufend angenommen. Es ſey alſo BACB (Taf. VII. Fig. 8.) ein Kugelabſchnitt, und EAF ein größter Halbkreis der Kugel, AD der Halbmeſſer, der Durchmeſſer ſelbſt ſey $= a$, $Ad = x$, ſo iſt $ad = \sqrt{(ax - x^2)}$. Auch ſey $1 : p$ das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreis, ſo iſt der Umkreis des Kugelſchnitts $abf = 2p\sqrt{(ax - xx)}$, und ſeine Fläche $= p(ax - xx)$. Das cylindriſche Element entſteht aber aus der Kreisfläche afb in fd, oder in dx, multiplicirt, iſt alſo $= p(ax - xx)\,dx$. Da aber überdies die Schwerpunkte der Elemente in der Axe liegen, ſo iſt eines jeden Moment $= p(ax - xx)\,xdx$, davon die Summe $= p(\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4)$. Aber die Summe der Elemente $= p(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$. Jene durch dieſe dividirt, oder $\frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$ giebt die Entfernung des Schwerpunkts vom Scheitel in jedem unbeſtimmten Abſchnitt, wie BAC. Sezt man aber $x = \frac{1}{2}a$, um die Weite des Schwerpunkts der Halbkugel EACF vom Scheitel zu erhalten, ſo wird $\frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{16})a^2}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})a} = \frac{5}{16}a = Ae$, wenn e der geſuchte Schwerpunkt. Aber $Ae : eD = 5 : 3$, oder der Schwerpunkt der Halbkugel iſt vom Mittelpunkt der Kugel um $\frac{3}{8}$ ihres Halbmeſſers entfernt.

Sezt man $x = a$, ſo erhält man auch den Schwerpunkt der ganzen Kugel, wenn er uns vielleicht unbekannt wäre: denn wir bekommen $\frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$

$$= \frac{(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})a^2}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})a} = \frac{1}{2}a;$$ d. i. der Schwerpunkt der ganzen Kugel fällt mit ihrem Mittelpunkt der Größe zuſammen.

Anmerkung. Dieſes hat Ozanam ſehr ſchön, und zwar nach der ſynthetiſchen Methode erwieſen, die wir hier auch nicht weglaſſen wollen, da wir vorhin gezeigt haben, wie mit Hülfe derſelben der Schwerpunkt der übrigen geometriſchen Körper, im engern Verſtande, beſtimmt wird. Sein Beweis iſt folgender:

Es iſt bekannt, daß die Halbkugel (Taf. VII. Fig. 9.) vom Quadranten AB, ſo wie der Kegel vom Dreyeck BED, und der Cylinder vom Parallelogramm EBAD erzeugt wird. Man ſtelle ſich dieſe Körper vor, wie ſie in der Figur ausgedrückt ſind; es ſey nämlich EDF der Kegel, ABC die Halbkugel, EACF der Cylinder: ſo iſt aus der Geometrie bekannt, daß EDF $= \frac{1}{3}$EACF, wie auch, daß die Kugel ſich zum Cylinder verhält, wie 2 : 3. Demnach iſt der Raum EADCF der Halbkugel gleich. Nun wiſſen wir aber, daß der Schwerpunkt im Kegel in I iſt, ſo daß BI $= \frac{1}{4}$BD, und im Cylinder in der Mitte H, daß BH $= \frac{1}{2}$BD. Hieraus wird nach §. 65. der Schwerpunkt K in der Halbkugel beſtimmt. Denn das Gewicht der Halbkugel verhält ſich wie 2, des Kegels wie 1. Daher HI : HK = 2 : 1, §. 114. **Vorl.** und HK $= \frac{1}{2}$ HI. Aber HI = BH — BI $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, folglich HK $= \frac{1}{8}$, und BK $= \frac{5}{8}$. Daher BK : KD = 5 : 3. (**V.**)

§. 82.

Fig. 10. Taf. VII. ſey der Durchſchnitt einer elliptiſchen Afterkugel, der Abſciſſen Anfang im Scheitel der Ellipſe A, die Axe = a, Parameter = b, Abſciſſe Ad = x, Ordinate Ed = y; ſo iſt die Gleichung, wodurch die Ellipſe ausgedrückt wird, $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, wie aus der höhern Geometrie bekannt. Nun beſchreibe bey Herumdrehung der Ellipſe der Halbmeſſer cd den Kreis fcgE, ſo iſt die Fläche deſſelben, wenn 1 : p das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreis, $= y^2 p = p.\left(bx - \frac{bxx}{a}\right)$: ſo wie das cylindriſche Ellipſenelement eqEf. df (wenn fd = dx) $= p\left(bx - \frac{bxx}{a}\right) dx$; dahingegen das ganze Moment $= p\left(bx - \frac{bxx}{a}\right) xdx$, deſſen Integral ſich ſogleich darſtellt $= p\left(\frac{1}{3}bx^3 - \frac{bx^4}{4a}\right) = A$. Die Summe aber der Elemente iſt S. p $\left(bx - \frac{bx^2}{a}\right) dx = p\left(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}.\frac{bx^3}{a}\right) = B$. Da-

her A durch B dividirt, erhalten wir $\dfrac{\frac{1}{3}x - \dfrac{x^2}{4a}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{a}} = \dfrac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, eben ſo wie bey der Kugel. Hieraus ſchlieſen wir: der Schwerpunkt der, der elliptiſchen Afterkugel von gleicher Axe umgeſchriebenen Kugel AaB, fällt mit dem Schwerpunkt der Afterkugel ſelbſt zuſammen. Auch haben beyder Abſchnitte einerley Schwerpunkt.

Eben dies gilt auch vom Schwerpunkt des Kreiſes und der Ellipſe von gleicher Axe. Denn die ganze Ellipſe und der ganze Kreis, wie auch Stücke jener und dieſes, haben einerley Schwerpunkt.

§. 83.

Ehe wir dieſe Abhandlung vom Schwerpunkt ſchlieſen, wollen wir folgendes bemerken: es iſt einerley, ob wir die ſchweren Elemente, worein wir den ganzen Körper in Gedanken theilen, einzeln in die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der wagerechten Ebene, worauf ſie bezogen werden, multipliciren: oder ob wir das Gewicht aller zuſammengenommenen, d. i. das Gewicht des ganzen Körpers, in die Entfernung ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunkts von dieſer Ebene multipliciren: in beyden Fällen entſteht einerley Produkt.

Die Schwerpunkte der einzelnen Elemente ſtellen die Buchſtaben a, b, i, k, l, (Taf. VI. Fig. 7.) vor, die zugleich die in dieſen Punkten vereinigten Gewichte der Elemente andeuten: ab ſey die Linie durch zwey derſelben a und b; beyder gemeinſchaftlicher Schwerpunkt f wird gefunden, wenn man af : fb = b : a macht. §. 123. Vorl. Ferner ziehe man vom Punkt f ein Loth auf die wagerechte Ebene ABCD, daß fe mit da und bc gleichlaufend; und von den Punkten a und b fälle man die Lothe ag und bh auf die Linie efg; dies vorausgeſezt ſind die Dreyecke afg und hbf ähnlich; und da a. af = b. bf, ſo iſt auch a. fg = b. hf, oder a (ad—fe) = b (fe—bc), oder a. ad + b. bc = a. fe + b. fe = (a + b) fe.

Da ſich auch f mit i eben ſo vergleichen, und eben der Schluß wiederholen läßt; dann wieder ihr gemeinſchaftlicher Schwerpunkt ſich mit k verknüpfen läßt u. ſ. w. ſo ſchlieſen wir, daß das ganze Gewicht in die Entfernung ſeines Schwerpunkts von der Ebene multiplicirt, eben das Moment ausmacht, das aus der Summe der Produkte aller Elemente des Körpers, einzeln in die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von eben der wagerechten Ebene multiplicirt, entſteht.

Siebente Vorleſung.

Fortſetzung von den Pendeln.

Inhalt.

§. 132. Wird vermittelſt der Pendeln erwieſen, daß ein ruhender Körper in einer Sekunde durch $15\frac{1}{12}$ Pariſer Fuß fällt, welches auch §. 133. durch Verſuch beſtätigt wird. §. 134. Die Längen der Pendeln verhalten ſich wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Daher §. 135. 136. aus den Zeiten die Längen und umgekehrt, aus dieſen jene zu finden. §. 137 — 139. Aus der Anzahl der Schwingungen in gegebener Zeit die Länge des Sekundenpendels zu finden. §. 140—145. Nutzen der Pendeln, vorzüglich bey Uhren; aus der Länge des Sekundenpendels ein allgemeines unveränderliches Längenmaas zu verfertigen.

§. 132.

Nachdem wir das nöthige vom Schwerpunkt aus einander geſezt haben, laßt uns zu den ſchwingenden Körpern oder den Pendeln zurückkehren. Zuerſt wollen wir zeigen, wie nützlich die Kenntnis der Pendeln, woraus zugleich einleuchtend ſeyn wird, daß wir die ſchwerern Rechnungen und die höhere Geometrie nicht entbehren können, wenn wir in der Kenntnis der Natur der Körper weit fortſchreiten wollen. Der Nutzen der Pendeln erhellt am meiſten bey Anſtellung des Verſuchs, der uns zur Grundlage dient, worauf ſich der ganze Kalkul in der

der Mechanik ſtüzt, und wodurch der Raum beſtimmt wird, den ein in der Vertikallinie freyfallender, von der natürlichen Schwere gereizter Körper in gegebener Zeit zurücklegt. Denn dieſes muß einmal auſer Zweifel geſezt werden, damit man nicht öfter das nämliche ſuchen darf. Dieſer Raum wird gefunden, wenn wir aus dem Verſuch die Länge des Pendels beſtimmen, das in gegebener Zeit ſeinen Schwung zurücklegt. Dieſe Länge iſt bereits gefunden. Wir wiſſen aus der Erfahrung, daß **das Sekundenpendel 3 Fuß $8\frac{1}{2}$ Linien Pariſ. lang iſt.** *) Da nun überdies (§. 97. 2te **Vorl.** §. 43. 3. Zuſatz) die Schwingungszeit durch den Bogen, wenn er kleiner als 15°, ſich verhält zur Zeit des freyen Falles durch die halbe Pendellänge, wie der Umkreis zum Durchmeſſer; ſo ſchlieſen wir daraus leicht die Zeit, worinn ein freyfallender Körper die halbe Länge des Sekundenpendels, oder $220\frac{1}{4}$ Linien zurücklegt. Denn $314 : 100 = 1''$: Zeit durch $220\frac{1}{4}$ Linien $= \frac{100}{314}''$. Iſt aber bekannt, daß in der Zeit $\frac{100}{314}''$ ein Raum von $\frac{881}{4}$ Lin. zurückgelegt wird, ſo wird auch der Raum, der in der Vertikallinie in einer Sekunde zurückgelegt wird, leicht gefunden. Denn die Räume verhalten ſich wie die Quadrate der Zeiten. §. 48. Daher, wenn x der geſuchte Raum, $\frac{881}{4} : x = \frac{10000}{98596}'' : 1''$, daraus wird $x = \frac{86863076}{40000}'''$ $= 2171\frac{23067}{40000}$. Sezt man für dieſen Bruch 1, ſo

 wird

*) Dies fand **Mairan**, der vielen Fleis hierbey anwand. S. Memoires de l'Académie des Sciences, An. 1735. Er ſezt die Länge des Pendels $440\frac{17}{30}'''$, wofür man insgemein $440\frac{1}{2}'''$ annimmt.

wird $x = 2172'''$ *) dieſe Zahl durch 144 dividirt, giebt $15\frac{12}{144} = 15\frac{1}{12}$ Par. Fuß; und dies iſt die vertikale Höhe, die ein Körper in einer Sekunde im freyen Fall zurücklegt.

§. 133.

Es erhellt alſo, daß ſich mit Hülfe der Pendeln dasjenige bewerkſtelligen läßt, was durch Erfahrung ſehr ſchwer ins Werk zu richten iſt, wie aus mehrern Verſuchen am Tage liegt, wo die angeſtellten Beobachtungen niemals genau mit einander übereinſtimmend gefunden wurden; theils weil die der Bewegung fallender Körper widerſtehende Luft ſelbige hindert, und die Geſchwindigkeit ſehr vermindert; theils auch wegen der Schwierigkeit, den Punkt, worinn ſich der Körper am Ende ſeines Falls wirklich befindet, genau zu bemerken; wo ſehr leicht Fehler begangen werden, vorzüglich wenn die Sache nur durch einen einzigen Verſuch ausgemacht werden ſoll. Unter allen iſt wohl der von Huygens entdeckte und angewandte Verſuch der beſte und einzige, wodurch ſich etwas zuverläßiges herausbringen läßt. Er iſt folgender: Ein ſchwarzgefärbtes Pendel hängt an einem Stift in wagerechter Lage; ihm gegenüber iſt ein Nagel dergeſtalt befeſtigt, daß ihn das ruhende Pendel berührt, und in die Höhe gehoben, genau eine halbe Schwingung vollendet, ehe es an ihn ſtoſſen kann. Iſt nun das Pendel erhoben, ſo laſſe man in dem Augenblick, da man es fallen läßt, zugleich einen

*) Vergl. Huygens Horol. oſcillator. pr. IV. p. 28. Dieſer große Schriftſteller erwies zuerſt die Eigenſchaften der Radlinien und Pendeln ſynthetiſch, davon wir oben zur Genüge geſagt. (V.)

einen ſchweren Körper fallen, wovon ein länglicher Streifen Pappier befeſtigt iſt; ſo wird das Pendel an dieſen, von dem fallenden Körper nach ſich gezogenen Streifen ſtoßen: und der Punkt des Streifens, wo das Pendel anſtößt, wird die Höhe andeuten, wodurch der Körper in eben der Zeit fällt, worinn das Pendel ſeinen halben Schwung zurücklegt: welche Zeit man nach Gefallen annehmen kann, ſo daß ſie ein beliebiger Theil einer Sekunde iſt. **Huygens** verſichert, daß er dieſen Verſuch öfters wiederholt, und allemal eben dieſelbe **Fallhöhe** $15\frac{1}{12}$ **Par. Fuß in einer Sekunde** gefunden habe.

§. 134.

Die Länge eines jeden Pendels wird gefunden, wenn die Länge eines andern Pendels und die Zeit, wenn es ſeinen Schwung zurücklegt, bekannt iſt. Hier ſchlieſen wir folgendergeſtalt, wovon die Erklärung, ihres anderweitigen vielfältigen Nutzens wegen, nicht unangenehm ſeyn wird. Zuerſt wird gezeigt, daß **die Längen verſchiedener Pendeln ſich verhalten, wie die Quadrate der Schwingungszeiten**; ſie mögen in kleinen, oder ähnlichen Bogen ſchwingen. In beyden Fällen iſt die Sache klar: dieſes wird aus §. 81. 4. **Vorl.** jenes aber folgendergeſtalt erwieſen. Es ſeyn AB und ab (Taf. VII. Fig. 11.) zwey Pendeln; CDB und cdb zwey kleine Bogen, wodurch die Pendeln ſchwingen; ſo verhält ſich die Zeit durch CDB zur Zeit durch $\frac{1}{2}$AB, wie der Umkreis zum Durchmeſſer. §. 97. 2. **Vorl.** Eben ſo verhält ſich die Zeit durch cdb zur Zeit durch $\frac{1}{2}$ab, wie der Umkreis zum Durchmeſſer. Daher die Zeit durch CDB zur Zeit durch cdb, wie

$\sqrt{\frac{1}{2}AB} : \sqrt{\frac{1}{2}ab}$. §. 48. Jene Zeit heiſe T, dieſe t, ſo wird $T : t = \sqrt{\frac{1}{2}AB} : \sqrt{\frac{1}{2}ab}$, daher $T^2 : t^2 = \frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = AB : ab$.

Ein Pendel alſo, das in doppelter Zeit ſchwingt, hat eine vierfache Länge, und das in der halben Zeit ſeinen Schwung zurücklegt, hat eine Länge, die der vierte Theil der Länge des in der ganzen Zeit ſchwingenden iſt.

§. 135.

Hieraus erhellt auch, wie aus der gegebenen Länge und Schwingungszeit eines Pendels, die Länge eines andern, in gegebener Zeit durch kleine Bogen ſchwingenden Pendels gefunden wird. Es ſey die gegebene Länge des Pendels l, ſeine Schwingungszeit t, die geſuchte Länge x, u. die Schwingungszeit dieſes Pendels T, ſo iſt $t^2 : T^2 = l : x$, u. $x = \frac{l.T^2}{t^2}$. Iſt z. B. die Länge des Sekundenpendels 3 Fuß $8\frac{1}{2}$ Linie; man ſucht die Länge des $\frac{1}{3}''$ ſchlagenden Pendels, ſo findet man dieſe $x = \frac{lT^2}{t^2} = \frac{881}{18}''' = 48\frac{17}{18}'''$.

§. 136.

Eben ſo begreift man, wie aus der gegebenen Länge beyder Pendeln l und x, und der Schwungszeit des einen T, die Schwungszeit des andern beſtimmt wird. Denn x =

$\frac{lT^2}{t^2}$, wo t die geſuchte Zeit andeutet. Daher t $= T . \sqrt{\frac{l}{x}}$. Da alſo ein Pendel von 3 Fuß $8\frac{1}{2}$ Lin. Länge 1 Sekunde ſchlägt, ſo findet man die Zeit des Pendels, deſſen Länge $48\frac{17}{18}'''$, $= T . \sqrt{\frac{l}{x}} = \sqrt{\frac{881}{18}} : \sqrt{\frac{881}{2}} = \frac{1}{3}''$.

§. 137.

Da die Anzahl der Schwünge, die ein Pendel in einer gewiſſen Zeit zurücklegt, ſich weit leichter beobachten läßt, als ein Theil der Zeit, worinn ein einziger Schwung vollendet wird; ſo iſt auch zu merken, daß die Anzahl der gleichzeitigen Schwünge zweyer Pendeln, die durch einen Bogen unter 15° alle ihre Schwünge beſtändig in gleichen Zeiten zurücklegen, ſich umgekehrt verhält, wie die Zeiten der einzelnen Schwünge. Dies iſt klar. Denn da das eine zwey Schwünge in eben der Zeit vollendet, worinn das andere einen einzigen zurücklegt, ſo verhalten ſich die Zeiten der einzelnen Schwünge, wie $\frac{1}{2}$: 1. ꝛc.

§. 138.

Man nenne alſo die Zahlen der Schwünge zweyer durch kleine Bogen ſchwingenden Pendeln, N und n, und die Zeiten der einzelnen Schwünge T und t, (T bezieht ſich nämlich auf N, ſo wie t auf n,) ſo iſt N : n = t : T. §. 137. Heiſen die Längen der Pendeln L

und l, (wo L zu N, und l zu n gehört,) ſo iſt $t : T = \sqrt{l} : \sqrt{L}$. §. 134. folglich $N^2 : n^2 = l : L$, d. i.

Die Längen der Pendeln verhalten ſich umgekehrt, wie die Quadratzahlen der von dieſen Pendeln in gleicher Zeit vollbrachten Schwünge.

§. 139.

Daher wird auch aus der gegebenen Anzahl der Schwünge, die ein Pendel von bekannter Länge in einer gewiſſen Zeit zurücklegt, und der zugleich gegebenen Anzahl der von einem andern Pendel in gleicher Zeit vollbrachten Schwünge, die Länge des leztern gefunden.

Da z. B. bekannt iſt, daß die Länge des Sekundenpendels $\frac{881}{2}$ Lin. iſt, ſo findet man die Länge eines andern in eben der Zeit 10mal ſchwingenden Pendels. Denn $100 : 1 = \frac{881}{2}$ Lin. zur geſuchten Länge.

Nun begreift man, wie durch Verſuch die Länge des Sekundenpendels ſich am beſten beſtimmen läßt. Es ſey die bekannte Länge eines Pendels L; man beobachte ſeine durch kleine Bogen in einer gewiſſen Zeit zurückgelegten Schwünge; je länger dieſe Zeit angenommen wird, deſto genauer giebt ſie das geſuchte, ſie ſey z. B. eine Stunde. Die Anzahl dieſer Schwünge ſey n, ſo vollendet das Pendel von der Länge L in einer Sekunde $\frac{n}{3600}$ Schwünge. Hieraus findet man leicht die Länge x des Sekundenpendels. Denn

L : x

$$L : x = \frac{3600^2}{n^2} : 1.\ \text{§. 138. Daher } x = \frac{Ln^2}{3600^2}.$$

§. 140.

Dieſe Eigenſchaft der Pendeln dient auch zu Beſtimmung der Höhe eines Orts, wovon ein Körper herabhängt, z. B. der Gewölber in Kirchen, woran Kronleuchter und andere Körper hängen. Man darf nur dieſe Körper in Bewegung ſetzen, und die Schwünge zählen, die ſie in einer gewiſſen Zeit, z. B. einer Minute, zurücklegen; ſo findet man nach §. 139. die Höhe. Ein ſolcher Körper ſchwinge z. B. 30 mal in 1 Minute, man ſoll ſeine Höhe, d. i. die Länge des in dieſer Zeit ſo vielmal ſchwingenden einfachen Pendels beſtimmen. Denn daß ſich dergleichen Körper auf ſolche einfache Pendeln bringen laſſen, werden wir unten mit mehrerm darthun.

Man nimmt an, die Anzahl der Schwünge in 1 Minute ſey 30; und daher in 1 Sekunde $\frac{1}{2}$. Da nun die Länge des Sekundenpendels $= \frac{881'''}{2}$, ſo iſt nach §. 138. $\frac{1}{4} : 1 = \frac{881'''}{2}$: geſuchte Länge des einfachen Pendels 1762''', oder 12', 2'', 10'''.

§. 141.

Der größte Nutzen der Pendeln zeigt ſich bey den Uhren; da, mit Hülfe derſelben, die Bewegung gleichförmig gemacht wird, wodurch ſich die Uhren ſo vervollkommnen laſſen, daß ſie uns die Zeit aufs richtigſte anzeigen. Denn wirken die Kräfte, die die Uhren in Bewegung ſetzen, ungleichförmig, ſo bewegt ſich auch das Pendel bald ſtark, bald ſchwach: weil aber dieſe Bewegungen der Pendeln

alle in gleicher Zeit zurückgelegt werden, wie §. 97. geſagt worden; ſo wird die Bewegung und der Umlauf der Räder vom Pendel bald verzögert, bald beſchleunigt. Nichts dient alſo mehr zur Vervollkommnung der Uhren, und daher zur Meſſung der Zeit, als die Pendeln, wenn man nur in Acht nimmt, daß ihre Schwingungsbogen die oben beſtimmte Größe von 15° nicht überſteigen. Auch iſt zu merken, daß die Kreisbogen in der Ausübung eben ſo viel leiſten, als die Cykloidenbogen in der Theorie; denn jene ſind, wie wir oben gezeigt haben, den Abweichungen weniger unterworfen, und bequemer zu brauchen. Man macht die Pendeln linſenförmig, damit ihre Bewegung von der Luft deſto weniger gehindert wird.

§. 142.

Die Längen der Pendeln verhalten ſich wie die Quadrate der Zeiten, weil die Zeiten ſich verhalten wie die Quadratwurzeln der Längen; §. 134. dieſe Längen ſind vom Aufhängepunkt bis an den Schwerpunkt des am Ende des Fadens hängenden Körpers, der hier ſehr klein angenommen wird, zu rechnen. Hieraus folgt, daß die Schwungszeit des längern Pendels größer, des kürzern kleiner ſeyn muß. Man mag daher den Pendelfaden durch Erhöhung oder Erniedrigung des ſchweren Körpers am Ende deſſelben um noch ſo wenig verkürzen oder verlängern, ſo muß die Bewegung der Uhr nothwendig zugleich eine Veränderung leiden. Daher läßt ſich die Uhr richtig ſtellen und in Ordnung bringen, wenn der am Ende des Perpendikels hängende Körper

per bey zu langſamer Bewegung entweder erhöhet, oder bey zu ſchneller erniedrigt wird.

§. 143.

Dies iſt um ſo nothwendiger, da das Perpendikel, ſo wie die übrigen Theile der Uhr, von der Witterung mancherley Veränderungen leidet. Denn der Faden wird bey feuchter Luft kürzer, bey trockner länger; auch das Metall dehnt ſich bey der Wärme aus, und zieht ſich bey der Kälte zuſammen; wie das ſogenannte Pyrometer lehrt, wodurch die von Kälte und Wärme entſpringenden Veränderungen der Metalle beſtimmt werden: das uns aber, da es in die Naturlehre gehört, hier nicht länger aufhalten wird. Daß dieſe Aenderung der Länge bey langen Pendeln $\frac{1}{40}$ eines Zolls austragen kann, bezeugt Desagüliers in Præl. Phyſic. §. 75.

§. 144.

Aber der Nutzen der Pendeln erſtreckt ſich noch weiter. Sie geben ein allgemeines unveränderliches Längenmaas ab, welches die Bequemlichkeit hat, daß es ſich, ſo lange die Schwere ſelbſt an einem Ort der Erde wie jezt bleibt, bey der Nachwelt erhält. So lange ſich dieſe nicht ändert, oder nicht ſonſt ſehr große Veränderungen vorgehen, ſo lange wird auch die Länge des Sekundenpendels, oder ein Theil deſſelben, z. B. der dritte, deſſen ſich Huygens bediente, und der von dem jezt üblichen Däniſchen Fuß nur wenig abweicht, einerley bleiben. Dieſes natürliche Maas iſt dem willkührlichen weit vorzuziehen. Man nehme an, daß die Alten einen Grad des Mittagskreiſes, den man, wie bekannt, in unſerm

ſerm Jahrhundert mit großer Mühe und Koſten ausgemeſſen hat, in ihren Ruthen, Fußen u. ſ. w. aufs genaueſte beſtimmt haben; ſo können wir doch die Länge dieſes Grads heut zu Tage weder erkennen, noch auch wegen ihrem durch die Länge der Zeit verlohren gegangenen Maaſe erforſchen. Dieſer Unbequemlichkeit kommen wir zuvor, wenn wir jenes natürliche Maas einführen, und ſtatt unſers Fußes den dritten Theil der Länge des Sekundenpendels annehmen. In der That wäre zu wünſchen, daß dieſes Maas öffentlich beſtätigt würde: *) daraus würde die Nachwelt erkennen, was für ein Maas an allen Orten die Menſchen gebraucht hätten, und zugleich zuwege gebracht, daß unſere heut zu Tage auf die Ausmeſſung dieſer oder jener Körper verwendete Mühe auch den folgenden Zeiten zu gut käme. Mit was für Sorgfalt ſuchten nicht ſchon die Alten, den Nachkommen ſichere und feſte Maaſe zu hinterlaſſen. **) Zum Beyſpiel dienen die Araber: dieſe ſezten eine Palme aus 24 Gerſtenkörnern zuſammen, und beſtimmt-

*) Ob mehrere Vortheile daraus entſtehen würden, wenn in der ganzrn Welt überall einerley Maas, Münze und Sprache wäre, als aus der gegenwärtigen Einrichtung der Dinge, zweifle ich, und überlaſſe es andern zu beurtheilen. Das aber, warum der Herr Verfaſſer, nebſt andern, ein allgemeines Maas wünſcht, wird erhalten, wenn man eine genaue Vergleichung dieſes natürlichen Fußes, oder des dritten Theils des Sekundenpendels, mit andern gemeinen Maaſen, z. B. mit dem Pariſer Fuß, anſtellt; iſt das Verhältnis deſſelben zum allgemeinen Fuß bekannt, ſo iſt auch zugleich ſein Verhältnis zu den übrigen üblichen Maaſen bekannt. (T.)

**) S. Snellius Eratosth. Batav. Lib. I. Cap. 20.

ſtimmten die Dicke dieſer Körner durch 6 aus dem Schwanz gezogene und zunächſt an einander gelegte Pferdehaare. Doch iſt es ſchwer zu ſagen, ob die arabiſchen Pferdehaare alle von einer Dicke waren oder nicht; und ob ſie mit den unſrigen gleiche Durchmeſſer hatten: ſo erſcheint, daß auch dieſes Maas unſicher war.

§. 145.

Doch iſt zugleich zu merken, daß man die Breite des Orts, wo die Länge des Sekundenpendels genommen wird, in Betracht ziehen, und ſelbige genau beſtimmen muß. **Denn die Erfahrung lehrt, daß die Länge dieſes Pendels nicht in der ganzen Welt einerley iſt.** Sie iſt beträchlich kleiner in Gegenden unter und zunächſt beym Aequator: nahe am Pol aber größer. Hieraus folgt, daß **die Schwere nicht auf der ganzen Oberfläche der Erde gleichgros iſt;** denn auſer der Verminderung der Schwere in den Gegenden nahe beym Aequator, iſt keine Urſache hiervon vorhanden. Wie dieſes geſchloſſen wird, ſieht man leicht. Denn die beſchleunigende Kraft, die das Pendel in Bewegung ſezt, entſpringt von der Schwere, und iſt das Gewicht des am Pendelſaden hängenden Körpers, folglich unſere überall wirkende natürliche Schwere. Geht daher das Pendel, wenn das übrige einerley bleibt, langſamer: ſo muß die bewegende Kraft des Perpendikels, die die Schwere ſelbſt iſt, nothwendig zugleich vermindert ſeyn. Denn es iſt auſer allen Zweifel, daß, wenn die Wirkung kleiner worden, die ungehinderte freywirkende Urſache alsdenn zugleich vermindert

mindert ſeyn muß. Eine ausführliche Erklärung hiervon werden wir in der nächſtfolgenden Vorleſung geben.

Achte Vorleſung.

Von der Veränderung der natürlichen Schwere in verſchiedenen Erdgegenden, und vom Schwingungspunkt zuſammengeſezter Pendeln.

Inhalt.

§. 146. 147. Die Schwere iſt nicht in der ganzen Welt einerley. Erfahrung hiervon, vermittelſt der Pendeln. §. 148. Die Schwere des Körpers iſt der Materie proportional. §. 149 — 151. Die Veränderung der natürlichen Schwere aus der verſchiedenen Länge des Pendels zu ſchlieſen. §. 152 — 154. Schwingungspunkt zuſammengeſezter Pendeln. §. 155. Wie mit einander verknüpfte Maſſen in einen einzigen Punkt übergetragen, ſich denken laſſen. §. 156 — 158. Allgemeine Regeln für den Schwingungspunkt. §. 159. — 161. Beſtimmung des Schwingungspunkts in, ſowohl nach den Seiten, als nach der Grundlinie, bewegten Figuren, wie auch in Körpern. Die wichtigſten und nüzlichſten Beyſpiele hiervon.

---

§. 146.

Zu Ende der vorigen Vorleſung ſagten wir, daß die Schwere auf der ganzen Erdfläche nicht überall einerley iſt, ſondern kleiner unter dem Aequator, größer

größer unter den Polen. Es iſt aber wohl zu merken, daß die Verſchiedenheit, wovon wir hier reden, in der beſchleunigenden Kraft der natürlichen Schwere ſelbſt liegt, und dieſe in den verſchiedenen Erdgegenden ſich ändert, von welcher Verſchiedenheit die Verſchiedenheit der Gewichte in den Körpern abhängt.

§. 147.

Ehedem war es eine allgemeine Meynung, die Schwere wäre auf der ganzen Erdfläche überall einerley, und folglich hätten einerley Körper überall einerley Gewicht: in dieſem Irrthum würden wir uns noch heutiges Tages befinden, wenn nicht die Geometrie die Eigenſchaften der Pendeln ins Licht geſezt hätte. Zufälligerweiſe wäre dieſes bereits geſchehen, da der große Halley auf ſeiner Reiſe nach der St. Heleneninſel bemerkte, daß das Pendel in Gegenden nahe beym Aequator verkürzt werden müſſe: um wie viel aber, nicht angab. Im Jahr 1679. aber bemerkte Richer, ein Franzoſe, auf ſeiner Reiſe nach der 5° vom Aequator entfernten Inſel Cayenne, daß eine Perpendikeluhr, die zu Paris ſehr richtig geſchlagen hatte, zu Cayenne immer zu langſam gieng, und da die Länge des Pendels 3′, 0″ $8\frac{3}{5}$‴ war, ſelbiges um $1\frac{1}{4}$‴ verkürzt werden müſſe, wenn es zu Cayenne eben die Schläge, wie zu Paris, thun ſollte. Die Urſache dieſes Unterſchieds glaubten die meiſten im größern Grad der Wärme zu finden; dieſer Grund war aber bey weitem nicht hinreichend. Dieſe merkwürdige Beobachtung munterte die Europäiſchen Geometer auf, die Sache zu unterſuchen: ſie fanden, daß ſich die Schwere än-

dere, und unter dem Aequator ſchwächer, ſtärker unter den Polen ſey: hieraus ſchloſſen ſie ferner, die Erde müſſe eine längliche, nicht kugelrunde Geſtalt haben; wie dieſes daraus folgt, werden wir an ſeinem Orte ſehen. Daß ſich dieſes leztere wirklich ſo befindet, iſt durch **Ludwigs des Funfzehnten, Königs von Frankreich**, Freygebigkeit auſſer allen Zweifel geſezt worden; da dies ſo genau mit dem, was die Gelehrten aus der Natur der Pendeln geſchloſſen hatten, übereinſtimmt, ſo war durch Erfahrung der erſtere Schluß beſtätigt und ausgemacht, daß unter dem Aequator die Schwere ſchwächer, näher den Polen ſtärker ſey. Dergleichen Beobachtungen wurden in der Folge mehr angeſtellt, wovon die neueſte, in der zunächſt am Aequator gelegenen Stadt **Quito**, deren ſüdliche Breite nur 0°, 25′, lehrt, daß die Länge des Sekundenpendels daſelbſt, nach **Bouguer**, $438\frac{82}{100}$ Linien, oder $438\frac{84}{100}$ Linien, nach Hrn. **Condamine**. Zu **Pello** aber, dem äuſerſten Ort gegen Norden, deſſen Breite, nach der Rechnung des Herrn **von Maupertuis**, 66°, 47′, war die Länge des Pendels $441\frac{17}{100}$ Linien, beträchtlich verſchieden von der Länge zu **Quito**. Alles hieher gehörige aber läßt ſich gegenwärtig nicht vortragen, da wir die hierzu nöthigen Gründe noch nicht erklärt haben.

§. 148.

Ein neuer Schluß wird aus dieſen Beobachtungen über die Pendeln gezogen, wodurch von neuem erwieſen wird, **daß die Schwere überall der Ma-**

terie

terie proportional iſt, *) welches, wie wir oben bereits geſagt haben, eine Hauptwahrheit in dieſer Wiſſenſchaft iſt. §. 35. Wirkte die Schwere nicht nach der Menge der Theilchen, ſondern nach der äuſſern Oberfläche in die Materie, ſo würden gleichlange Pendeln in ungleichen Zeiten ſchwingen, wenn die ſchweren Körper, wodurch ſie in Schwung gebracht werden, ungleich groß ſind; denn dieſe Körper verurſachen die Bewegung der Pendeln: auch müßte dieſer Unterſchied, wär er gleich noch ſo geringe, merklich ſeyn, wenn die Zahl der Schwingungen zunähme. Aber die mit Pendeln angeſtellten Verſuche lehren alle durchgängig das Gegentheil. Man weiß aus Erfahrung, daß alle Schwingungen in gleicher Zeit geſchehen, man mag das am Ende des Pendels hängende Gewicht vermehren, oder vermindern, wofern nur die Länge des Pendels einerley bleibt, und ſich nicht zugleich ändert. Eben dies erfolgt auch, wenn gleich die am Pendelfaden hängenden gleichwichtigen Körper von verſchiedener Materie, und ihre Oberflächen ungleich ſind.

§. 149.

Daß man bey verminderter Schwungkraft die Pendeln kürzer machen muß, begreifen wir; nun iſt noch übrig, die Größe dieſer Verminderung zu ſuchen. Anderswo *) erweiſen wir, daß die Längen der Pendeln, wenn ſie von verſchiedenen Kräften

*) Wie dieſes aus der Lehre von den Pendeln folgt, wird mit mehrerm im nächſtfolgenden Zuſatz §. 87. ausgeführt.

*) Im folgenden Zuſatz.

in Schwung gebracht werden, und in gleicher Zeit ihre Schwingungen vollenden, ſich verhalten wie dieſe Kräfte. Hieraus ſieht man, daß an der Pendellänge ſo viel abgeht, als die Kraft kleiner iſt, und aus der Veränderung der Länge des in gleicher Zeit ſchwingenden Pendels die Veränderung der Schwere an jedem Ort der Erde ſich ſchlieſen läßt. §. 147.

§. 150.

Auch iſt erwieſen, daß ungleiche **Pendelkräfte ſich** gerade **verhalten**, wie die Längen, und **verkehrt, wie die Quadrate der Zeiten**; hieraus begreift man, was wir §. 145. nur beyläufig bewieſen.

§. 151.

Hieraus ſehen wir, wie ſich die Schwingungen der Pendeln zu den Kräften der Schwere verhalten, von welchen die Pendeln in Schwung gebracht werden. Es ſey die antreibende Kraft g, die Schwingungszeit t, die Länge des Pendels L, ſo iſt nach

§. 150. $t = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}$, und bey gleicher Pendellänge,

$t = \frac{1}{\sqrt{g}}$, oder, die Zeit ſteht in verkehrten Verhältnis der Quadratwurzel der antreibenden Kraft. Je kleiner alſo dieſe Kraft, deſto größer iſt die Schwingungszeit. Denn verhalten ſich die Kräfte, wie 1 zu $\frac{1}{4}$, ſo verhalten ſich die Zeiten, wie 1 zu 2; d. i.

*) Ebendaſelbſt.

d. i. der Schwung erfordert doppelt ſo viel Zeit, wenn die Kraft $\frac{1}{4}$ der andern iſt.

Umgekehrt: ſind die Schwungszeiten größer, ſo ſind die Kräfte kleiner. Denn $t = \frac{1}{\sqrt{g}}$, und wenn t wächſt, ſo muß auch nothwendig der Nenner des Bruchs $\frac{1}{\sqrt{g}}$ kleiner werden. Hieraus folgt ferner

1.) aus dem Unterſchiede der Schwingungszeiten läßt ſich die Verſchiedenheit der Schwere an verſchiedenen Orten der Erde ſchlieſen.

2.) Das Pendel muß kürzer ſeyn, wo die Schwere ſchwächer, und länger, wo ſie ſtärker iſt.

§. 152.

In der folgenden Vorleſung, wo wir von den ſogenannten Centralkräften handeln, werden wir die Urſache dieſer Veränderung der natürlichen Schwere in den verſchiedenen Erdgegenden einſehen. Laßt uns hier etwas anders hinzufügen. Es liegt ſehr viel daran, daß die Bewegung der Pendeln gleichförmig iſt, daher muß man die größte Sorgfalt anwenden, um die Pendeln in dieſen gleichförmigen Schwung zu bringen. Widrigenfalls lieſen ſich die Verſuche nicht mit der nöthigen Genauigkeit anſtellen. Dies erhielte man leicht, wenn ſich die Sache ſo verhielte, wie wir bisher annahmen, daß nämlich der Pendelfaden, an deſſen Ende ein Gewicht befeſtigt iſt, ohne alle Schwere und unbiegſam; und der ſchwere Körper, wodurch das Pendel getrieben wird, ein Punkt

wäre, worinn das ganze Gewicht des Körpers vereinigt iſt. Beydes aber, das wir nur zu leichterer Vorſtellung der Sache annahmen, findet nie ſtatt, läßt ſich alſo nur annehmen, wenn das Gewicht des Pendels ſehr klein iſt. Daher müſſen wir die Pendeln ſo betrachten, wie die ſind, deren wir uns bedienen, die aus ſchwerer Materie beſtehen, deren einzelne Theile in den verſchiedenen Punkten des Pendels, auch verſchiedentlich und mit verſchiedener Bewegung von der Kraft der Schwere in Schwung gebracht werden.

§. 153.

Damit wir nach und nach zur völligen Kenntnis dieſer Sache gelangen, wollen wir zuerſt ein ſehr einfaches Beyſpiel betrachten, wo der Faden, der das Pendel ſelbſt ausmacht, AB (Taf. VII. Fig. 12.) ohne Schwere, unbiegſam, und hier und da mit Gewichten, z. B. in t, E und B, beſchwert, angenommen wird. Dieſes vorausgeſezt, ſoll die Länge des Pendels gefunden werden, an deſſen Ende dieſe Körper, in einem Schwerpunkt vereinigt, aufgehängt, das Pendel in eben der Zeit ſeine Schwünge vollendet, als der Faden AB mit ſeinen Gewichten.

Ein ſolches Pendel, wie der mit mehrern Körpern beſchwerte Faden, nennen wir ein zuſammengeſeztes: das andere hingegen ein **einfaches.** Aus der Länge des erſtern iſt die Länge des leztern zu beurtheilen.

Der Punkt L, ſo die Länge des einfachen Pendels AL beſtimmt, heißt der **Schwingungspunkt des einfachen Pendels.** Der Punkt A hingegen, worinn

worinn das Pendel aufgehängt iſt, der Aufhängepunkt.

§. 154.

Hier iſt zu merken, daß der ganze Faden AB mit ſeinen Körpern von der natürlichen Schwere dergeſtalt bewegt wird, daß alle Punkte t, E, B zu gleicher Zeit ähnliche Bogen beſchrieben: denn der Faden wird mit allen ſeinen Punkten aus der Lage AB in die Lage AD gebracht. Daher verhalten ſich auch die Kräfte, womit ſich dieſe Punkte bewegen, wie die gleichzeitigen Effekte, d. i. wie tC, EG, BD, oder wie die Entfernungen vom Aufhängepunkt A. Hieraus ſehen wir, daß hier die beſchleunigende Kraft der Schwere in den Punkten des Fadens t, E, B, als veränderlich zu betrachten iſt, weil die Bewegung des einen Punkts von der Bewegung der übrigen Punkte, entweder gehindert, oder befördert wird: und daher ein Punkt L, und zwar ein einziger vorhanden, der durch die freye Wirkung der natürlichen Schwere eben ſo fällt und ſchwingt, als wenn er frey wäre, und von der freyen Schwere getrieben würde. Die Punkte über L werden von einer geringern, beſchleunigenden Kraft in Schwung gebracht, als diejenige, womit die freywirkende Schwere das Pendel in Bewegung ſezt; die unter L von einer größern. Aber der Punkt L, worauf die Schwere frey wirkt, iſt der geſuchte Schwingungspunkt. Denn alle Punkte unter ihm erlangen eben die Kräfte, die die obern Punkte verlieren, und dieſe Zu- und Abnahmen der Kräfte werden, wenn KM parallel mit AF gezogen, durch die Unterſchiede der Bogen tC, EG, BD, von

dem Bogen LM gemeſſen, den das von der Schwere frey getriebene Pendel beſchreiben würde.

§. 155.

Ehe wir aber weiter in der Beſtimmung des Punkts L fortgehen, laßt uns unterſuchen, was dazu erfordert wird, wenn eine Maſſe, aus dem Punkt t in einen andern, z. B. in F verſezt, hier in F mit eben der Kraft, wie in t, widerſtehen ſoll. Wir betrachten hier keine andern Veränderungen der verſezten Maſſe, als die ihrer Größe oder Trägheit. Es iſt daher zu merken, daß der **Widerſtand der Trägheit** ſich überall verhält, wie die Größe des erzeugten Effekts §. 11. d. i. wie der Raum, wodurch ſie ſich gleichförmig bewegt, in die Maſſe ſelbſt multiplicirt. §. 23. Heißt alſo die Maſſe in t, m, und die Maſſe in F, die eben das ausrichten ſoll, M; ſo iſt hier auch die Länge der Arme At und AF zu betrachten, und daher m. At. tC = M. AF. FK. Denn die Räume tC und FK werden, wegen der Verknüpfung der Theile des Syſtems, in gleicher Zeit zurückgelegt. Aber tC : FK = At : AF. Daher iſt das Moment der Trägheit in t einerley mit dem Moment in F, oder

$$m. At^2 = M. AF^2, \text{ folglich } \frac{m. At^2}{AF^2} = M.$$

Es erhellt alſo, das hier das **Moment der Trägheit**, die **Maße** ſelbſt **in das Quadrat des Hebelarms multiplicirt iſt**; wird daher eine Maſſe aus einer Entfernung in eine andere verſezt, worinn ſie eben ſo viel, als in der erſtern ausrichtet, ſo muß die Maſſe in der leztern Entfernung ſich zu der in

in der erſtern verhalten, wie das Quadrat der erſtern Entfernung zum Quadrat der leztern, oder umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung. Dies iſt vorzüglich bey Beurtheilung der Bewegung eines Körperſyſtems zu merken.

Anmerkung. Um den Grund von dem, was der Herr **Verfaſſer** hier und, in der Folge von Findung des **Schwingungspunkts** vorträgt, leichter einzuſehen, iſt zu merken:

1.) Es ſey AB (Taf. VII. Fig. 12.) ein einfaches Pendel; man unterſucht, was geſchehen muß, wenn die Maſſe B aus dem Punkt B in den Punkt E verſezt wird, ſo daß das leztere **einfache** Pendel mit dem erſtern gleichzeitig iſt. Es erhellt aber aus §. 149. daß hierzu die beſchleunigende Kraft des leztern Pendels ſich zur beſchleunigenden Kraft des erſtern verhalten muß, wie die Länge des leztern AE zur Länge des erſtern AB. Hier liegt nichts an der Maſſe ſelbſt und ihrer Größe in E und B, wofern nur in beyden Pendeln alle Theile ſich in ähnlichen Bogen bewegen.

2.) Schwingen aber mehrere unter ſich verknüpfte Körper t, E, B, ſo daß das Pendel **zuſammengeſezt** iſt, und wird jeder Theil von der natürlichen Schwere, oder von eben der beſchleunigenden Kraft getrieben, ob ſie gleich wegen der gegenſeitigen Wirkung der Theile in dieſen oder jenen eine Aenderung leidet; ſo laſſet uns vorſtellen, ein Körper, z. B. t, werde in eine andere Stelle, z. B. in B, verſezt, und unterſuchen, was geſchehen muß, damit nach dieſer Verſetzung das Pendel mit dem vorigen gleichzeitig bleibt. Setzet, es ändere ſich auch

S 5 hier

hier weiter nichts, als die beſchleunigende Kraft, wodurch die Maſſe in der Stelle t getrieben wird. Es ſey dieſe Kraft g, ſo iſt in B die Kraft $\frac{AB}{At}$. g = r; die Maſſe bleibe einerley. Es iſt aber r größer, als g; daher wird auch die Maſſe t in B das Pendel mit größerer Gewalt in Schwung bringen, die, wenn ſie allein, und das Pendel einfach wäre, die Gleichzeitigkeit nicht aufheben würde: aber im zuſammengeſezten Pendel wirkt dieſe größere Gewalt auf die übrigen verknüpften Theile, und vermehrt zugleich ihre Gewalt, woraus, weil die Maſſe aller Theile einerley bleibt, nothwendig eine Veränderung der Geſchwindigkeit entſtehen muß, wodurch das Pendel ſeine Schwünge in kürzerer Zeit zurücklegt, und daher die Gleichzeitigkeit verlohren geht. Demnach muß ſich die Maſſe im umgekehrten Verhältnis der Kraft vermindern, damit der Druck einerley bleibt; nennen wir die Maſſe in B, B, ſo muß ſeyn r. B = t. g. Allein dies iſt noch nicht hinreichend, wenn das Pendel, nach geſchehener Verſetzung, ſich in eben der Zeit, wie vorher, bewegen ſoll. Denn der Drnck r. B wirkt nun auf das Pendel in der Entfernung AB vom Bewegungspunkt A; daher verhält ſich ſein Beſtreben, das Pendel in Schwung zu bringen, zum Beſtreben des Drucks t. g in der Entfernung At, wie AB zu At; jenes iſt alſo größer, als dieſes. Dieſes größere Beſtreben aber theilt ſich den übrigen Theilen mit, und vermehrt ihre Gewalt; woraus wiederum, da die Maſſe der übrigen Theile einerley bleibt, eine Ver-

mehrung der Geſchwindigkeit entſtehen muß, die wegen der gegenſeitigen Wirkung der Theile, in alle dieſe Theile übergehen, und dadurch das Pendel ſich ſchneller bewegen muß. Damit alſo alles einerley bleibt, muß ſeyn t. g : r. B = AB : At.

Hieraus erhellt nun, warum nach geſchehener Verſetzung eines Theils die Kraft, oder die Gewalt, wodurch das Pendel in Schwung gebracht wird, (Joh. Bernoullis vis penduli agitativa) einerley bleiben muß, wenn die Schwünge noch in eben der Zeit erfolgen ſollen, d. i. warum ſeyn muß t. g. At = r. B. AB, und weil g : r. = At : AB, warum t. At^2 = B. AB^2 (T.)

§. 156.

Dieſes vorausgeſezt, läßt ſich die vorgegebene Aufgabe von Beſtimmung des Schwingungspunkts auflöſen. Damit dieſes um ſo leichter und kürzer geſchieht, laßt uns die Körper H, D, G, R, E (Taf. VIII. Fig. 5.) mit einander verknüpft, und im Punkt C durch Hebel aufgehängt denken, die ohne Schwere, unbiegſam und hinlänglich befeſtigt ſind: alle dieſe Körper ſchwingen um den Punkt C in einer und derſelben Ebene, und zwar G durch den Bogen GI, ꝛc. In F ſey der Schwerpunkt, und die Linie CFG vom Aufhängepunkt durch den Schwerpunkt gezogen. Nun laſſen ſich alle dieſe Maſſen aus ihren Stellen in den Schwerpunkt F ſetzen, ſo daß ſie von einer Kraft, die in dieſem Punkt F wirkt, getrieben, noch die vorige Bewegung des Pendels hervorbringen. §. 155.

§. 155. Man ſetze ſie alle in Gedanken in F, ſo iſt die zugehörige Größe der Maſſen in dieſem Punkt

$$\frac{H.CH^2 + D.CD^2 + G.CG^2 + + +}{CF^2}.$$

Die Beſchleunigung der natürlichen Schwere heiſe g, ſo iſt der Druck im Schwerpunkt g. (H+D+G ++): denn der Druck in dieſem Punkt iſt gleich der Summe aller Preſſungen, wodurch alle Theile des ganzen Syſtems getrieben werden. §. 101.

Aber die Beſchleunigungen verhalten ſich, wie die Preſſungen ſelbſt, durch die Maſſen dividirt. §. 16. 4. Daher wird auch die Beſchleunigung der in dem Schwerpunkt geſezten Maſſen ſeyn

$$\frac{g(H + D + G + +) CF^2}{H.CH^2 + D.CD^2 + G.CG^2 + +}.$$

Denn wir nehmen an, daß nach geſchehener Verſetzung der Maſſen in den Schwerpunkt, hier eben noch die antreibende Kraft des Pendels ſey. *)

Da

*) Es ſey $\frac{H.CH^2 + D.CD^2 + G.CG^3 + + +}{CF^2}$ = m, d. i. die Maſſe, die in den Schwerpunkt geſezt, die antreibende Kraft des Pendels noch einerley iſt. (ſ. Anm. zu §. 155.) Es ſey auch K die Beſchleunigung dieſer Maſſe m im Schwerpunkt, ſo iſt K m der Druck, oder das Gewicht, und K. m. CF = der antreibenden Kraft des Pendels

im

Da aber die Beſchleunigungen in gleicher Zeit ſchwingender Pendeln ſich verhalten, wie die Ent-fernungen

im Schwerpunkt nach geſchehener Verſetzung, die der Kraft in eben dieſem Punkt vor der Verſetzung gleich ſeyn muß. Aber dieſe Kraft vor der Verſetzung war gleich der Summe aller antreibenden Kräfte, d. i. der Summe aller Maſſen, jede in ihre Entfernung vom Aufhängepunkt und in die Beſchleunigung der natürlichen Schwere multiplicirt, d. i. $H.CH.g + D.CD.g + G.CG.g + + + = (H.CH + D.CD + G.CG + +)g$. Es iſt aber, da in F der Schwerpunkt geſezt wird, $H.CH + D.CD + G.CG + + = CF.(H + D + G + +)$, oder, wenn wir die Summe aller Maſſen M nennen, $= CF.M.$ und daher $M.CF.g = K.m.CF$; oder $Km = Mg$, und $K : g = M : m$, aus welcher Gleichung, wo es nöthig, K zu finden

$$\text{wäre} = \frac{g(H+D+G++)\,CF^2}{H+CH^2+D.CD^2+G.CG^2+++}.$$

Denn dieſe Kraft iſt ſo beſchaffen, daß, wenn durch ſie die in den Schwerpunkt geſezte Maſſe m in Schwung gebracht würde, das daher entſtehende einfache Pendel mit dem zuſammengeſezten gleichzeitig wäre. Da aber dieſe Kraft K nur angenommen wird, nie aber in der Natur wirklich vorhanden iſt; ſo ſuche man ein ander einfaches Pendel, das von der Schwere g in Schwung gebracht wird, und mit erſtern, deſſen Länge CF, und die Kraft K, gleichzeitig iſt. Die Länge des leztern ſey x,

ſo

fernungen vom Aufhängepunkt. §. 149. und da überdies das einfache Pendel von der natürlichen Schwere g bewegt wird, §. 154. ſo wird, wenn die geſuchte Länge des einfachen Pendels x heißt, die wir = MC annehmen,

$$\frac{(H+D+G++)\,g.CF^2}{H.CH^2+D.CD^2+G.CG^2+++} : g = CF : x,$$

$$\text{daher } x = MC = \frac{H.CH^2+D.CD^2+G.CG^2+++}{FC(H+D+G++)},$$

und dies iſt die Länge des einfachen Pendels, das mit dem zuſammengeſezten gleichgültig, d. i. ſeine Schwünge mit ihm in gleicher Zeit vollendet.

Um alſo die Länge des einfachen Pendels zu finden, das ſeine Schwünge in gleicher Zeit mit dem zuſammengeſezten zurücklegt, multipliciret ſämmtliche Maſſen einzeln in die Quadrate ihrer Entfernungen, oder vielmehr, der Entfernungen ihrer Schwerpunkte vom Aufhängepunkt, die Summe dieſer Produkte dividiret durch die Summe aller Maſſen, in die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts vom Aufhängepunkt multiplicirt.

Anmer-

ſo muß ſeyn $x : CF = g : K = m : M$. Daher

$$x = \frac{m.CF}{M}, \text{ oder } MC = $$

$$\frac{H.CH^2+D.CD^2+G.CG^2+++}{FC(H+D+G+++}. \quad (T.)$$

Anmerkung. Sezt man die Maſſe in einen andern Punkt, der vom Schwerpunkt, worinn wir ſie oben kürzern Beweiſes wegen ſezten, verſchieden iſt, ſo bleibt alles einerley. Man deute die Größen der Materien in den Punkten t, E, B (Taf. VII. Fig. 12.) durch eben dieſe Buchſtaben t, E, B an, und ſetze dieſe Maſſen aus ihren Punkten in den Punkt F, ſo daß ihr Moment in dieſem Punkt mit dem vorigen einerley iſt. Aus §. 155. folgt, daß die ganze Maſſe in F $= t.\frac{At^2}{AF^2} + E.\frac{AE^2}{AF^2} + B.\frac{AB^2}{AF^2} ++$. Dieſe Maſſen aber, die in t, E, B ein von der natürlichen Schwere g erzeugtes Gewicht haben, müſſen in F von einer andern Kraft in Schwung gebracht werden, ſo daß die Summe der Momente in t, E, B dem Moment in F gleich iſt; daher können ſie von der Beſchleunigung g nicht in Schwung gebracht werden, ſondern von einer andern, die wir K nennen wollen, und die wir daraus finden, daß $K.\ t.\frac{At^2}{AF^2}.\ AF = g.\ t.\ At$, woraus man bekommt $K = g.\frac{AF}{At}$. Daher auch der ganze Druck, oder das Gewicht der aus t in F verſezten Maſſe $= g.\frac{AF}{At}.t.\frac{At^2}{AF^2} = g.\ t.$

$\frac{At}{AF}$. Eben ſo findet man den ganzen Druck, oder das Gewicht der aus E in F übergetragnen Maſſe $= g.E. \frac{AE}{AF}$, und der aus B in F verſezten $= g. B. \frac{AB}{AF}$. Dividirt man die Summe der Preſſungen durch die Summe der Maſſen, ſo entſteht die Beſchleunigung

$$\frac{g.t.\frac{At}{AF} + g.E.\frac{AE}{AF} + g.B.\frac{AB}{AF} ++}{t.\frac{At^2}{AF^2} + E.\frac{AE^2}{AF^2} + B.\frac{AB^2}{AF^2} ++} = \frac{(t.At + E.AE + B.AB ++)\,g.AF}{t.At^2 + E.AE^2 + B.AB^2 ++}.$$

Da aber die Pendeln in gleicher Zeit ſchwingen ſollen, ſo muß die Beſchleunigung der Länge proportional ſeyn. §. 149. Weil alſo AF die Länge des einfachen Pendels, das wir uns aus den in F verſezten Maſſen entſtanden dachten; ſo ſey AL die Länge des wahren einfachen Pendels; ſo iſt die Beſchleunigung in L die natürliche Schwere g. §. 154. Daher erhält man

(t. At

$$\frac{(t.At + E.AE + B.AB + +)g.AF}{t.At^2 + E.AE^2 + B.AB^2 + +} : g = AF :$$

AL, folglich $AL = \frac{t.At^2 + E.AE^2 + B.AB^2 + +}{t.At + E.AE + B.AB + +}$.

(V.)

§. 157.

Weil der Schwerpunkt ſich in die Stelle des ganzen Körpers ſetzen läßt, §. 101. in Rückſicht ſeines Moments: ſo folgt, daß ſich überall für die Summe der Produkte aus den einzelnen Maſſen in ihre Entfernungen, das Produkt ihrer Summe in die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts vom Aufhängepunkt, ſetzen läßt. Denn beyde Momente ſind einander gleich.

§. 158.

Dieſe Sätze wollen wir durch eins der leichteſten und nützlichſten Beyſpiele erläutern. Es ſey AB eine cylindriſche ſchwere Stange, (Taf. VII. Fig. 13.) die zwiſchen den beyden Haaken a und b aufgehängt, hin und wieder ſchwingt. Man betrachte hier die Länge der Stange AB als die Höhe ac einer geraden Pyramide, deren Grundfläche das Quadrat der Höhe ac, ſo iſt auch jeder andere Schnitt, z. B. iklm, dem Quadrat der dieſem Schnitt zugehörigen Höhe gleich: wie aus der Geometrie bekannt iſt. Da nun das Gewicht der Stange ſelbſt der Linie AB oder ac proportional iſt, ſo iſt auch offenbar das ganze Gewicht der Stange, ſämmtliche Theile in die

Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkte A multiplicirt, §. 156. = dem Inhalt der ganzen Pyramide $= \frac{AB^3}{3}$: und das Produkt aller Theile in die Entfernung des gemeinſchaftlichen Schwerpunkts vom Aufhängepunkt = $\frac{1}{2} AB^2$. §. 108. 3. Daher die Entfernung des Schwingungspunkts vom Aufhängepunkt, oder vom Mittelpunkt des Pendels = $\frac{AB^3}{3} : \frac{1}{2} AB^2 = \frac{2}{3} AB$.

§. 159.

Da bey Ausübung der Mechanik öfters der Schwingungspunkt, vorzüglich der Figuren, beſtimmt werden muß, ſo laßt uns etwas hiervon beyfügen: **Bey Figuren giebt es zwo verſchiedene wohl zu unterſcheidende Arten von Schwingungen.** In der **einen** ſchwingen die Figuren **über einer mit ihrer Grundlinie gleichlaufenden Axe**; in der **andern** geſchieht der Schwung **nach den Seiten.** Es ſey z. B. A (Taf. VIII. Fig. 7.) der Punkt, worinn man ſich das Dreyeck BDE aufgehängt denkt, das frey um dieſen Punkt ſchwingen kann: ſo ſchwingt es entweder nach dem Horizont um eine mit DE gleichlaufende Axe, ſo daß die Bewegung der Punkte D, C, E in ſenkrechter Richtung auf die Figur gleichlaufend iſt; oder in der Vertikalebne der Figur durch den Schwerpunkt der Linie ABC, d. i. um eine auf die Grundlinie DE ſenkrechte Axe. Jenes heißt der Schwung nach der Grund-

Grundlinie, oder nach dem Horizont, horizontaler Schwung; dieſes der Schwung nach den Seiten, oder auch vertikaler Schwung.

Die Schwingungsaxe heißt hier die wagerechte Linie FAG, die während des Schwunges unbeweglich bleibt. Man muß ſich alſo für beyde Schwingungen zwo Axen vorſtellen, die auf einander ſenkrecht ſind. Jede iſt auf die Ebene des Schwunges ſenkrecht, und die dem Schwung nicht zugehörige Axe bewegt ſich mit der ſchwingenden Figur in einem beſtändigen Winkel.

§. 160.

Dieſes vorausgeſezt, laßt uns anführen, was ſich vom Schwingungspunkt, ſowohl bey horizontalen, als vertikalen Schwingungen erweiſen läßt, und wir im fünften Zuſatz ſelbſt erwieſen haben.

a) Die ſchwingenden Figuren ſeyen Dreyecke, (Taf. VIII. Fig. 9.) 1.) in ihrer Spitze B aufgehängt; ſo liegt der Schwingungspunkt in der Linie BC durch den Schwerpunkt, von der Spitze B um $\frac{3}{4}$BC entfernt. Iſt alſo dieſer Punkt in L, ſo iſt BL $= \frac{3}{4}$ BC, wenn die Dreyecke ſich nach den Seiten in der Richtung der Grundlinie bewegen.

2.) Wird aber das Dreyeck umgekehrt, daß die Grundlinie zu oberſt kommt, und das Dreyeck ſchwingt in C, ſo iſt CL $= \frac{1}{2}$ BC.

3.) Das im Punkt B der unbiegſamen Linie AB (Taf. VIII. Fig. 7.) aufgehängte Dreyeck ſchwinge horizontal um die Axe FG, in deren Punkt A die Linie AB, und mit ihr das Dreyeck ſelbſt aufgehängt iſt, der Schwung geſchehe um den Punkt A; dies

vorausgeſezt iſt, wenn AC = a, AB = c, und der Schwingungspunkt in L, die Länge des Pendels

$$LA = \frac{3a^2 + 2ac + c.}{4a + 2c}.$$

Iſt hingegen das Dreyeck umgekehrt aufgehängt (Taf. VIII. Fig. 4.) DC = a, und ED = c, ſo iſt

$$\frac{a^2 + 6cc + 4ac}{6c + 2a}$$

die Länge des Pendels = EL.

b) Bewegen ſich Parallelogrammen horizontal:

1.) Denke man ſich ſelbige in C aufgehängt, (Taf. VIII. Fig. 6.) die Linie CA = a ſey unbiegſam und ohne Schwere, AG = c, ſo iſt die Länge des einfachen Pendels

$$\frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}c^2}{a + \frac{1}{2}c}.$$

2.) Sey CA = o, oder die Figur in der Mitte ihrer Grundlinie A aufgehängt, ſo wird die Länge des einfachen Pendels = $\frac{2}{3}$c.

c) bey Kreiſen,

1.) wenn ſie horizontal ſchwingen, und in einem Punkt des Umfangs B aufgehängt ſind, wie Fig. 11. Taf. VIII. ſo iſt die Entfernung des Schwingungspunkts von B = $\frac{5}{8}$ BF.

2.) Sey der Kreis im Punkt I aufgehängt, ſein Durchmeſſer BF = a, und IB = c, ſo iſt die Länge des einfachen Pendels

$$= \frac{8ac + 5a^2}{16c + 8a} + c.$$

3.) Schwingt

3.) Schwingt der Kreis ſeitwärts in der Vertikalebene, und hängt in einem Punkt des Umfangs, ſo iſt die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels $\frac{3}{4}$ des Durchmeſſers.

4.) Hängt er im Punkt I, ſo iſt die Länge des einfachen Pendels $= \frac{3a^2 + 4ac}{8c + 4a}$.

d) In Kugeln.

1.) Sind ſie in einem Punkt ihres Umfangs aufgehängt, und der Durchmeſſer $= a$, ſo iſt die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels $= \frac{7}{10} a$.

2.) Sind ſie aber in der Weite l vom Umfang aufgehängt, und der Halbmeſſer $= r$, ſo iſt die Länge des einfachen Pendels $= l + r + \frac{2rr}{5(l+r)}$.

e) In Kegeln.

1.) Hängen ſie in ihren Spitzen, ſo iſt die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels $\frac{4a^2 + b^2}{5a}$, wenn a die Höhe des Kegels, und b der Durchmeſſer der Grundfläche.

2.) Hängt der Kegel im Mittelpunkt der Grundfläche, ſo iſt die Länge des einfachen Pendels $= \frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

f) Hängt der Cylinder im Mittelpunkt ſeiner Grundfläche, ſo iſt, mit Beybehaltung der vorigen Zeichen, die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels

$$= \frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}.$$

§. 161.

Auch läßt ſich der Schwingungspunkt in andern Körpern beſtimmen. Hierbey wollen wir uns aber weiter nicht aufhalten, damit wir bey Erklärung der Centralkräfte deſto ausführlicher ſeyn können, welche Materie wir nun verfolgen, und unter andern zeigen wollen, daß der Druck eines ſchweren Körpers entweder ganz oder doch zum Theil von einer, ſeiner Wirkung entgegengeſezten Geſchwindigkeit oder Bewegung aufgehoben werden kann.

Fünfter Zuſatz.

Von den Pendeln überhaupt, insbeſondere den zuſammengeſezten.

Inhalt.

§. 84 — 91. Die Größe der Materie iſt dem Gewicht der Körper proportional. Die Schwere iſt in verſchiedenen Erdgegenden verſchieden. §. 92. Mittelſt der Radlinie die Zeit in gleichzeitigen Bewegungen auf eine allgemeine Art zu beſtimmen. §. 93. 94. Näherer Beweis der Regel für den Schwingungspunkt. §. 95 — 101. Anmerkung dieſer Regel bey geraden Linien. §. 103 — 114. Bey Figuren, wenn ſie wagerecht ſchwingen. §. 115. Die Länge des mit dem zuſammengeſezten gleichzeitigen einfachen Pendels iſt beſtändig einerley, ſo lange die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt in eben dem zuſammengeſezten Pendel oder Körperſyſtem einerley bleibt. §. 117. Der Schwingungspunkt liegt überall unter dem Schwerpunkt, und die Entfernung dieſer Punkte verhält ſich allemal umgekehrt, wie die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt. §. 118. 119. Anwendung hiervon in Beyſpielen. §. 120. Der Aufhängepunkt läßt ſich mit dem Schwerpunkt verwechſeln, obgleich die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels einerley bleibt. §. 121. Regeln der Schwingung nach den Seiten. §. 122. 123. Beſtimmung des Schwingungspunkts in Parallelogrammen. §. 124 — 126. In Dreyecken. §. 127. In ſchief aufgehängten Figuren. §. 128. In Parabeln. §. 129. 130. In Abſchnitten und Ausſchnitten des Kreiſes. §. 131. Regeln, den Schwingungspunkt in Körpern überhaupt zu finden; insbeſondere §. 132. 133. in Kugeln. §. 134. In Kegeln. §. 135. In Cylindern. §. 136. In paraboliſchen Afterkegeln.

§. 84.

Wir behaupteten in den Vorleſungen, §. 148. bis 150. daß ſich aus den Schwingungszeiten der Pendeln ſowohl ſchlieſen läßt, daß die Größe der Materie dem Gewicht der Körper proportional, als auch, daß die beſchleunigende Kraft der Schwere in verſchiedenen Erdgegenden verſchieden iſt. Die Gründe, woraus wir dieſes ſchloſſen, laſſen ſich nicht leichter erweiſen, als wenn wir zu den §. 38. zwiſchen Geſchwindigkeit und Zeit gefundenen Gleichungen zurückkehren. Hier iſt t proportional mit $\frac{\sqrt{4a}}{\sqrt{g}}$, das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umfang nämlich beyſeit geſezt, als welches beſtändig iſt, und wir nicht achten, da wir die bloſe Verhältnis der Größen in Betrachtung ziehen. Laßt uns erinnern, daß $4a$ die Länge des Pendels, und $\sqrt{g}$ die Quadratwurzel einer beſtändigen Kraft iſt, wovon das Pendel getrieben wird. Nun nehme man an, g ſey auch eine veränderliche Größe, und weil überhaupt $g = \frac{p}{m}$, §. 5. ſo iſt auch allgemein $t = \frac{\sqrt{4am}}{\sqrt{p}}$; dieſe Aenderung führen wir deswegen in der Gleichung ein, um auch das Verhältnis der Maſſe zu den übrigen Größen daraus zu finden.

§. 85.

Betrachten wir dieſe Gleichung $t = \frac{\sqrt{4am}}{\sqrt{p}}$ genauer, ſo ſehen wir, daß bey verſchiedenen Preſſungen, von welchen die Pendeln getrieben werden, die Schwingungszeiten ſich verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendeln, in die Quadratwurzeln der bewegten Materien multiplicirt, und durch die Quadratwurzeln der Schwungkräfte dividirt.

§. 86.

Es ſey überdies in der Gleichung $t = \frac{\sqrt{4am}}{\sqrt{p}}$ die Länge des Pendels in mehrern Beyſpielen einerley, d. i. eine beſtändige Größe, und t, m, p veränderlich; ſo iſt $t = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p}}$, oder die Zeiten verhalten ſich gerade wie die Quadratwurzeln der Maſſen, und verkehrt, wie die Quadratwurzeln der Kräfte.

§. 87.

Bey gleichlangen Pendeln kann alſo die Zeit nicht beſtändig ſeyn, wo nicht $\sqrt{\frac{m}{p}}$ eine beſtändige Größe, oder wo nicht, $t = 1$ geſezt, $\sqrt{p} = \sqrt{m}$;

 d. i.

d. i. wo nicht die Größe der Materie dem Druck proportional iſt. Da nun vermöge der Erfahrung die Zeit in gleichlangen Pendeln gleichgros iſt, die Lothe mögen klein oder gros, ſpecifiſch ſchwer oder leicht ſeyn; ſo erhellt die Wahrheit des für uns ſo wichtigen Satzes, daß die Größe der Materie in ſchweren Körpern mit dem aus der Wirkung der Schwere entſtehenden Druck beſtändig in gleichem Verhältnis ſtehe.

§. 188.

Die Materie ſey beſtändig, ſo iſt $t = \sqrt{\frac{4a}{p}}$, d. i. die Zeiten verhalten ſich gerade wie die Quadratwurzeln der Pendellängen, und verkehrt, wie die Quadratwurzeln der beſchleunigenden Kräfte.

Hieraus erhellt, daß gleichlange Pendeln die Schwünge nicht beſtändig in gleicher Zeit zurücklegen können, wenn die Schwere bald ſtärker, bald ſchwächer wirkt: da aber vermöge der Erfahrung in einerley Gegenden die Zeit einerley iſt, ſo muß auch nothwendig der von der Schwere herrührende Druck in dieſen Gegenden unveränderlich ſeyn.

Eben ſo muß auch offenbar, wenn gleichlange Pendeln in gleicher Zeit, obgleich in verſchiedenen Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde, ſchwingen, die Schwere eine in dieſen verſchiedenen Entfernungen unveränderliche Kraft ſeyn. Nun lehren aber die Beobachtungen, daß ſich die Sache in den Entfernungen, worinn wir Verſuche anſtellen können,

nen, ſo verhält; mit Recht ſchlieſen wir daher, daß die Schwere in allen dieſen Entfernungen eine gleichförmig wirkende Kraft iſt.

§. 89.

Laßt uns nun p veränderlich, t unveränderlich annehmen, und da $t = \sqrt{\frac{4am}{p}}$, ſo wird bey gleichen Schwingungszeiten ungleichlanger Pendeln, oder $t = 1$ geſezt, $4a = \frac{p}{m}$, d. i. die **Längen der Pendeln verhalten ſich, wie die beſchleunigenden Kräfte.**

§. 90.

Hieraus läßt ſich auch das Verhältnis der beſchleunigenden Kraft ſchlieſen. Denn $\frac{p}{m} = \frac{4a}{t^2}$.

Demnach verhalten ſich beſtändig die beſchleunigenden Kräfte gerade wie die Längen der Pendeln, und umgekehrt, wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

Sind daher die Schwingungszeiten ungleichlanger Pendeln in verſchiedenen Graden der Breite auf der Erde gleichgros, und die Längen dieſer Pendeln L und l, ſo **verhalten ſich die Kräfte der Schwere in dieſen verſchiedenen Gegenden, wie die Längen L und l.**

§. 91.

§. 91.

Was die Geſchwindigkeit betrifft, wollen wir folgendes bemerken: Einerley Pendel ſchwinge durch verſchiedene Bogen eb, db (Taf. VII. Fig. 14.) ſo verhalten ſich die im Fall durch die Bogen im niedrigſten Punkt b erlangten Geſchwindigkeiten, wie die Sehnen eb und db; dieſe Sehnen mögen unendlich kleine Bogen, oder von endlicher Größe ſeyn.

Denn die im Fall durch eb und db erlangten Geſchwindigkeiten in b verhalten ſich, wie $\sqrt{cb} : \sqrt{ab}$. §. 79. Vorl. Da aber feb und fdb rechtwinklichte Dreyecke, ſo iſt $fb : bd = bd : ba$. Alſo die Sehne $bd = \sqrt{bf.\, ba}$. Auch iſt $eb = \sqrt{fb.\, bc}$; daher $bd : eb = \sqrt{ba} : \sqrt{bc}$, und weil dieſe Größen ſich verhalten, wie die im Fall durch db und eb erlangten Geſchwindigkeiten, ſo müſſen ſich auch die Sehnen db und eb ſelbſt eben ſo verhalten.

§. 92.

Alles vom einfachen Pendel bisher vorgetragene folgt aus dem, was wir von der Bewegung in der Radlinie oben erwieſen haben. Ehe wir aber ſchlieſſen, wollen wir zeigen, wie ſich die Radlinie auch zu Beſtimmung der Zeit der kleinſten Bewegungen in den Körpern, die, wie wir wiſſen, gleichzeitig ſind, anwenden läßt. Dies iſt in vielen Fällen ſehr nützlich. Denn ſo oft eine Bewegung ſo beſchaffen iſt, daß der Körper oder deſſen Theile ſich von einem feſten Punkt entfernen, und ihm ſich wieder nähern, und ſo oft dieſe Bewegungen, obgleich ſonſt verſchieden, in gleicher Zeit vollendet werden,

kann

kann man ſich der Radlinie bedienen, wofern nur die ſtoßenden Kräfte und die Länge dieſer Entfernung von dem feſten Punkt gegeben ſind.

Da die Zeit in der Radlinie, die Bewegung geſchehe durch kleine oder große Bogen, einerley iſt. §. 38. und da dies auch ſtatt hat, wenn die Kräfte ſich verhalten, wie die Entfernungen, entweder vom Mittelpunkt der. Kräfte ſelbſt, oder von einem andern Punkt, der, wegen den geſezten Bedingungen, als der Mittelpunkt anzuſehen iſt, nach welchem die Körper von den Kräften getrieben werden: ſo laſſen ſich die Räume, mit welchen man die Kräfte proportional annimmt, als kleine Bogen der Radlinie, und die Kräfte ſelbſt, als ſolche betrachten, die in der Radlinie wirken. Wo alſo auch nur die kleinſten Bewegungen entweder um oder nach einen Punkt, durch gleiche oder ungleiche Räume erfolgen, doch ſo, daß die Zeiten der Bewegung einerley ſind, ſo wird die Länge der Radlinie, auf welcher man ſich dieſe Bewegungen vorſtellt, leicht beſtimmt. Denn die ſtoßende Kraft in A, (Taf. IV. Fig. 3.) in welchem Punkt der Anfang der Radlinie angenommen wird, iſt mit der natürlichen Schwere einerley, weil die Tangente in dieſem Punkt vertikal, und überdies die Kraft in A der Länge der halben Radlinie proportional iſt. Aber dieſe Kraft im Punkt n iſt dem Raum nB proportional. Bedeutet alſo nB den in einem gewiſſen Fall zurückgelegten gleichzeitigen Raum, k die darinn wirkende Kraft, und g die natürliche Schwere; ſo iſt $k : g = Bn : AB$, woraus die Länge der halben Radlinie leicht gefunden wird.

Dieſe Länge iſt aber mit der Länge des in eben der Zeit, worinn dieſe Bewegungen zurückgelegt werden,

werden, ſchwingenden einfachen Pendels einerley, §. 85. und da dieſe bekannt iſt, ſo iſt auch die Schwingungszeit bekannt. §. 136. Vorl.

Fortſetzung
von den zuſammengeſezten Pendeln.

§. 93.

Laßt uns die Fälle übergehen, wo die Theile des ſchwingenden zuſammengeſezten Pendels in verſchiedenen Ebenen liegen; denn es erhellt leicht, daß hier die Rechnung mit der gegebenen allemal einerley iſt; wenn man nur in Acht nimmt, daß die Verſetzung der Maſſen nach der §. 156. Vorl. angezeigten Art geſchehen muß.

Wir nahmen oben bey Beſtimmung des Schwingungspunkts dieſen Punkt als den einzigen an, der in einer ganzen Sammlung von Körpern von der freyen Schwere frey in Bewegung geſezt wird; und zeigten, wie daraus dieſer Punkt beſtimmt wird. Wie aber die Regel für den Schwingungspunkt auch alsdenn, wenn dieſer Punkt nicht als ein Punkt anzuſehen iſt, aus der bloſen Eigenſchaft des zuſammengeſezten Pendels, daß es mit dem einfachen in gleicher Zeit ſchwingen muß, herausgebracht wird, ſoll hier gewieſen werden. Zu dem Ende muß man die Zeit in dem zuſammengeſezten Pendel ſuchen, und mit der Schwingungszeit des einfachen vergleichen. Um aber die Zeit der Bewegung im zuſammengeſezten Pendel zu finden, muß man die Zeit, worinn ſich der Schwerpunkt des ganzen Körperſyſtems bewegt, nach den Bedingungen der Aufgabe ſuchen.

Zuerſt

Zuerſt wollen wir die Schwingungszeit der, von der natürlichen Schwere g, die wir hier = 1 ſetzen, getriebenen einfachen Pendeln beſtimmen. Es ſey alſo CERGDH (Taf. VIII. Fig. 5.) die Sammlung ſchwingender Körper, und CG die geſuchte Länge des bereits vom Punkt I nach G gefallenen einfachen Pendels. Auch ziehet die Vertikallinie GK = y; ſo iſt die durch den Fall erlangte Geſchwindigkeit $= \sqrt{2y}$. §. 10. und die Zeit durch das Bogenelement $aG = \frac{aG}{\sqrt{2y}}$: Es ſey CG = r, CK = x, ſo iſt $y = \sqrt{(rr - xx)}$; $aG = \frac{rdy}{\sqrt{(r^2 - yy)}}$, und

$$dt = \frac{aG}{\sqrt{2y}} = \frac{rdy}{\sqrt{(2r^2y - 2y^3)}}.$$

Um auch die Zeit im zuſammengeſezten Pendel zu beſtimmen, laßt uns annehmen, F ſey der Schwerpunkt, worinn ſich das Gewicht des ganzen Syſtems vereinigt denken läßt. Folglich wird auch in dieſem Punkt der ganze Druck vereinigt ſeyn, wovon es getrieben wird. Es ſey Fl das vom Schwerpunkt in einem unendlich kleinen Zeittheilchen zurückgelegte Stück Bogen, CL = x, FL = z, und die wirkende Kraft in F = K; ſo iſt die ganze Kraft, die in der Richtung der Tangente des Kreiſes wirkt, $\frac{Kdz}{ds}$ (wenn wir das Bogenelement ds nennen). Das ganze Ge-

wicht

wicht des zuſammengeſezten Pendels ſey $= T$, $CF = a$; ſo iſt $K = aT$, und $\frac{Kdz}{ds} = \frac{aTdz}{ds}$: dies iſt die Kraft, womit das zuſammengeſezte Pendel in der Richtung der Tangente in Schwung gebracht wird.

Der Effekt dieſer Kraft muß demjenigen gleich ſeyn, der von der Schwere in allen übrigen Maſſen in eben der Zeit entſteht. Es ſeyn alſo DN, PH unendlich kleine Bogen, die D und H in eben der Zeit durchlaufen, worinn der Schwerpunkt den unendlich kleinen Bogen lF zurücklegt, ſo iſt §. 5. $\frac{a.T.dz}{ds}$. $dt = D.DC.DN + H.HC.HP + + +$. Aber DN und HP verhalten ſich, wie die Elemente der Geſchwindigkeiten; wird daher die Geſchwindigkeit in $D = f$, in $H = p$ geſezt, ſo iſt $\frac{aT.dz}{ds}$. $dt = D.DC.df + H.HC.dp + + +$. Aber $dt = \frac{ds}{v}$.

§. 7. Daher wird, wenn wir durch v die Geſchwindigkeit im Schwerpunkt F verſtehen,

$$\frac{aT.dz}{v} = D.DC.df + H.HC.dp + + +.$$

Aus dieſer Gleichung iſt die Geſchwindigkeit im Schwerpunkt zu beſtimmen.

Da

Da v im zuſammengeſezten Pendel ſich verhält, wie FC = a, f wie DC, p wie HF ꝛc. ſo wird Tdz = D. f. df + H. p. dp + + +, davon das Integral iſt 2 Tz = D. f² + H. p² + + +.

Da aber dieſe Gleichung nur das Verhältnis der Geſchwindigkeit ausdrückt, ſo iſt noch die wahre Größe derſelben in der Rechnung einzuführen. Zu dem Ende iſt zu merken, daß man die Geſchwindigkeit in F = v, die in D = $f = \frac{DC.v}{a}$, und in H $= \frac{HC.v}{a} = p$, dieſe Werthe in der vorigen Gleichung für f und p geſezt, erhalten wie $2Tz = \frac{D.DC^2.v^2}{a^2} + \frac{H.HC^2.v.}{a^2} + +$; hieraus wird endlich $v = \frac{a\sqrt{2Tz}}{\sqrt{(D.DC^2 + H.HC^2 + +)}}$.

Iſt alſo die Geſchwindigkeit des Schwerpunkts beſtimmt, ſo findet man auch die Zeit der Bewegung. Denn $dt = \frac{ds.\sqrt{(D.DC^2 + H.HC^2 + +)}}{a\sqrt{2Tz}}$, u. $ds = \frac{adz}{\sqrt{(aa - zz)}}$, daher $dt = \frac{dz.\sqrt{(D.DC^2 + H.HC^2 + +}}{\sqrt{2T(aaz - z^3)}}$.

U Dieſen

Dieſen Werth der Zeit im zuſammengeſezten Pendel mit der Zeit der Bewegung im einfachen verglichen, erhalten wir, weil dieſe Zeiten gleich ſind,

$$\frac{rdy}{\sqrt{(2r^2y-2y^3)}} = \frac{dz.\sqrt{(D.DC^2+H.HC^2+++)}}{\sqrt{(aaz-z^3)}.\sqrt{2T}}.$$

Aber r : y = a : z, daher $\frac{rdy}{\sqrt{(2r^2y-2y^3)}} =$

$$\frac{\frac{r^2dz}{a\sqrt{(a^2.\,2r^3z-2r^3z^3)}}}{\sqrt{a^3}} = \frac{\frac{\sqrt{ar}}{\sqrt{2}}.\,dz}{\sqrt{(a^2z-z^3)}} = $$

$$\frac{dz\sqrt{(D.DC^2+H.HC^2+++)}}{\sqrt{(a^2z-z^3)}.\sqrt{2T}},$$ daraus wird r

$$= \frac{D.DC^2+H.HC^2++}{aT},$$ welches mit dem §. 156. Vorl. gefundenen Werth übereinſtimmt.

§. 94.

Man verſtehe unter α jede der ſchweren Elementarmaſſen, woraus das zuſammengeſezte Pendel beſteht, und x ſey die Entfernung jeder beſonders, ſo iſt $r = \frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x}$.

§. 95.

Laßt uns zu Beyſpielen ſchreiten, und mit dem deutlichſten: den Schwingungspunkt der geraden

den Linie, deren gleiche Theile auch überall gleichſchwer ſind, zu ſuchen, den Anfang machen.

Es ſey ab (Taf. VII. Fig. 15.) eine ſolche Vertikallinie, die in ihrem Ende a aufgehängt ſchwingt. Ferner ſey ad = x, cd = dx, und die ganze Linie

ab = a, ſo iſt α = dx, und $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{S.xxdx}{S.xdx} =$

$\frac{2}{3}x$, und für die ganze Linie = $\frac{2}{3}a$.

§. 96.

Man nehme ferner das vorige an, nur mit dem Unterſchied, daß hier nur das Stück cb der Linie ſchwer iſt, das übrige Stück ac aber nicht, ſo wird,

ac = b geſezt, $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{S.xxdx}{S.xdx}$. Sezt man aber

x = b, ſo muß das Integral = o ſeyn; daher S.αxx = $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}b^3$, und S.$\alpha$x = $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}b^2$. Hieraus wird die geſuchte Länge des einfachen Pendels

$= \frac{2}{3}\frac{(x^2+bx+b^2)}{x+b}$, die für die ganze Linie ab (= a),

$= \frac{2}{3}\frac{(a^2+ab+b^2)}{a+b}$. Für b = o erwächſt die vorhin gefundene Länge des einfachen Pendels $\frac{2}{3}$a.

§. 97.

Der Aufhängepunkt ſey in der Linie ſelbſt, und zugleich ſey die ganze Linie ſchwer, (Taf. VII. Fig. 16.)

z. B. ſey der Aufhängepunkt in A, und AB = b, AC = x, cd = dx. Dies vorausgeſezt, iſt $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{S.xxdx}{S.xdx}$, und $S.\alpha xx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}b^3$. Denn iſt x = —b, ſo muß das Integral in o übergehen. Uebergehen. Ueberdies wird $S.\alpha x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}b^2$. Die Linie vom Aufhängepunkt an gerechnet ſey a, ſo iſt die geſuchte Länge des einfachen Pendels $= \frac{2}{3} \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$, und iſt b = o, ſo erhält man $\frac{2}{3}a$, wie oben

§. 95.

Demnach findet die allgemeine Regel §. 94. auch alsdenn ſtatt, wenn, wie in gegenwärtigem Beyſpiel, der Aufhängepunkt innerhalb den Figuren angenommen wird. Die ganze Sache kömmt darauf an, daß das Integral überall der Aufgabe gemäß ergänzt wird.

§. 98.

Schwingt die wagerechte Linie CD (Taf. VIII. Fig. 1.) in der Vertikalebne, ſo halbire das Loth AB die Linie CD in B, auch ſey AB = a, CB = BD = b, Bc = x, cd = dx, ſo iſt $Ac = \sqrt{(aa+xx)}$, und $S.\alpha xx = S.dx\,(aa+xx) = aax + \frac{1}{3}x^3 + B$. Die Größe B wird daraus beſtimmt, daß, wenn x = —b, das Integral iſt $-aab - \frac{1}{3}b^3$; daher auch $S.\alpha xx = aax + \frac{1}{3}x^3 + aab + \frac{1}{2}b^3$, und für die ganze Linie

Linie $= 2\,(aab + \frac{1}{3}b^3)$. Es iſt aber auch $S. \alpha x =$ $2ab$, für die ganze Linie, §. 157. Vorl. und daher die Länge des einfachen Pendels $= \frac{3aa + b^2}{3a}$.

Für $b = o$ iſt die Länge des einfachen Pendels $= a$, und daher AB ſelbſt das einfache Pendel, wie es ſeyn muß.

Für $a = o$ iſt die Länge des einfachen Pendels im Schwerpunkt ∞.

§. 99.

Die ſchwingende Linie CD (Taf. VIII. Fig. 2.) ſey in ſchiefer Lage gegen den Horizont aufgehängt; das übrige bleibe, wie vorhin. Fället auf die Linie das Loth $Ab = p$, das ſich als bekannt und gegeben anſehen läßt, weil die Linie $AB = a$, und die Winkel AbB, ABb gegeben ſind; es ſey die gegebene Linie $bB = q$, die halbe Linie $CD = b$, $br = x$, $rm = dx$; ſo wird $S. \alpha xx = S. dx\,(xx + pp) = \frac{1}{3}x^3 + p^2x + B$. Die Größe B wird daraus beſtimmt, daß, $x = o$ geſezt, $b - q = - x$, oder $x = q - b$. Daher $S. \alpha xx = \frac{1}{3}x^3 + p^2x - \frac{1}{3}(q - b)^3 - p^2\,(q - b)$. Für die ganze Linie iſt $x = b + q$, $S. \alpha xx = \frac{1}{3}(b + q)^3 + p^2\,(b + q) + \frac{1}{3}(b - q)^3 + pp\,(b - q) = \frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2\,ppb$. Ueberdies iſt auch für die ganze Linie $2b$, $S. \alpha x = 2ab$; daher die geſuchte Länge des einfachen Pendels $=$ $\frac{\frac{1}{3}(2b^3 + 6q^2b) + 2ppb}{2ab}$. Da aber $p^2 = a^2 - q^2$,

 ſo

ſo wird dieſe Länge $\frac{\frac{1}{3}b^2 + a^2}{a} = \frac{3a^2 + b^2}{3a}$, und daher mit der für die wagerechte Linie §. 98. einerley.

Nimmt man den Anfang der Linien x in B an, ſo erhalten wir $S.\ \alpha xx = S.\ dx\,(a^2 + 2qx + x^2)$, weil $Ar^2 = x^2 + 2qx + a^2$. Dieſes Integral iſt $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3$, worzu man für $-x = b$ eine gewiſſe Größe addiren muß. Das vollſtändige Integral iſt alſo $a^2x + qx^2 + \frac{1}{3}x^3 + a^2b - qb^2 + \frac{1}{3}b^3$, und für die ganze Linie $2a^2b + \frac{2}{3}b^3$. Aber $S.\ \alpha x = 2ab$. Daher die geſuchte Länge des einfachen Pendels wie vorhin $= \frac{3a^2 + b^2}{3a}$.

§. 100.

Da alſo die Lage der Linie in der Länge des einfachen Pendels nichts ändert, wenn nämlich die wagerechte Linie gegen den Horizont geneigt wird, woſern nur das Pendel in der Vertikalebne ſchwingt, und die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt einerley bleibt, ſo folgt, daß die Länge des Pendels bey vertikaler Lage der Linie einerley bleiben muß, wenn die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt einerley bleibt. Damit aber erhellt, daß dieſes auch durch die Rechnung §. 95. angedeutet wird, ſo iſt zu merken, daß, wenn CB (Taf. VIII. Fig. 2.) mit AB zuſammenfällt, $b = a$, und $\frac{3a^2 + b^2}{3a} = \frac{4}{3}a$. Aber $a = \frac{1}{2}CD$, daher erhält

man

man die Länge des einfachen Pendels $\frac{2}{3}$CD, mit der §. 95. gefundenen völlig einerley.

Demnach iſt allgemein wahr, daß beym Schwung in der Vertikalebene nichts an der Neigung der Linien gegen die Schwingungsaxe liegt, wenn nur die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt einerley bleibt, und die Schwingungen in einer Ebene geſchehen.

§. 101.

Schwingt eine waagerechte Linie DC (Taf. VIII. Fig. 3.) über der Horizontalebene; ſo denke man ſich eine wagerechte Axe. FAE durch den Aufhängepunkt A, und ziehe von allen Punkten a in der ſchwingenden Linie CD auf die Axe Lothe ab, die überall die Entfernungen ausdrücken. Alle dieſe Entfernungen ſind alſo $= a = AB$, und $CB = BD = b$. Daher $S. \alpha xx = S. aadx = aax + B$. Aber $B = aab$, daher; $S. \alpha xx = aax - aax + aab$, und für die ganze Linie 2aab. Daher, weil $S. \alpha x = 2ab$, die geſuchte Länge des einfachen Pendels $= \frac{2aab}{2ab} = a$.

Ein ſolches Pendel iſt alſo im Grund mit dem einfachen einerley, oder richtiger zu reden: es iſt eine Menge gleichgroßer, zugleich ſchwingender, einfacher Pendeln. Dies ſtimmt genau mit dem überein, was wir oben von der Schwere ſagten, daß ſie bey freyer Wirkung alle Punkte der Maſſe gleichförmig treibt.

§. 102.

Auch erkennt man aus gegenwärtigem Beyſpiele, was wir oben ſagten, daß ein Unterſchied zwiſchen dem Schwung einer Figur oder Linie in der Ver-

tikalebene, und dem Schwung nach einer auf die Grundlinie ſenkrechten Richtung vorhanden. Um alſo dieſe beyderley Schwünge in der Rechnung gehörig von einander zu unterſcheiden, muß man allemal in Acht nehmen, welches die Linien ſind, von deren Bewegung die Geſchwindigkeit der Maſſen abhängt, um daraus ihre Entfernung vom Aufhängepunkt beurtheilen zu können.

§. 103.

Nicht ohne Grund haben wir uns über die Erklärung des Schwungs der geraden Linie ſo weit verbreitet. Hier haben wir das leichteſte Beyſpiel, worinn wir am beſten ſehen, was für Stücke bey Beſtimmung des Schwingungspunkts vorzüglich in Acht zu nehmen ſind.

Wir gehen nun zu den Figuren über. Da hier beſtändig zweyerley Schwünge zu unterſcheiden ſind, wo in dem einen die Figuren den Seiten nach getrieben werden, und die Schwingungsaxe auf die Ebene der Figur ſenkrecht iſt; im andern aber nach der Grundlinie, wo die Schwingungsaxe ſich mit den Figuren in einer Ebene befindet: ſo wollen wir leztern, als den einfachſten, zuerſt betrachten. Dieſer leidet keine Schwierigkeit, wo die mit einer Axe verſehenen Figuren, auf beyden Seiten derſelben gleich und ähnlich ſind.

Es ſey BDFE (Taf. VIII. Fig. 6.) ein in C aufgehängtes Parallelogramm. Alſo $BA = AD$, und CA auf BD ſenkrecht. Setzet ferner $CA = a$, $AG = c$, $Ae = x$, $ef = ab = dx$, $BD = b$. Weil

$ac = b$,

$ac = b$, ſo wird $\frac{S.\,\alpha xx}{S.\,\alpha x} = \frac{S.\,bdx(a^2+2ax+x^2)}{S.\,bdx\,(a+x)}$

$= \frac{a^2bx+abx^2+\frac{1}{3}bx^3}{abx+\frac{1}{2}bx^2}$. Auch iſt kein Conſtans zu addiren, weil für den Fall $x = o$, auch das ganze Integral $= o$, wie natürlich.

Da b aus der Rechnung wegfällt, ſo ſieht man hieraus, daß hier an der Breite der Figur nichts liegt, ſo daß alle, auf gleiche Art aufgehängte, gleichhohe Parallelogrammen in gleicher Zeit ſchwingen. Es ſey des Parallelogramms ganze Höhe AG = c, ſo wird für den ganzen Schwung $\frac{a^2+ac+\frac{1}{3}c^2}{a+\frac{1}{2}c}$.

Iſt $a = o$, welches ſtatt findet, wenn das Parallelogramm in der Mitte ſeiner Grundlinie, oder im Punkt A aufgehängt iſt; ſo iſt die Länge des einfachen Pendels $= \frac{2}{3}c$.

§. 104.

Es iſt einerley, ob das Parallelogramm beſagtermaßen aufgehängt, oder die Aufhängelinie GA gegen die Grundlinie der Figur DA unter einem beliebigen Winkel GAD geneigt wird. Denn die Länge des einfachen Pendels, folglich auch die Stelle des Schwingungspunkts in den Figuren bleibt einerley, wofern nur die Entfernung der Schwingungsaxe vom Schwerpunkt einerley bleibt. Denn es erhellt leicht, daß die Entfernungen aller Punkte im Paral-

lelogramm von der Axe hier und dort einerley ſind. Daher wird auch der Schwingungspunkt einerley ſeyn.

§. 105.

Das Dreyeck DBE (Taf. VIII. Fig. 7.) ſchwinge um den Punkt A nach dem Horizont, die Linie AB ſey, wie vorhin, unbiegſam; AC = a, DE = b, AB = c, AK = x, Kl = dx. Auch iſt a—c : b = x—c : fh; folglich fh $= \frac{bx - bc}{a - c}$, und $\frac{S.\,\alpha xx}{S.\,\alpha x} =$

$$\frac{S.\,\frac{bx - bc}{a - c}.\,xxdx}{S.\,\frac{bx - bc}{a - c}.\,xdx} = \frac{\frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{3}bcx^3}{a - c}}{\frac{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2}{a - c}}.$$

Für x = a wird erſters Integral $\frac{\frac{1}{4}bc^4 - \frac{1}{3}bc^4}{a - c}$, und lezters $\frac{\frac{1}{3}bc^3 - \frac{1}{2}bc^3}{a - c}$. Daher das ganze Integral =

$$\frac{\frac{1}{4}bx^4 - \frac{1}{3}bcx^3 - \frac{1}{4}bc^4 + {}^{3}bc^4}{\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}bcx^2 - \frac{1}{3}bc^3 + \frac{1}{2}bc^3};$$

dies gilt für alle Dreyecke von gleicher Höhe, weil b aus der Rechnung fällt. Sezt man alſo x = a, ſo wird die Länge des einfachen Pendels für das ganze ſchwingende

gende Dreyeck $= \frac{\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}ca^3 + \frac{1}{12}c^4}{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}ca^2 + \frac{1}{6}c^3}$. Dieſes Bruchs Zähler und Nenner durch den gemeinen Theiler $a^2 - 2ac + c^2$ dividirt, iſt die Länge des einfachen Pendels $\frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{6}ca + \frac{1}{12}c^2}{\frac{1}{3}a + \frac{1}{6}c} = \frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}$.

Iſt $c = 0$, oder das ſchwingende Dreyeck in ſeiner Spitze B aufgehängt, ſo iſt die Entfernung des Schwingungspunkts von der Spitze $B = \frac{3}{4}a$.

§. 106.

Aus §. 105. erhellt, daß der Schwingungspunkt in allen gleichhohen, in gleicher Weite von ihrer Spitze aufgehängten Dreyecken einerley iſt, wenn die Schwingungsaxe mit der Grundlinie gleichlaufend iſt.

Aber die Schwingungsaxe AF kann ſich auch gegen die Grundlinie des Dreyecks ED neigen, (Taf. VIII. Fig. 8.). Hier wird der Schwingungspunkt nicht ſo leicht beſtimmt. Man verfahre folgendergeſtalt:

Es ſey BED ein beſagtermaßen ſchwingendes Dreyeck; ſeine Lage gegen die Axe AF, nebſt allen Seiten und Winkeln, wie auch die Winkel ABE und FBD, ſind gegeben. Weil aber Bc eine Vertikallinie, oder ein Loth auf AF, ſo iſt der Winkel $EBc = 90° - ABE$, und daher auch gegeben; folglich auch die Linie Bc ſelbſt gegeben. Fället die Höhe des Dreyecks BG auf ED, ſo iſt zugleich dieſe bekannt, wie auch EG und Ec.

Dies

Dies vorausgeſezt, heiſe Bc, a; BG, h; BI, x; Ia, dx; EG, b; Ec, c; ED, f; und LH, mit ED gleichlaufend, ſey th unendlich nahe. Da alſo ähnlichliegende Linien in ähnlichen Figuren in gleichem Verhältnis gegen einander ſtehen, ſo iſt auch BG : ED = BI : LH, oder $h : f = x : \frac{fx}{h} = LH$; und LH mit dx multiplicirt, giebt das Element des Dreyecks LHht $= \frac{fxdx}{h}$. Um aber S. $_{\alpha}$xx zu bekommen, muß dieſes Element mit $MN^2 = (BK+lM)^2$ multiplicirt werden, wenn KL mit AF gleichlaufend, und M der Schwerpunkt in tLHh oder in LH.

Um aber BK+LM zu beſtimmen, iſt zu merken, daß ED : Bc = LH : Bk, oder $f : a = \frac{fx}{h} : \frac{ax}{h} =$ BK = lN. Ferner Bc : cE = BK : KL, oder $a : c = \frac{ax}{h} : \frac{cx}{h} =$ KL, und $LM = \frac{fx}{2h}$, daher $KM = \frac{fx-2cx}{2h} = Ll - Lk$.

Weiter BG : Gc = Ba : aK, oder $h : c-b = x : \frac{c-b}{h} . x = aK$. aber BAK, KLM ähnliche Dreyecke,

weil

weil die Linie MlN mit BK parallel angenommen wird. Daher BK : aK = KM : Ml, oder $\frac{ax}{h}$: $\frac{c-b}{h}.x = \frac{fx-2cx}{2h}$: $\frac{\left(\frac{f}{2}-c\right).(c-b).x}{ah}$. Setzet $\frac{\left(\frac{f}{2}-c\right).(c-b)}{ha} = \frac{g}{h}$, ſo iſt $Ml = \frac{g}{h}.x$, und $NM = \frac{a+g}{h}.x = lx$, wenn $\frac{a+g}{h} = l$. Alſo das Element LHth in MN^2 multiplicirt $= \frac{fl^2x^3dx}{h}$, davon das Integral iſt $\frac{fl^2x^4}{4h} = S.\alpha xx$. Aber $S.\alpha x = S.\frac{flx^2dx}{h} = \frac{fl}{3h}.x^3$, folglich $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{3}{4}lx$.

Iſt ED mit AF gleichlaufend, ſo iſt auch BG = Bc, h = a; EG = Ec, c = b. Folglich g =

Dies vorausgeſezt, heiſe Bc, a; BG, h; BI, x; Ia, dx; EG, b; Ec, c; ED, f; und LH, mit ED gleichlaufend, ſey th unendlich nahe. Da alſo ähnliegende Linien in ähnlichen Figuren in gleichem Verhältnis gegen einander ſtehen, ſo iſt auch BG : ED = BI : LH, oder $h : f = x : \frac{fx}{h} = LH$; und LH mit dx multiplicirt, giebt das Element des Dreyecks $LHht = \frac{fxdx}{h}$. Um aber S. αxx zu bekommen, muß dieſes Element mit $MN^2 = (BK + lM)^2$ multiplicirt werden, wenn KL mit AF gleichlaufend, und M der Schwerpunkt in tLHh oder in LH.

Um aber BK+LM zu beſtimmen, iſt zu merken, daß ED : Bc = LH : Bk, oder $f : a = \frac{fx}{h} : \frac{ax}{h} = BK = lN$. Ferner Bc : cE = BK : KL, oder $a : c = \frac{ax}{h} : \frac{cx}{h} = KL$, und $LM = \frac{fx}{2h}$, daher $KM = \frac{fx - 2cx}{2h} = Ll - Lk$.

Weiter BG : Gc = Ba : aK, oder $h : c - b = x : \frac{c-b}{h} . x = aK$. aber BAK, KLM ähnliche Dreyecke,

weil

weil die Linie MlN mit BK parallel angenommen wird. Daher BK : aK = KM : Ml, oder $\frac{ax}{h}$: $\frac{c-b}{h}.x = \frac{fx-2cx}{2h} : \frac{\left(\frac{f}{2}-c\right).(c-b).x}{ah}$. Setzet $\frac{\left(\frac{f}{2}-c\right).(c-b)}{ha} = \frac{g}{h}$, ſo iſt $Ml = \frac{g}{h}.x$, und $NM = \frac{a+g}{h}.x = lx$, wenn $\frac{a+g}{h} = l$. Alſo das Element LHth in MN^2 multiplicirt $= \frac{fl^2x^3dx}{h}$, davon das Integral iſt $\frac{fl^2x^4}{4h} = S.\alpha xx$. Aber $S.\alpha x = S.\frac{flx^2dx}{h} = \frac{fl}{3h}.x^3$, folglich $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{3}{4}lx$.

Iſt ED mit AF gleichlaufend, ſo iſt auch BG = Bc, h = a; EG = Ec, c = b. Folglich g =

$$\left(\frac{f}{2} - c\right).(c-b) = o, \text{ und } l = \frac{a+g}{h} = \frac{a}{h} = 1.$$

Daher auch $\frac{3}{4}lx = \frac{3}{4}x$; wie in vorigem Beyſpiel gefunden worden.

Sind alſo zwey Dreyecke (Taf. VIII. Fig. 9.) wo in dem einem BGH die Grundlinie GH mit der Axe gleichlaufend, in dem andern gegen die Axe ſchief; beyder Schwerpunkt aber, und die Entfernung desſelben von der Axe einerley iſt: ſo ſchwingen auch dieſe beyden Dreyecke in gleicher Zeit. Doch iſt zu merken, daß der Schwingungspunkt M im ſchiefen Dreyeck in der auf GH ſenkrechten Linie BLC durch den Schwerpunkt L anzunehmen. Dieſes in Acht genommen, iſt der Schwingungspunkt in allen Dreyecken einerley.

§. 107.

Laßt uns überhaupt alle Kurven mit einer Axe, wie die Linie DAE (Taf. VIII. Fig. 10.) betrachten. Es ſeyn dieſe Kurven im Scheitel A aufgehängt, cA = x, und cf = y, ſo wird

$$\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{S.yxxdx}{S.yxdx}.$$

Auch iſt die Rechnung einerley, wenn die Figuren in andern Punkten aufgehängt ſind. Denn auf den Fall, wo ſie im Scheitel hängend angenommen werden, laſſen ſich nach §. 104. alle übrigen bringen. Z. B. ſey der Aufhängepunkt in c, und

Ac = a,

AC = a, ſo iſt, wie in vorigen Beyſpielen $\frac{S.\alpha xx}{S.\alpha x} = \frac{S.y\,(x+a)^2 dx + B}{S.y\,(x+a)\,dx + B}$, und dieſes Differential läßt ſich überall integriren, wenn aus der Gleichung der Kurve, y durch x beſtimmt werden kann.

§. 108.

Es ſey z. B. $y = \sqrt{ax}$, wie in der in A aufgehängten einfachen Parabel, ſo iſt dieſe Größe

$$\frac{S.2\sqrt{a}.x^{\frac{5}{2}}dx}{S.2\sqrt{a}.x^{\frac{3}{2}}dx} = \frac{\frac{2}{7}.2\sqrt{a}.x^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{5}.2\sqrt{a}.x^{\frac{7}{2}}} = \frac{5}{7}x.$$

§. 109.

In allen Parabeln, die unter der Gleichung $y^m = ax$ begriffen ſind, iſt, weil $y = a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, die Entfernung des Schwingungspunkts vom Scheitel der Kurve, oder von dem angenommenen Punkt, um den die Kurve ſchwingt, $\frac{S.a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1+2m}{m}}.dx}{S.a^{\frac{1}{m}} x^{\frac{1+m}{m}}.dx}$;

davon

davon das vollſtändige Integral iſt

$$\frac{a^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{1+3m} \cdot x^{\frac{1+3m}{m}}}{a^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{1+2m} \cdot x^{\frac{1+2m}{m}}} = \frac{1+2m}{1+3m} \cdot x.$$

Iſt $m = 2$, ſo wird $\frac{1+2m}{1+3m} \cdot x = \frac{5}{7}x$, wie vorhin für die einfache Parabel.

Iſt $m = 3$, ſo bekommen wir für den Schwingungspunkt $\frac{7}{10}x$, u. ſ. f.

§. 110.

Man betrachte nun die Figuren, die wir in ihrem Scheitel hängend annahmen, als hiengen ſie in einem Punkt ihrer Grundlinie. Es ſey ABC (Taf. VIII. Fig. 4.) ein gleichſchenklicht Dreyeck, das um den Mittelpunkt D der umgekehrten Grundlinie AB ſchwingt. Nehmet $CD = a$, $AB = b$, $DL = x$, ſo iſt hier $ef = \frac{ba - bx}{a}$, und $S.\, \alpha xx = S.\, \frac{ba-bx}{a} \cdot xxdx = \frac{1}{3}\frac{b}{a} \cdot ax^3 - \frac{1}{4}\frac{b}{a} \cdot x^4$. Aber

S. ax

$$S. \alpha x = S. \frac{ba - bx}{a} . xdx = \frac{\frac{1}{2}bax^2 - \frac{1}{3}bx^3}{a}.$$ Daher die geſuchte Länge des gleichzeitigen Pendels $= \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x}$, die für das ganze Dreyeck, wo $x = a$, $\frac{1}{2}a$ wird.

§. 111.

Laßt uns annehmen, es ſey ein Stück der Figur eCF abgeſchnitten, ſo daß ef mit AB gleichlaufend, und $DL = c$: ſo erhellt, daß obiges Integral in dieſes $\frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2 - B}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}x - B}$ übergeht. Die beſtändigen Größen findet man daraus, daß für den Saz $x = c$, das Integral verſchwinden muß, ſolchergeſtalt wird der, der Linie $x = a - c$ zugehörige Theil, der ſich nach obiger Methode beſtimmen läßt, abgezogen.

§. 112.

Laßt uns, wie vorhin, den Aufhängepunkt beym wagerechten Schwung innerhalb den Figuren, z. B. in L im Dreyeck ABC (Taf. VIII. Fig. 4.) annehmen; es ſey $CD = z$, $AB = b$, $LC = c$, $Lg = x$, ſo iſt $hi = \frac{bc + bx}{a}$, ſo wie $S. \alpha xx =$

$S.\frac{bc+bx}{a}.xxdx$, und $S.\alpha x = S.\frac{bc+bx}{a}.xdx$. Dieſe Integrale werden ergänzt, wenn man die Größe addirt, worinn ſie übergehen, wenn $x = -c$ geſezt wird.

§. 113.

Es ſey ferner die ſchwingende Figur ein in B aufgehängter Kreis FABC (Taf. VIII. Fig. 11. und GBH ein ſchwingender Kreisabſchnitt; man ſucht die Länge des mit dem Abſchnitt gleichzeitigen einfachen Pendels. Es ſey $BF = a$; $Ba = x$; $ab = dx$; ſo iſt $Aa = \sqrt{(ax-xx)}$, und des Abſchnitts Element $= AC.\, ab = 2dx\sqrt{(ax-xx)}$. Daher auch $S.\alpha xx = 2S.x^2dx.\sqrt{(ax-x^2)}$ Dieſe Größe läßt ſich ſo verändern, daß ſie integrabel wird, wenn man ſezt $ax-x^2 = x^2z^2$. Da ſolchergeſtalt $x = \frac{a}{1+z^2}$, ſo wird $dx = -\frac{2azdz}{1+z^2)^2}$, und $x^2dx\sqrt{(ax-x^2} = \frac{-2a^4z^2dz}{(1+z^2)^5}$. Dieſes Integral gehört alſo, da $1+z^2$ zwey irrationale Theiler $1+z\sqrt{-1}$ und $1-z\sqrt{-1}$ hat, zu den unmöglichen logarithmiſchen Größen, die ſich, vermittelſt des Kreiſes, verzeichnen laſſen; daher wir es auch vermittelſt des Kreiſes integriren wollen.

Man

Man erhält alſo S. xxdx. $r(ax - xx) =$

$$S.\frac{(ax^3 - x^4)dx}{r(ax - xx} = S.\frac{-x^4 dx}{r(ax - xx)} + S.\frac{ax^3 dx}{r(ax - x^2)} =$$

$$S.\frac{-x^7 dx}{r(ax^7 - x^8)} (= A) + S.\frac{ax^3 dx}{r(ax - xx)} (= \alpha). A = \tfrac{1}{8}$$

$$S.\frac{(-8x^7 + 7ax^6)dx}{r(ax^7 - x^8)} - S.\frac{\tfrac{7}{8}ax^6 dx}{r(ax^7 - x^8)} = \tfrac{1}{4}$$

$$r(ax^7 - x^8 - S.\frac{\tfrac{7}{8}ax^6 dx}{r)ax^7 - \alpha^8)} (= B). B + \alpha =$$

$$S.\left[\frac{-\tfrac{7}{8}ax^5 dx}{r(ax^5 - x^6)} + \frac{ax^5 dx}{r(ax^5 - x^6)}\right] = -\frac{a}{8}$$

$$S.\frac{-x^5 dx}{r(ax^5 - x^6)} = \frac{-a}{48}; S.\frac{(-6x^5 dx + 5ax^4 dx)}{r(ax^5 - x^6} +$$

$$S.\frac{a}{48}.\frac{5ax^4 dx}{r(ax^5 - x^6)} (= C) = \frac{-a}{24} r(ax^5 - x^6)$$

$$+ C. = S.\tfrac{5}{48}.\frac{a^2 x^3 dx}{r(ax^3 - x^4)} = -\frac{5a^2}{4.48}$$

$$S.\frac{-4x^3 dx + 3ax^2 dx}{r(ax^3 - x^4)} + S.\frac{5a^3 x^2 dx}{64 r(ax^3 - x^4)} (= D)$$

$$= -\tfrac{5}{96}a^2 \surd(ax^3 - x^4) + D.\ D = \frac{5a^3}{64}.$$

$$S.\frac{xdx}{\surd ax - x^2)} = -S.\frac{5a^3}{64.^2}.\left[\frac{-2xdx + adx}{\surd(ax - x^2}\right] +$$

$$S.\frac{5a^4}{128}.\frac{dx}{\surd(ax - x^5)}(= E) = -\frac{5a^3}{64}\surd(ax - x^2)$$

$+ E.$

Aber E oder $\frac{5a^4}{128}.\ S.\frac{dx}{\surd(ax - xx)} = \frac{5a^3}{64}.$

$S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\surd(ax - xx)}$ iſt des Kreiſes Bogen, deſſen Abſciſſe BD $= x$, und daher der Bogen BG.

Alſo $\tfrac{1}{2}\ S.\ \alpha xx = \tfrac{1}{4}\surd(ax^7 - x^8) - \frac{a}{24}\surd(ax^5 - x^6)$

$-\tfrac{5}{96}a^2\surd(ax^3 - x^4) - \frac{5a^3}{64}\surd(ax - x^2) +$ Bogen BG. $\tfrac{5}{64}a^3$.

Weit kürzer wird dieſe Function, wenn man ſtatt des Abſchnitts den ganzen Kreis ſezt. Dann wird $x = a$, und alle Glieder dieſer Gleichung, auſer das lezte, verſchwinden, daß alſo für den ganzen Kreis $S.\ \alpha xx = \tfrac{5}{32}a^3$. BHF.

Da

Da nun $S. \alpha x = \frac{Pa^2}{4}$, wenn P den halben Umkreis bedeutet, §. 157. Vorl. ſo iſt die Entfernung des Schwingungspunkts im ganzen Kreis vom Scheitel B, worinn er aufgehängt iſt, oder die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels $= \frac{5}{8} a$.

Im Halbkreis aber wird die Entfernung des Schwingungspunkts von einem Punkt im Umfang, eben ſo, wie in den übrigen Abſchnitten, aus den Größen $S. \alpha xx$ und $S. \alpha x$ beſtimmt, worinn x den Bedingungen der Aufgabe gemäs beſtimmt wird.

§. 114.

Eben ſo wird auch der Schwingungspunkt des, in andern Punkten, entweder inner- oder auſerhalb der Figur, aufgehängten Kreiſes beſtimmt. Allemal kömmt es nur darauf an, daß die allgemeine Gleichung integrirt wird

$$S. \alpha xx = S. \frac{(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\sqrt{(ax - xx)}} . dx.$$

Wobey wir uns aber nicht aufhalten, ſondern zu Erklärung einer Methode fortgehen, wodurch die Länge des einfachen Pendels weit leichter beſtimmt wird, und die für jeden Aufhängepunkt allgemein iſt, wenn nur für einen einzigen das einfache Pendel gegeben iſt; auf was für Art auch die Figuren ſchwingen.

§. 115.

Um dieſe allgemeine Methode zu erklären, laßt uns eine Materie FGH (Taf. VIII. Fig. 12.), von welcher Geſtalt und Größe man will, im Punkt A aufgehängt denken, und die Linie ACB durch der Figur Schwerpunkt C als die Länge des einfachen Pendels annehmen. Auch ſey α ein unendlich kleiner Theil der Materie, $S.\alpha = P$; $AC = a$; $AD = x$; ſo iſt nach §. 94. $AB = S.\frac{\alpha xx}{aP} = S.\frac{(DE^2 + AE^2)\alpha}{aP}$, welche Summe gleich dieſer $S.\frac{(DC^2 - CE^2 + AE^2)\alpha}{aP}$; und DE ſenkrecht auf AB geſezt, =

$$S.\frac{(DC^2 + AC\,(AC - 2CE))\,\alpha}{aP} =$$

$S.\frac{(DC^2 + AC^2 - 2AC.\,CE)\alpha}{aP}$. Da aber die Effekte der Schwere, die ſich wie $CE.\alpha$ verhalten, auf beyden Seiten des Schwerpunkts einander zerſtören müſſen, §. 128. Vorl. wo anders in C Gleichgewicht ſeyn ſoll, ſo wird $S.\frac{\alpha xx}{aP} = S.\frac{(DC^2 + AC^2)\alpha}{aP}$

$$= S.\frac{DC^2.\alpha + S.a^2\alpha}{aP} = S.\frac{DC^2.\alpha + a^2P}{aP} = a +$$

S.$\frac{DC^2.\alpha}{aP}$. Da aber in einerley Syſtem S. $DC^2.\alpha$ unveränderlich und beſtändig einerley iſt, ſo ſchließt man daraus, daß S.$\frac{DC^2.\alpha}{aP}$ + a oder S.$\frac{xx.a}{aP}$ d. i. die Länge des einfachen Pendels ſich auf keine Weiſe ändern kann, ſo lange ſowohl die Entfernung des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt, oder a, als auch die Schwungebene einerley bleibt.

§. 116.

Iſt alſo eine gegebene Figur, z. B. EAD (Taf. VIII. Fig. 13.) in einem Punkt o auſerhalb der Axe pAg aufgehängt, ſo daß die Linie on durch den Schwerpunkt geht; ſo beſchreibet mit dem Halbmeſſer no den Kreisbogen po, und es iſt einerley, ob der ſchwingende Körper in o oder in p aufgehängt wird. §. 115.

§. 117.

Aus der Gleichung S.$\frac{xx.\alpha}{aP}$ = a + S.$\frac{DC^2.\alpha}{aP}$ laſſen ſich auch allemal die Längen der einfachen Pendeln beſtimmen, die mit den, bald in größern, bald in kleinern Abſtand vom Schwerpunkt, aufgehängten Körpern in gleicher Zeit ſchwingen. Denn die Länge des einfachen Pendels übertrift a, d. i. die Entfernung des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt, um den

§. 115.

Um dieſe allgemeine Methode zu erklären, laßt uns eine Materie FGH (Taf. VIII. Fig. 12.), von welcher Geſtalt und Größe man will, im Punkt A aufgehängt denken, und die Linie ACB durch der Figur Schwerpunkt C als die Länge des einfachen Pendels annehmen. Auch ſey α ein unendlich kleiner Theil der Materie, $S.\alpha = P$; $AC = a$; $AD = x$; ſo iſt nach §. 94. $AB = S.\frac{\alpha xx}{aP} = S.\frac{(DE^2 + AE^2)\alpha}{aP}$, welche Summe gleich dieſer $S.\frac{(DC^2 - CE^2 + AE^2)\alpha}{aP}$; und DE ſenkrecht auf AB geſezt, $=$

$$S.\frac{(DC^2 + AC\,(AC - 2CE))\,\alpha}{aP} =$$

$S.\frac{(DC^2 + AC^2 - 2AC.\,CE)\,\alpha}{aP}$. Da aber die Effekte der Schwere, die ſich wie $CE.\,\alpha$ verhalten, auf beyden Seiten des Schwerpunkts einander zerſtören müſſen, §. 128. Vorl. wo anders in C Gleichgewicht ſeyn ſoll, ſo wird $S.\frac{\alpha xx}{aP} = S.\frac{(DC^2 + AC^2)\alpha}{aP}$

$$= S.\frac{DC^2.\alpha + S.a^2\alpha}{aP} = S.\frac{DC^2.\alpha + a^3P}{aP} = a +$$

$S.\frac{DC^2.\alpha}{aP}$. Da aber in einerley Syſtem $S.DC^2.\alpha$ unveränderlich und beſtändig einerley iſt, ſo ſchließt man daraus, daß $S.\frac{DC^2.\alpha}{aP} + a$ oder $S.\frac{xx.a}{aP}$ d. i. die Länge des einfachen Pendels ſich auf keine Weiſe ändern kann, ſo lange ſowohl die Entfernung des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt, oder a, als auch die Schwungebene einerley bleibt.

§. 116.

Iſt alſo eine gegebene Figur, z. B. EAD (Taf. VIII. Fig. 13.) in einem Punkt o auſerhalb der Axe pAg aufgehängt, ſo daß die Linie on durch den Schwerpunkt geht; ſo beſchreibet mit dem Halbmeſſer no den Kreisbogen po, und es iſt einerley, ob der ſchwingende Körper in o oder in p aufgehängt wird. §. 115.

§. 117.

Aus der Gleichung $S.\frac{xx.\alpha}{aP} = a + S.\frac{DC^2.\alpha}{aP}$ laſſen ſich auch allemal die Längen der einfachen Pendeln beſtimmen, die mit den, bald in größern, bald in kleinern Abſtand vom Schwerpunkt, aufgehängten Körpern in gleicher Zeit ſchwingen. Denn die Länge des einfachen Pendels übertrift a, d. i. die Entfernung des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt, um den

Theil $S.\frac{DC.^2\alpha}{aP}$, woraus erhellt,

1.) daß die Länge des einfachen Pendels beſtändig größer iſt, als die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt.

2.) Da dieſer Linien Unterſchied $S.\frac{DC^2.\alpha}{aP}$ in einerley Körperſyſtem unveränderlich iſt; ſo verhält ſich auch dieſer Unterſchied, oder die Entfernung des Schwerpunkts vom Schwingungspunkt, wie $\frac{1}{a}$, wenn man a als veränderlich betrachtet, weil $S.\frac{DC^2.\alpha}{P}$ keine Funktion von a. **Wird alſo ein Körper in verſchiedenen Entfernungen aufgehängt; ſo verhält ſich die Entfernung des Schwerpunkts vom Schwingungspunkt umgekehrt, wie die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt.**

§. 118.

Der große Nutzen dieſes Satzes, bey Beſtimmung des Schwingungspunkts, erhellt leicht. Und das nicht allein daraus, daß die in geneigter Lage aufgehängten Figuren, in welchem Fall die Sache nicht ohne Schwierigkeit zu erfahren iſt, wie Fig. 13. Taf. VIII. ſich vermittelſt deſſelben auf eine Axe, d. i. auf eine Linie bringen laſſen, welche die Elemente der Figur

Figur in gleiche Hälften ſchneidet (§. 116.); ſondern vorzüglich daraus, daß man nun, um den Schwingungspunkt zu finden, ihn nur in einem einzigen leichten Fall ſuchen darf, da er dann zugleich in allen übrigen Fällen bekannt iſt. Denn daß der Schwingungspunkt der Figur, ſie mag ſich um ihren Schwerpunkt in derſelben Ebene bewegen, wie ſie will, doch einerley bleibt, iſt aus dem im §. 115. — 117. ſchon Erwieſenem klar.

§. 119.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir dieſes mit einigen Beyſpielen erläutern:

1.) Aus §. 105. iſt bekannt, daß das im Punkt B aufgehängte Dreyeck DBE (Taf. VIII. Fig. 7.) ſeinen Schwingungspunkt L in der Weite BL $= \frac{3}{4}$ BC hat. Hieraus findet man die Weite dieſes Punkts, wenn die Figur in einem andern Punkt A aufgehängt iſt. Denn es ſey BC $= a$, AB $= c$, ſo iſt nach §. 117. 2.

$c + \frac{2}{3}a : \frac{2}{3}a = \frac{1}{12}a$ zur Entfernung des Schwingungspunkts vom Schwerpunkt $= \frac{aa}{18(c + \frac{2}{3}a)}$, daher die Länge des einfachen Pendels $= c + \frac{2}{3}a + \frac{aa}{18(c + \frac{2}{3}a)} = \frac{3a^2 + 6c^2 + 8ac}{6c + 4a}$; ſezt man a ſtatt $c + a$, ſo wird ſie $\frac{3a^2 + 2ca + c^2}{4a + 2c}$, welches mit §. 105. genau übereinkömmt.

 2.) Fer-

2.) Ferner wird auch die Länge des einfachen Pendels ohne Mühe beſtimmt, wenn des Dreyecks Grundlinie umgekehrt wird, wie Fig. 4. wo wir es im Punkt D aufgehängt annehmen. Denn wird das Dreyeck in der Spitze B aufgehängt; ſo iſt die Länge des einfachen Pendels $\frac{3}{4}$ BC. Und weil die Länge des einfachen Pendels einerley iſt, das Dreyeck mag in ſeiner Grundlinie oder in ſeiner Spitze hängen, wenn ſich nur die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt nicht ändert, §. 115. 116.; ſo folgt auch, daß, wenn das Pendel in p anfgehängt wird, ſo daß pD $= \frac{1}{3}$ DC $= \frac{1}{3}$ a, die Entfernung des Schwingungspunkts vom Punkt p $= \frac{3}{4}$a. Hieraus wird aber dieſes Punkts Entfernung vom Punkt D leicht beſtimmt, wenn die Figur in dieſem Punkt D aufgehängt wird. Denn nach §. 117. 2. iſt

$\frac{1}{3}$ a : $\frac{2}{3}$ a $= \frac{1}{12}$ a zur Entfernung des Schwingungspunkts vom Schwerpunkt, die alsdenn vorhanden, wenn die Figur in D aufgehängt iſt. Daher dieſe Entfernung $= \frac{1}{6}$ a, und die ganze Länge des einfachen Pendels $= \frac{1}{3}$ a $+ \frac{1}{6}$ a $= \frac{1}{2}$ a $= \frac{1}{2}$DC, und dieſe Länge iſt die Entfernung des Schwingungspunkts vom Aufhängepunkt D im Dreyeck ACB.

3.) Hieraus findet man auch leicht den Schwingungspunkt für jeden Aufhängepunkt E, wenn die Figur umgekehrt wird, ſo daß die Grundlinie zu oberſt kommt, wie Taf. VIII. Fig. 4.. Denn es ſey DC $=$ a, ED $=$ c, ſo iſt nach §. 117. 2.

c $+ \frac{1}{3}$ a : $\frac{1}{3}$ a $= \frac{1}{6}$ a zum Unterſchied der Entfernungen des Schwingungspunkts und Schwerpunkts vom Aufhängepunkt; dieſer iſt alſo $=$

$\frac{a^2}{18c+6a}$. Hat demnach die Figur beſagte Lage, und iſt im Punkt E aufgehängt; ſo iſt die Länge des ganzen einfachen Pendels $= \frac{a^2+6cc+4ac}{6c+2a}$.

4.) Eben dieſes findet auch beym Kreis ſtatt. (Taf. VIII. Fig. 11.) Denn aus der bekannten Länge des einfachen Pendels $= \frac{5}{8}$ BF für den im Punkt des Umfangs B aufgehängten Kreis, findet man dieſe Länge ſehr leicht für jeden andern Punkt I, wenn man nach §. 117. 2. unter Vorausſetzung BF $=$ a, und BI $=$ c, ſchließt:

$c+\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$ zum Unterſchied der Entfernungen des Schwerpunkts und Schwingungspunkts vom Aufhängepunkt $= \frac{a^2}{16c+8a}$. Daher iſt für den im Punkt I aufgehängten Kreis die geſuchte ganze Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels $= \frac{1}{2}a +$

$$c + \frac{a^2}{16c+8a} = \frac{8ac+5a^2}{16c+8a} + c.$$

§. 120.

Noch iſt folgendes zu merken: Der Aufhängepunkt läßt ſich mit dem Schwingungspunkt, und dieſer mit jenem verwechſeln, ohne daß eine Aenderung in der Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels hieraus entſteht.

Nehmet an, L (Taf. VIII. Fig. 7.) ſey der Schwingungspunkt, wenn A der Aufhängepunkt; verwechſelt nun dieſe Punkte L und A, und laßt die ſchwingende Figur in L aufgehängt ſeyn; ſo iſt, wenn der Schwerpunkt in M, nach §. 117. 2.

$$\frac{1}{AM} : LM = \frac{1}{LM}$$ zum Unterſchied der Entfernung des Schwingungspunkts, und der Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt. Daher dieſer Unterſchied = AM; addiren wir hierzu LM, d. i. die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt, ſo bekommen wir die Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels für die in L aufgehängte Figur = AM + LM = AL. Dieſe Länge iſt aber mit der Länge des einfachen Pendels einerley, wenn der Aufhängepunkt in A, und in L der Schwingungspunkt.

§. 121.

Das bisher erklärte dient uns auch bey Betrachtung des **Schwungs der Figuren nach den Seiten**; hier laſſen ſich die nämlichen Gründe der Rechnung anwenden, wie aus den Beweiſen erhellt. §. 98. Zuſ. haben wir bereits die Art und Weiſe vorgetragen, nach welcher dieſe leztere Gattung des Schwungs bey **geraden Linien** zu beſtimmen iſt; hier wollen wir weiter fortgehen, und eben dieſes beym Schwung der **Figuren** zeigen, vorher aber noch folgendes beyfügen. Nehmet eine Figur DAE (Taf. IX. Fig. 4.) welche man will, und ziehet darinn die beyden Ordinaten dg und fh, die wir y nennen wollen, deren

Abſtand

Abſtand gh = dx (wenn Ag = x) unendlich klein iſt; ſo iſt aus §. 156. Vorl. bekannt, daß hier das unendlich kleine Parallelogramm dnkf in unzählige andere Elementarparallelogrammen getheilt anzuſehen, deren Flächen von ihren Schwerpunkten um nichts verſchieden ſind: denn dieſe Parallelogrammen in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Aufhängepunkt A zu multipliciren, und die Summe der daher entſtehenden Produkte durch die Summe der Preſſungen, oder, welches einerley, durch die Summe der unendlich kleinen Gewichte in die Entfernung ihres gemeinſchaftlichen Schwerpunkts vom Punkt A multiplicirt, zu dividiren. Dieſe Elementarparallelogrammen ſind hier um ſo mehr in Betracht zu ziehen, da die Gewalt der Theilchen des Elements dnkf hier ungleich iſt, die beym wagerechten Schwung gleich war: denn hier hat jedes Theilchen ſeine eigene und verſchiedene Bewegung.

Jedes dieſer Elementarparallelogrammen, wie B oder L, heiſe Z; man ſoll die Summe aller in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt A multiplicirt beſtimmen. Zu dem Ende denke man ſich y veränderlich, und zu der nämlichen Abſciſſe Ag gehörig; ſo iſt allgemein BA $= \sqrt{(x^2+y^2)}$: wie auch gh = dx, ſo die Höhe eines ſolchen Elementarparallelogramms B oder L, deſſen Breite dy, weil y in dieſer Rückſicht veränderlich geſezt worden. Daher die Summe der Produkte aller Elementarparallelogrammen, die das Parallelogramm dfkn ausmachen, in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt A = 2 S. dxdy (x^2y^2); hier ſind aber y und

dy

dy veränderlich, wenn x und dx unveränderlich. Daher auch $2\ S.\ dxdy\ (x^2 + y^2) = 2x^2ydx + \frac{2}{3}y^3dx$.

Dieſes Integral dient zu Beſtimmung des ganzen Parallelogramms, deſſen einzelne Theile in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt A multiplicirt ſind.

Nun iſt noch übrig, beyde Größen x und y durch die ganze Figur, wie ſonſt gewöhnlich, veränderlich zu nehmen; ſo läßt ſich die Summe der Produkte aller Parallelogrammen dnfk in die Quadrate ihrer Entfernungen vom Punkt A beſtimmen. Und da das Produkt, aus der ganzen Summe, in die Entfernung ihres Schwerpunkts vom Punkt A, hier bey den nach den Seiten ſchwingenden Figuren, wie vorhin, bleibt, ſo iſt

$$\frac{S.\ 3xx}{S.\ 3x} = \frac{S.\ x^2ydx + \frac{1}{3}y^3dx}{S.\ xydx}.$$

§. 122.

Der erſte Theil dieſes Integrals $\frac{S.\ x^2ydx}{S.\ xydx}$ iſt mit dem Integral beym wagerechten Schwung §. 107. einerley. Daher iſt zu der oben gefundenen Länge des Pendels nur der andere Theil $\frac{S.\ \frac{1}{3}y^3dx}{S.\ xydx}$ zu addiren, um die Länge bey dieſem Schwung zu finden. Wie dies geſchieht, wollen wir an einigen nützlichen Beyſpielen ſehen.

Z. B.

Z. B. ſey die ſchwingende Figur ein in C aufgehängtes Rechteck. (Taf. VIII. Fig. 6.) AC = a, Ae = x, ef = dx, AG = c, BD = b; ſo iſt (§. 103.)

$$\frac{S.x^2ydx}{S.xydx} = \frac{a^2 + ac + \frac{1}{3}C^2}{a + \frac{1}{2}c}.$$ Ueberdies findet man

$$\frac{S.\frac{1}{3}y^3 dx}{S.xydx.} = \frac{S.\frac{1}{24}b^3 dx}{S.\frac{1}{2}bdx(x+a)},$$ weil $y = \frac{1}{2}b$; und

x = c geſezt, für das ganze Parallelogramm $\frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c + a}$.

Hieraus erhellt, daß bey dieſem Schwung allerdings an der Breite der Figuren liegt, weil b nicht, wie oben beym wagerechten Schwung, aus der Rechnung fällt.

Iſt a = o, ſo wird die Länge des einfachen Pendels $= \frac{\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{12}b^2}{\frac{1}{2}c}$, d. i. wenn man den Aufhängepunkt in die Mitte der Grundlinie A ſezt.

§. 123.

Etwas mehr Schwierigkeit hat die Sache, wenn das Rechteck DBEF in einem Winkel z. B. in D aufgehängt iſt: da aber §. 115. erwieſen iſt, daß der Schwingungspunkt, und die Länge des einfachen Pendels einerley bleibt, wenn ſowohl die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt, als die Schwungebene einerley bleiben; ſo ſehen wir, daß ſich die Rechnung für die Axe AG führen läßt, die ſonſt

ſonſt für die halbe Diagonale pD anzuſtellen wäre. Hier muß man aber $pD = pK$ nehmen, wenn der Schwerpunkt in p, und K der Aufhängepunkt.

Dies vorausgeſezt, ſey $BD = b$, $AG = c$, $AK = a = Dp - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{(c^2+b^2)} - \frac{1}{2}c$; ſo iſt die Entfernung des Schwingungspunkts §. 122. $=$

$$\frac{a^2+ac+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{12}b^2}{a+\frac{1}{2}c},$$

welche Größe, wenn man für a deſſen Werth $\frac{1}{2}\sqrt{(c^2+b^2)} - \frac{1}{2}c$ ſezt, übergeht in

$$\frac{\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}b^2}{\frac{1}{2}\sqrt{(c^2+b^2)}} = \frac{2}{3}\sqrt{(c^2+b^2)} = \frac{2}{3}ED,$$

d. i. $\frac{2}{3}$ der ganzen Diagonale.

§. 124.

Es ſey die nach den Seiten ſchwingende Figur ein gleichſchenklicht Dreyeck, (Taf. VIII. Fig. 9.) in ſeiner Spitze B aufgehängt, $BC = a$, $HG = b$, $BC = x$, ſo iſt $gh = \frac{bx}{a} = 2y$. Daher, wie aus §. 105. bekannt, $\frac{S.x^2ydx}{S.xydx} = \frac{3}{4}a$. Aber $\frac{S.\frac{1}{3}y^3dx}{S.xydx} =$

$$\frac{S.\frac{1}{24}\frac{b^3x^3}{a^3}.dx}{S.\frac{bx^2}{2a}.dx} = \frac{\frac{1}{16}b^3x}{a},$$

und für das ganze

Dreyeck

Dreyeck $\frac{b^2}{16a}$. Daher die geſuchte ganze Länge des einfachen Pendels $\frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$.

§. 125.

Hängt aber das Dreyeck im Mittelpunkt ſeiner Grundlinie D, (§. 119. 2.) ſo iſt der erſte Theil des Integrals $= \frac{1}{2}a$; der andere aber, nämlich $\frac{S.\frac{1}{3}y^3dx}{S.xydx}$, wenn $DC = a$, $AB = b$, $CL = x$, $ef = \frac{bx}{a}$, iſt

$\frac{S.\frac{1}{3}b^3x^3dx}{8a^3}$ dividirt durch $S.(a-x)\frac{\frac{1}{2}bx}{a}.dx$, oder

$\frac{\frac{1}{12}b^3x^4}{8a^3} : \left(\frac{\frac{1}{2}abx^2}{2a} - \frac{\frac{1}{3}bx^3}{2a}\right)$, welches $x = a$ geſezt, für das ganze Dreyeck in $\frac{b^2}{8a}$ übergeht. Folglich iſt die Länge des einfachen Pendels $\frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a}$.

§. 126.

Es ſey das rechtwinklichte gleichſchenklichte Dreyeck (Taf. VIII. Fig. 14.) im Mittelpunkt A

ſeiner Grundlinie aufgehängt, ſo iſt (§. 125.) $CA = \frac{1}{2}b = AB = a$, und daher die Länge des einfachen Pendels $= \frac{1}{2}a + \frac{b^2}{8a} = a$. Alſo die Höhe AB mit der Länge des Pendels einerley. Denn $\frac{1}{4}b^2 = a^2$, weil $CBD = 90^\circ$.

Hängt aber ein ſolches rechtwinklicht gleichſchenklicht Dreyeck in ſeiner Spitze, ſo wird die Länge des einfachen Pendels $= \frac{3}{4}a + \frac{b^2}{16a}$ (§. 124.) $= a$, weil $b = 2a$; hieraus erhellt, daß es in dieſem Fall einerley iſt, ob das Dreyeck im Mittelpunkt der Grundlinie A, oder in der Spitze des rechten Winkels B aufgehängt wird.

§. 127.

Was die übrigen Fälle anbetrifft, iſt zu merken, daß, was §. 115 — 117. ausgeführt worden, beym Seitenſchwung eben ſo, wie beym wagerechten ſtatt findet, wie §. 119. erwieſen. Wir haben alſo bey Betrachtung des Seitenſchwungs eben den Vortheil wie oben. Auch hier läßt ſich der Schwingungspunkt in jedem Fall beſtimmen, wenn er vorher in einer einzigen Lage des Aufhängepunkes, wozu man die leichteſte wählen kann, beſtimmt worden.

Iſt der Schwingungspunkt in den ordentlichen geradlinigten Figuren, z. B. im gleichſchenklichten Dreyeck GBH (Taf. VIII. Fig. 9.) gefunden; ſo iſt er zugleich in allen andern unordentlichen Figuren

ren von eben der Gattung, z. B. im Dreyeck BED, beſtimmt; wo aber ſowohl die Höhe BC, als die Grundlinie ED, in beyden Dreyecken einerley ſeyn müſſen. Denn der Schwingungspunkt in geraden Linien beym Seitenſchwung bleibt einerley, die Linien mögen wagerecht oder ſchief gegen den Horizont liegen. §. 100. Ziehet alſo im Dreyeck BED die Horizontallinie GH durch die Mitte C der Linie ED, ſo daß CG = CE, und DC = CH; ſo wird ED in gleicher Zeit mit GH ſchwingen, ecd parallel mit ED, auch in gleicher Zeit mit gch, parallel mit GCH; und dies wird überall in beyden Figuren ſtatt finden, folglich muß auch in beyden einerley Schwingungspunkt ſeyn. Eben dieſer Schluß läßt ſich auch bey andern Figuren führen, woraus geſchloſſen wird, daß, wo der Ort des Schwingungspunkts in ſchiefliegenden Figuren zu beſtimmen, man ihn dafür in geradliegenden Figuren, d. i. in ſolchen, die von ihrer Axe in gleiche und ähnliche Theile getheilt werden, beſtimmen kann.

§. 128.

Es ſey die ſchwingende Figur eine Parabel, ſo iſt nach §. 108. der erſte Theil des Integrals $\frac{5}{7}x$.

Der andere Theil aber $\frac{S.\frac{1}{3}y^3dx}{S.xydx} = \frac{S.px\sqrt{px}.dx}{3\,S.x\sqrt{px}.dx} = \frac{\frac{1}{3}\frac{2}{5}px^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}p$. Daher die geſuchte Länge des Pendels $\frac{1}{3}p + \frac{5}{7}x$.

 §. 129.

§. 129.

Es ſey GBH (Taf. VIII. Fig. 11.) ein Kreisabſchnitt, und in B der Aufhängepunkt, wie oben §. 113. Schwingt nun dieſes ſeitwärts, ſo wird $S.\frac{1}{3}y^3dx$, oder mit Weglaſſung des Bruchs, $S.y^3dx = S.(ax-xx)\sqrt{(ax-xx)}\,dx = \frac{S.(a^2x^2-2ax^3+x^4)dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. Dieſes Differentials Integral wird auf eben die Art, wie §. 113. gefunden, und es entſteht $\frac{1}{3}S.y^3dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{(ax^7-x^8)}}{4} + \frac{3a\sqrt{(ax^5-x^6)}}{8} - \frac{a^2\sqrt{(ax^3-x^4)}}{32} - \frac{3a^3\sqrt{(ax-xx)}}{64} + S.\frac{3}{64}a^3.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-x^2)}}\right)$. Aber

$$S.\frac{3}{64}a^3.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{3}{64}a^3.BG,$$ wenn $BD = x$.

Wir haben alſo den Zähler des Bruchs, der die Entfernung des Schwingungspunkts vom Aufhängepunkt B, im Abſchnitt GBH ausdrückt.

Es erhellt aber ſogleich, daß für den ganzen Kreis, oder für $x = a$, $\sqrt{(axx-xx)}$ überall verſchwindet, und folglich $\frac{1}{3}S.\frac{3}{64}a^3.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ das

ganze

ganze Integral ausdrückt. Es ſey alſo p der Umkreis, ſo wird das Integral $\frac{1}{3}(\frac{3}{64}a^3.\frac{1}{2}p)$; dieſes durch das halbe Gewicht des ganzen Kreiſes, in den Halbmeſſer, oder in die Entfernung des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt oder des Kreiſes Mittelpunkt, multiplicirt, d. i. durch S.xydx dividirt, wird

$$\frac{S.\frac{1}{3}y^3dx}{S.xydx} = \frac{\frac{1}{64}.\frac{1}{2}a^3p}{\frac{1}{2}(\frac{1}{8}a^2p)} = a.\frac{1}{8}$$

Die §. 113. gefundene Länge des gleichzeitigen einfachen Pendels beym wagerechten Schwung war $= \frac{5}{8}a$. Daher die Länge des einfachen Pendels beym Seitenſchwung $= \frac{5}{8}a + \frac{1}{8}a = \frac{3}{4}a$, d. i. $\frac{1}{4}$ des Durchmeſſers.

§. 130.

Iſt CAB ein Kreisausſchnitt, (Taf. VIII. Fig. 15) im Mittelpunkt des Kreiſes C aufgehängt; ſo leidet die Rechnung keine Schwierigkeit. Man erinnere ſich nur, was wir §. 107. Vorl. bereits erwieſen, daß, wenn ADB = A; AB = C, und der Halbmeſſer = R, die Entfernung des Schwerpunkts im Ausſchnitt vom Mittelpunkt des Kreiſes C $= \frac{2}{3}.\frac{C.R}{A}$.

Nach dieſer Vorausſetzung wird der Schwingungspunkt beſtimmt, ohne daß wir die Regel §. 121. brauchen. Denn halbirt die Linie CD den Ausſchnitt, und beſchreibt man mit einem beliebigen Halbmeſſer, z. B. Cf, aus dem Mittelpunkt C einander unendlich nahe Kreisbögen ab, cd; ſo iſt die Geſchwindigkeit

in allen Theilen des Elements abdc überall einerley, und f des Elements Schwerpunkt. Es ſey CF = x, ſo iſt CD : ADB = Cf : afb, oder $R : A = x : \frac{Ax}{R}$, und $\frac{Ax}{R} dx$ iſt das Element abdc. Daher S. xx Z =

$$S. \frac{Ax^3 dx}{R} = \frac{\frac{1}{4}Ax^4}{R}$$, und für den ganzen Ausſchnitt, wo x = CD = R, $= \frac{1}{4}AR^3$.

Demnach $$\frac{S. xx. Z}{S. x. Z} = \frac{\frac{1}{4}AR^3}{\frac{\frac{2}{3}CR.\frac{1}{2}AR}{A}} = \frac{3}{4}\frac{AR}{C}.$$

Und dies iſt die Länge des einfachen Pendels, oder die Entfernung des Schwingungspunkts vom Aufhängepunkt im Kreisausſchnitt.

§. 131.

Die Pendeln, die wir in der Ausübung anwenden, ſind Körper; daher muß auch der Schwingungspunkt in den Körpern gefunden werden. Vorzüglich wollen wir die Körper betrachten, die durch Umdrehung einer Figur um eine Axe erzeugt werden. Hier ſind zuförderſt, wie man aus dem vorhergehenden ſieht, die Trägheiten zu beſtimmen, die ſich beym Schwung gleichförmig bewegen; da ſich dann der Schwingungspunkt der, durch Umdrehung

drehung einer Figur um ihre Axe erzeugten Körper beſtimmen läßt. Die Trägheiten, deren Bewegung gleichförmig iſt, werden gefunden, wenn man vermittelſt zwoer Differential- und Integralgleichungen, wie §. 121. bey den Figuren gelehrt worden, die Aufgaben auf die allgemeine Regel §. 94. anwendet: wie dieſes geſchieht, wollen wir in folgenden erklären:

Bekanntlich iſt in ſolchen Körpern, die durch Umdrehung einer Figur um ihre Axe entſtehen, jeder mit der Grundfläche des Körpers gleichlaufende Schnitt ein Kreis.

Es ſey alſo ABC (Taf. IX. Fig. 1,) ein ſolcher Körper, und EFGH ein mit der Grundfläche BgCK gleichlaufender Schnitt. Schwingt nun ein Punkt in EFGH, z. B. p, und zieht man den Durchmeſſer EG, ſo iſt S. 3. Ap^2 (wenn Z jeder Punkt der Materie) die Summe aller kleinen Maſſen des Kreiſes EFGH, jede in das Quadrat ihrer Entfernung vom Aufhängepunkt A multiplicirt, und bedeutet daher eben das, was oben S. Z xx.

Aber $Ap^2 = AD^2 + Dp^2$. Es ſey alſo $AD = x$; Dc oder $Dp = v$; die Ordinate $ab = y$; $ac = dv$; ſo wird S. Z. $Ap^2 = S. Z (x^2 + v^2) = S. Zx^2 + S. Zv^2$.

Aber x in Rückſicht der Schwingungen der kleinen Maſſen des Kreiſes EFGH als beſtändig anzuſehen. Nehmen wir alſo an, ein Trägheitselement im Halbkreiſe, z. B. p, beſtehe aus der ſenkrechten Ordinate durch ac multiplicirt, d. i. aus ydv, ſo geſchieht der Schwung, in Anſehung x, eben ſo, als wenn die Bewegung aller Punkte einerley wäre, wie wir oben beym wagerechten Schwung gezeigt haben. Man darf alſo nur in der Gleichung x^2 S. Z $= x^2$ S. ydv,

die Summe aller Maſſen ſetzen, die, wie man leicht ſieht, dem Quadranten des Kreiſes FGHE gleich iſt.

Es ſey das Verhältnis des Umkreiſes zum Durchmeſſer, p : 1; ſo iſt für den Durchmeſſer 2v der Umkreis $= 2pv$, und $\frac{v^2p}{4} =$ EHD. Daher x^2 $S.\mathfrak{z} = \frac{p}{4}.\, x^2v^2$, und für den ganzen Kreis EHGF, px^2v^2, welches in px^2r^2 übergeht, wenn man ſtatt v ſezt DE $= r$.

Bisher betrachteten wir alſo die Maſſen nach der Linie ab liegend, die in wagerechter Bewegung, in Anſehung x einerley Schwung haben: und ſchäzten ihr Moment aus den Quadraten der Entfernungen. Was aber $S.\mathfrak{z}v^2 = S.\, ydv.\, v^2$ betrifft, ſo iſt dieſe Summe dergeſtalt zu beſtimmen, daß die Trägheiten als ſchwere Körperchen anzuſehen, die nach der Linie v liegen, und deren Schwung in jedem Punkt, wie a und c, veränderlich, weil v eine veränderliche Größe. Aber $y = \sqrt{(r^2 - v^2)}$, daher $S.\, ydv.\, v^2$

$$= S.\, v^2dv.\, \sqrt{(r^2 - v^2} = \frac{S.\,(v^2r^2dv - v^4dv}{\sqrt{(r^2 - v^2)}},$$ davon das Integral iſt $\frac{1}{4}\sqrt{(r^2v^6 - v^8)} - \frac{1}{8}r^2$ $\sqrt{(r^2v^2 - v^4)} + \frac{S.\,\frac{1}{8}r^4dv}{\sqrt{(r^2 - v^2)}}$. Aber $\frac{rdv}{\sqrt{(r^2 - v^2)}}$ iſt

der

der Bogen für die im Kreiſe, deſſen Halbmeſſer = r, aus dem Mittelpunkt gezogene Abſciſſe v.

Sezt man daher v = r, ſo wird dieſer Bogen der Quadrant des Kreiſes HE. Folglich $\frac{1}{8}r^3.HE$

$$= \frac{1}{4}r^2.HE.\frac{r}{2} =$$ der Fläche des Quadranten

EHD. $\frac{1}{4}r^2$, und die ganze Kreisfläche, wie vorhin in S. Zx^2 genommen, iſt das ganze Integral = EHD. r^2.

Denn iſt r = v, ſo wird $\frac{1}{4}\surd(r^2v^6 - v^8) - \frac{1}{8}r^2\surd(r^2v^2 - v^4) = 0$, und daher das ganze Integral S. Zv^2 = EHD. r^2.

Bedeutet 1 : p das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreis, ſo iſt die Kreisfläche = r^2p, und den Halbmeſſer = r geſezt, EHD. $r^2 = \frac{1}{4}pr^4$ = S. Zv^2.

Daher S. $Z(x^2 + v^2) = px^2r^2 + \frac{1}{4}pr^4$. Und dies iſt das Moment aller Maſſen der Kreisfläche EFGH, jede in das Quadrat ihrer Entfernung vom Aufhängepunkt multiplicirt.

Multipliciren wir dieſe Kreisfläche in dx, ſo entſteht daher ein Cylinder von unendlich kleiner Höhe, und der ganze Körper läßt ſich aus ſolchen cylindriſchen Elementen zuſammengeſezt denken. Hier iſt aber die bey den vorigen Integrationen beſtändige Größe r, veränderlich zu nehmen. Sie heiſe alſo y; um dieſe Integrale mit den vorigen auf ähnliche Art auszudrücken, ſo erwächſt für das Element des Körpers ABC, mit allen ſeinen Momenten, die ſich verhalten,

halten, wie die Quadrate der Entfernungen, ein neues Differential $px^2y^2dx + \frac{1}{4}py^4dx$, und

$$S.(px^2y^2dx + \tfrac{1}{4}py^4dx) = S.\mathfrak{Z}xx.$$

Da aber die Größe $S.\mathfrak{Z}x$ keine Aenderung leidet, der Schwung mag horizontal oder vertikal ſeyn, wie aus §. 121. erhellt, ſo wird die Summe $S.\mathfrak{Z}dx$ nach dem erſten Werth, den $\mathfrak{Z}$ in $S.\mathfrak{Z}x^2$ bekam, wie ſie ſeyn muß; und da dort $\mathfrak{Z} = pr^2$, und hier py^2, daraus das cylindriſche Element py^2dx, ſo wird auch $S.\mathfrak{Z}x = S.pxy^2dx$, und daher bey Körpern, die durch Umdrehung einer Figur erzeugt ſind,

$$\frac{S.xx\mathfrak{Z}}{S.x\mathfrak{Z}} = \frac{S.(px^2y^2dx + \frac{1}{4}py^4dx)}{S.pxy^2dx}.$$

§. 132.

Es ſey der ſchwingende Körper eine Kugel, in einem Punkt ihres Umfangs aufgehängt, (Taf. IX. Fig. 2.) $GH = x$, $IH = y$, $GF = a$; ſo iſt $y = \sqrt{(ax - xx)}$, $yy = ax - xx$, $y^4 = a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$, und daher

$$\frac{S.(4y^2x^2 + y^2)dx}{4} = \frac{ax^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{2}ax^4 + \frac{1}{5}x^5}{4}.$$

Dieſe Glieder zuſammengenommen, und a ſtatt x für den Schwingungspunkt der ganzen Kugel geſezt, geben $\frac{7}{120}a^5$.

Aber $S.xy^2dx = \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4$, und für die ganze Kugel, $x = a$ geſezt, $= \frac{1}{12}a^4$. Daher die geſuchte Länge des einfachen Pendels $= \frac{7}{120}a^5 : \frac{1}{12}a^4 = \frac{7}{10}a$.

§. 133.

§. 133.

Iſt alſo die Länge des einfachen Pendels für den Aufhängepunkt der Kugel G in ihrem Umfang bekannt, ſo ſchließt man daraus leicht dieſe Länge für jeden andern Aufhängepunkt A. Es ſey cb der Unterſchied der Länge des Pendels und der Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt G; ſo wird die Linie ca, oder die Weite des Schwingungspunkts vom Schwerpunkt der in A aufgehängten Kugel aus §. 117. leicht beſtimmt. Denn cb und ca verhalten ſich verkehrt, wie die Längen Gc und Ac. Sezt man daher $Gc = r$, $Ac = l + r$, $ca = x$; ſo iſt $cb = \frac{7}{5}r - r = \frac{2}{5}r$, und $l + r : r = \frac{2}{5}r : x$, daher $x =$

$$ca = \frac{\frac{2}{5}rr}{l+r},$$ uud die dem Punkt A zugehörige ganze

$$\text{Länge des einfachen Pendels} = l + r + \frac{2rr}{5(l+r}.$$

Hieraus erhellt, daß, wenn r in Vergleichung mit l ſehr klein iſt, $\frac{2rr}{l}$ in Anſehung $l+r$ für nichts zu achten. Und dies iſt eben das, was wir in den Vorleſungen angezeigt haben. Denn iſt das Pendel von beträchtlicher Länge und der Halbmeſſer der aufgehängten Kugel ſehr klein, ſo läßt ſich die Entfernung des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt für die Länge des Pendels ſelbſt annehmen.

§. 134.

Es ſey die Höhe des in ſeiner Spitze aufgehängten Kegels AB = a, (Taf. IX. Fig. 3.), der Durchmeſſer der Grundfläche CD = b, Af = x, ſo iſt ef $= y = \frac{bx}{a}$. Dies vorausgeſezt wird

$$\frac{S.\frac{4y^2x^2+y^4)dx}{4}}{S.xy^2dx} = \frac{S.\frac{b^2x^4dx}{a^2}+\frac{b^4x^4dx}{4a^4}}{S.\frac{b^2x^3}{a^2}.dx} =$$

$$\frac{\frac{\frac{1}{5}b^2}{a^2}x^5+\frac{b^4}{20a^4}.x^5}{b^2x^4 : 4a^2},$$ ſo für den ganzen Kegel,

wo $x = a$, in $\frac{4a^2+b^2}{5a}$ übergeht.

Nimmt man den Aufhängepunkt in F, ſo wird die Länge des einfachen Pendels auf eben die Art, wie im vorigen Beyſpielen gefunden.

Setzet ferner den Kegel im Mittelpunkt ſeiner Grundfläche aufgehängt, Bf = x, ef $= y = \frac{ba-bx}{a}$, daher $\frac{S.(4y^2x^2+y^4)dx}{4S.xy^2dx} =$

$$\frac{\left\{\frac{\frac{1}{3}b^2a^2x^3 - \frac{1}{2}b^2ax^4 + \frac{1}{5}b^2x^5}{a^2} + \left(\frac{b^4a^4x}{1} - \frac{4b^4a^3x^2}{2} + \frac{6b^4a^2x^3}{3} - \frac{4b^4ax^4}{4} + \frac{b^4x^5}{5}\right) : 4a^4\right\}}{\frac{\left(\frac{1}{2}b^2a^2x^2 - \frac{2}{3}ab^2x^3 + \frac{1}{4}b^2x^4\right)}{a^2}}.$$

Sezt man nun $x = a$, und addiret dieſe Größen, ſo wird die Länge des mit dem Kegel in eben der Zeit ſchwingenden einfachen Pendels $\frac{2}{5}a + \frac{3b^2}{5a}$.

§. 135.

Schwingt ein Cylinder um den Mittelpunkt ſeiner Grundfläche, deſſen Höhe $= a$, der Grundfläche Halbmeſſer $= b$, und der Abſciſſen x Anfang im Aufhängepunkt, ſo iſt $y = b$, und

$$\frac{S.\,4x^2y^2dx + y^4dx}{4S.\,xy^2dx} = \frac{\frac{1}{3}b^2x^3 + \frac{1}{4}b^4x}{\frac{1}{2}b^2x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{b^2}{2x}.$$

Iſt $x = a$, ſo wird die geſuchte Länge des einfachen Pendels für den ganzen Cylinder $\frac{2}{3}a + \frac{b^2}{2a}$.

§. 136.

§. 136.

Für den paraboliſchen Afterkegel iſt $y = \sqrt{ax}$, und daher

$$\frac{S.4x^2y^2dx + y^4dx}{4S.xy^2dx} = \frac{\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{12}a^2x^3}{\frac{1}{3}ax^3}$$

$= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a.$

Eben ſo wird die Rechnung in den übrigen Fällen geführt, wobey wir uns aber länger nicht aufhalten wollen.

Neunte Vorleſung.

Von den Centralkräften in der Kreisbewegung.

Inhalt.

§. 162. — 166. Deutliche Erklärung der Centralkräfte. Durch eine Geſchwindigkeit gehinderte Wirkung der Schwere. §. 167. — 169. Beſtätigender Verſuch. §. 170. — 172. Unterſchied der Schwer- und Fliehkräfte. §. 173. — 177. Die Centralkräfte verhalten ſich wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, durch die Halbmeſſer dividirt ꝛc. §. 178. 179. Weiter ausgeführte Geſetze der Centralkräfte. §. 180. Geſchwindigkeit, wenn die Fliehkraft der Schwere gleich ſeyn ſoll. §. 181. — 190. Bewegung geworfener Körper in krummen Linien. Anwendung hiervon auf die Bewegung der Planeten überhaupt. §. 191. 192. Geſetz der Geſchwindigkeiten, wenn die Kräfte ſich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen. §. 193. In wiefern die Centralkräfte auf der Größe der Materie beruhen.

§. 162.

§. 162.

In der nächſtvorigen Vorleſung verſprachen wir, ausführlicher zu erklären, wie der Effekt der Schwere im Körper von einer entgegengeſezten Geſchwindigkeit geſchwächt und gänzlich zerſtört werden kann. Um dieſes deutlich aus einander zu ſetzen, müſſen wir von den **Centralkräften** um ſo mehr etwas vorausſchicken, da die vornehmſten Erklärungen der natürlichen Dinge daraus herzuleiten ſind. Die Kenntnis dieſer Kräfte hat nicht allein in der **Mechanik**, ſondern auch in der **Naturlehre**, und in der **Sternkunde**, die den Bau unſers Weltalls erklärt, den herrlichſten Nutzen; ſie iſt es zugleich, wodurch ſich das, was in den Naturwirkungen am meiſten verborgen, ſo viel uns davon bekannt, einſehen läßt; ſo daß auſer allen Zweifel die Wiſſenſchaft von den **Centralkräften** zu den erſten und fruchtbarſten unter allen menſchlichen Kenntniſſen gehört.

Zuerſt wollen wir zeigen, was man ſich von den Centralkräften für einen Begriff machen muß, der ſowohl leicht, als auch zur richtigen Einſicht in die Natur dieſer Kräfte am dienlichſten iſt. Man ſtelle ſich eine Ebene vor, wie die Oberfläche des Papiers, worinn der Kreis GAF (Taf. IX. Fig. 6) beſchrieben iſt; in einem Punkt C dieſer Ebene ſey ein Faden CA, und an deſſen Ende in A eine Kugel befeſtigt. Man nehme ferner an, die Ebene ſey horizontal, ſo muß offenbar das Gewicht der Kugel auf ihr ruhen, und ohne Bewegung in ſeiner Ruhe verbleiben; folglich auch der Faden auf dieſer Ebene locker ohne einige von der Kugel verurſachte Spannung liegen.

§. 163.

Dies alſo vorausgeſetzt, gedenke man ſich die Kugel auf dieſer Ebene, aus was für Urſache man will, in eine Kreisbewegung gebracht. Z. B. kann man die Ebene mittelſt eines in C eingeſchlagenen Stifts, entweder mit bloſen Händen, oder mit einem herumgewickelten Faden herumdrehen. Die Kugel bewege ſich Anfangs in gerader Linie, in der Richtung der Tangente AD. So iſt klar, daß die Kugel ein beſtändiges Beſtreben äuſern muß, in dieſer Bewegung nach der Tangente zu beharren: da ſie aber von dem im Punkt C befeſtigten Faden AC zurückgehalten wird, ſo wird auch der Faden dieſer Bewegung widerſtehen, und die Kugel ihre Bewegung nach AB zu verfolgen hindern. Da aber die Geſchwindigkeit der Kugel beſtändig fortdauert, ſo wird der Faden verurſachen, daß die Kugel im Umkreis AFG herumläuft. Der Faden muß aber während dieſer Bewegung mit eben der Gewalt geſpannt ſeyn, womit er die ſich bewegende Kugel A von ihrem Beſtreben, ſich vom Mittelpunkt zu entfernen, zurückhält. Iſt daher dieſe Fliehkraft der Kugel bekannt, ſo weiß man auch zugleich die Kraft, womit der Faden geſpannt wird.

§. 164.

Hieraus ſieht man auch, daß die Kraft, womit der Mittelpunkt C von der Kugel gezogen, und der Faden CA oder Ce geſpannt wird, wächſt, ſo wie die Geſchwindigkeit der Kugel, und daher zugleich die Gewalt zunimmt, womit die Kugel vom Mittelpunkt ſich zu entfernen beſtrebt: und daß endlich der Faden ſo ſehr geſpannt werden kann, daß er, er ſey auch noch ſo feſt und ſtark, doch zerreißt.

§. 165.

Stellen wir uns ſtatt des in C befeſtigten Fadens, einen andern um eine Rolle im Mittelpunkt C gewickelten Faden vor, an deſſen einem Ende eine Kugel A, an dem andern ein Gewicht T befeſtigt iſt; ſo wird nun das Gewicht T auf ähnliche Art den Mittelpunkt C, und die Bewegung der Kugel in der Tangente hindern, indem es die Kugel gegen den Mittelpunkt zurückzieht, die mit ihrer Geſchwindigkeit beſtändig von ihm zu fliehen ſtrebt.

Auch ſieht man, daß, wenn die Geſchwindigkeit, und zugleich die Gewalt zunimmt, womit die Kugel ſich vom Mittelpunkt entfernt, dieſe Gewalt oder Fliehkraft der Wirkung des Körpers im Mittelpunkt, oder der Kraft, womit der Körper niederwärts getrieben wird, d. i. ſeinem Gewicht völlig gleich ſeyn kann. Hieraus begreift man, daß eine Geſchwindigkeit in der Bewegung die Schwere nicht nur zum Theile, ſondern auch gänzlich vernichten kann.

§. 166.

Laßt uns endlich an die Stelle des Gewichts T eine natürliche Kraft ſetzen, die die Maſſe der im Kreis ſich bewegenden Kugel gegen den Mittelpunkt mit einer gleich großen Gewalt, die eben das, was vorhin das Gewicht, ausrichtet, zurückzieht; die Geſchwindigkeit der Kugel, womit ſie vom Mittelpunkt zu fliehen ſtrebt, bleibe einerley. Dies vorausgeſezt, bleibt alles, wie vorhin. Demnach erhellt, wie ein Körper ſeine Bewegung in einer um einen feſten Punkt, d. i. um den Mittelpunkt, beſchriebenen krummen Linie beybehalten kann.

Dies geſchieht, wenn er ſich mit einer Geſchwindigkeit bewegt, womit er in einer gewiſſen Zeit ſich vom Mittelpunkt um ſo viel entfernt, als er von einer andern Kraft gegen ſelbigen zurückgezogen wird.

§. 167.

Dieſe Sätze laſſen ſich durch einfache und ſehr leicht anzuſtellende Verſuche beſtätigen; dieſe lehren, daß eine wirkende Kraft die andere zerſtören, oder allgemeiner zu reden, das Gewicht des Körpers ſelbſt durch eine Geſchwindigkeit vermindert und vernichtet werden kann. Es iſt bekannt, daß ein offenes Gefäs voll Waſſer, mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit herumgedreht, keinen Tropfen verliert, obgleich unter dem Herumdrehen die Mündung des Gefäſes zu unterſt kommt, und dem Fall der Waſſertropfen nichts, als ihre Bewegung widerſteht. Wird aber das Gefäs langſamer herumgedreht, wodurch zugleich die Geſchwindigkeit des Waſſers, womit es vom Mittelpunkt zu fliehen ſtrebt, vermindert wird; ſo wird das Waſſer aus dem Gefäs heraus laufen, und zwar mit kleinerer oder größerer Geſchwindigkeit, nachdem die Geſchwindigkeit der Bewegung ſelbſt größer oder kleiner iſt. Dies iſt auch die Urſache, warum ein Stein in der Schleuder, im Kreis herumgetrieben, immer höher ſteigt, d. i. leichter wird, ſo wie die Geſchwindigkeit, womit die Schleuder getrieben wird, zunimmt. Denn die Geſchwindigkeit der Bewegung zerſtört die Wirkung der Schwere.

§. 168.

Wir wollen hier nicht alle, zur Beſtätigung der Lehre von den Centralkräften dienende Verſuche anführen,

anführen, ſondern nur das hinzufügen, wodurch die Wahrheit des §. 162. — 165. geſagten erhellet.

Es ſey ACB (Taf. IX. Fig. 5.) eine runde Tafel, die die Geſtalt eines Tiſches haben kann; ſie ruhe auf einem Fuße ſo, daß er ſich im Punkt f ſehr leicht herum bewegen läßt, wenn ACB mit der Hand herum gedreht wird. Ueberdies ſey eine Bleykugel c im Punkt c an den Faden dc dergeſtalt befeſtigt, daß ſich c um den Punkt d in jeder Richtung frey bewegen läßt. Bewegt ſich die Tafel, ſo ſcheint die Kugel Anfangs, zumal wenn ACB etwas geſchwind gedreht wird, ſtatt der Bewegung der Tafel zu folgen, ſich vielmehr rückwärts zu bewegen. Dies geſchieht nothwendig wegen der Trägheit der Kugeln, deren Richtung der Richtung der bewegenden Kraft allemal entgegengeſezt iſt. §. 10. In der Folge nimmt aber die Geſchwindigkeit in c zu, daß ſie endlich der Geſchwindigkeit der Tafel gleich wird. Während dieſer Bewegung wird der Faden mehr und mehr geſpannt, der bey zu großer Geſchwindigkeit der Kugel c zerreißt, oder wenigſtens, wo er nicht feſt genug iſt, zerreißen kann.

Anmerkung. Der Grund dieſer Bewegung der Kugel, die auf der Tafel zurückzulaufen ſcheint, liegt keinesweges in der Trägheitskraft. Dieſe iſt keine bewegende Kraft, kann auch keine wirkliche Bewegung der Körper hervorbringen, wie aus dem, was oben §. 11. **Vorl.** angemerkt worden, bekannt iſt. Hier iſt auch das Zurücklaufen der Kugel nur ſcheinbar, nicht wirklich. Denn wird die Tafel von der Hand getrieben, ſo kann die ihr eingedrückte Bewegung der Kugel nicht in eben dem Augenblick dergeſtalt mitgetheilt werden, daß dieſe mit jener

 vom

vom Anfang gleiche Geſchwindigkeit erlangt. Daher iſt die Bewegung der Kugel, nach welcher ſie zurückzugehen ſcheint, nur langſamer, als die Bewegung der Tafel, die übrigens mit jener einerley Richtung hat. Man hat mehrere ähnliche Beyſpiele, die mit Unrecht aus der Trägheitskraft erklärt werden, und worinn eine langſamere Bewegung das Anſehen einer nach der entgegengeſezten Seite ſtrebenden Bewegung hat. (T.)

§. 169.

Bisher nahmen wir an, die Kugel liege auf der Tafel oder Ebene ABC. Man denke ſich nun eine Gabel gk, mittelſt einer Schraube in der Ebene im Punkt k dergeſtalt befeſtigt, daß der in d befeſtigte Faden dge zwiſchen ihren Spitzen ruhen, und die Kugel e erhalten kann. Dies vorausgeſezt, wird die Kugel e am Faden eg vertikal hängen, ſo lange die Tafel in Ruhe bleibt; ſobald aber die Tafel herumgetrieben wird, ſo wird ſie ſich aus der Vertikallinie, z. B. in die Lage gb, erheben, und bey zunehmender Geſchwindigkeit der Tafel immer höher ſteigen, bis ſie endlich in c in eine beynahe wagerechte und mit der Ebene parallele Lage kommt: alsdenn iſt die, aus der Geſchwindigkeit der Tafel entſpringende **Fliehkraft** der Schwere gleich; und die eine Kraft zerſtört der andern Wirkung. Bey wieder verminderter Bewegung der Tafel aber, ſinkt auch die Kugel wieder zur Vertikallinie zurück, und dieſes deſto mehr, je mehr die Bewegung der Tafel abnimmt.

§. 170.

Dies vorläufig erklärt, kommen wir zur Betrachtung der Centralkräfte ſelbſt. Aus dem, was wir geſagt haben, erhellt, warum dieſe Kräfte ſo heiſen. Denn da ſie den Körper dergeſtalt antreiben, daß er von einem feſten Punkt C, (Taf. IX. Fig. 6.) der der Mittelpunkt heiſt, von einer Seite ſich ſtets entfernt, von der andern beſtändig ſich ihm nähert; ſo heiſen ſie daher mit Recht Centralkräfte. Denken wir uns aber an die Stelle des vorhin angenommenen Gewichts T, eine natürliche Kraft, die durch ihre Wirkung den Körper in A beſtändig gegen den Mittelpunkt niederdrückt, und, wenn ſie allein wirkt, den Körper bis zum Mittelpunkt fortbewegt; ſo iſt dies die Kraft, die wir die Schwerkraft (vis centripeta) nennen. Daß es ſolche Kräfte in der Natur giebt, die die Himmelskörper gegen gewiſſe Punkte drücken, und die Urſachen der gröſten und beſtändigſten Bewegungen in der Natur, ſo wie auch des Gewichts unſerer Körper ſind, wovon wir oben zur Genüge gehandelt, iſt auſer allem Zweifel. Auch die Schwere gehört zu dieſen Kräften. Denn allemal, wo ſie frey wirkt, drückt ſie den Körper nach einen feſten Punkt, nach der Erde Mittelpunkt nämlich nieder. Dieſe Bewegung des Körpers nach eben den Mittelpunkt iſt die, ſo wir, im allgemeinen Sinn, den Fall der Körper zu nennen pflegen.

§. 171.

Wie aber die Schwerkraft alle Körper gegen einen feſten Punkt treibt, ſo iſt noch eine andere Kraft, die ſogenannte Fliehkraft, vorhanden, die

aus der Geſchwindigkeit und der Bewegung des herumlaufenden Körpers entſpringt, und, indem ſie die Körper nach der Tangente treibt, ihnen eine Bewegung vom Mittelpunkt weg eindrückt. Um aber ihre Beſchaffenheit einzuſehen, iſt zu merken, daß die Geſchwindigkeit ſelbſt, womit A fortrückt, mit der Fliehkraft nicht einerley iſt; ſondern dieſe vielmehr aus jener erzeugt wird. Denn iſt Ae ein unendlich kleiner Kreisbogen, der mit einer geraden Linie ſich verwechſeln läßt, ſo läßt ſich die ganze, in der Richtung der Tangente wirkende Kraft durch dieſen Bogen andeuten; zerlegt man aber dieſe Kraft in zwo andere Seitenkräfte Ag und AB, ſo iſt nur der Theil Ag = Be die Fliehkraft, die den Körper vom Mittelpunkt wegrückt: die ganze Geſchwindigkeit des Körpers aber wird durch die Linie AB ausgedrückt.

§. 172.

Bedeutet alſo Be die Centralkraft, ſo liegt bey der Kreisbewegung nichts daran, ob ſie die Schwer- oder Fliehkraft heiſt. Denn dieſe Kräfte müſſen ihrer abſoluten Größe nach beſtändig gleich ſeyn; wenn der Kräfte Mittelpunkt mit des Kreiſes Mittelpunkt ſelbſt zuſammenfällt, wie aus dem folgenden deutlicher erhellen wird. Denn während der Wirkung zerſtören ſich dieſe Kräfte einander in jedem Augenblick. Und zugleich ſind beyde Kräfte nur Preſſungen oder drückende Kräfte, obgleich die Fliehkraft aus einer wirklichen Bewegung und beſtimmten Geſchwindigkeit eines Körpers entſpringt.

§. 173.

§. 173.

Damit aber die Beſchaffenheit der Kräfte deutlicher erhellt, die aus den Geſchwindigkeiten entſpringen können, wenn ſich der Körper, wie wir hier annehmen, im Kreis herumdreht; ſo wollen wir bemerken, daß die, von verſchiedenen Geſchwindigkeiten erzeugten Centralkräfte, die ſich durch die Linien ba u. dc (Taf. IX. Fig. 7.) vorſtellen laſſen, ſich unter einander verhalten, wie $\frac{Aa^2}{AB}$, d. i. gerade wie die Quadrate der in gleicher Zeit mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten zurückgelegten unendlich kleinen Kreisbogen, und verkehrt, wie die Durchmeſſer der Kreiſe.

Denn da Aa oder Ae als gerade Linien anzuſehen ſind, weil die Bogen unendlich klein, ſo iſt AaB ein rechtwinklicht Dreyeck; daher $AB : Aa = Aa : Af$. Folglich $Af = ba = \frac{Aa^2}{AB}$. Eben ſo iſt auch, wenn die Fliehkraft durch dc ausgedrückt wird, $Ae = de = \frac{Ac^2}{AB}$.

§. 174.

Bewegen ſich daher zwey Körper in einerley oder gleichgroſen Kreiſen, mit verſchiedenen, jedoch gleichförmigen Geſchwindigkeiten, die ſich wie Ab und Ad,

oder wie Aa und Ac verhalten; ſo verhalten ſich die von dieſen Geſchwindigkeiten erzeugten Fliehkräfte, wie die Quadrate der in gleicher Zeit durchlaufenen Bogen, $Aa^2 : Ac^2$. §. 173.

§. 175.

Da aber dieſe Bogen, wie vorhin geſagt, ſich verhalten, wie die Geſchwindigkeiten, ſo folgt auch, daß

die von den Geſchwindigkeiten, oder Bewegungen zweyer in gleichgroſen Kreiſen mit ungleichen gleichförmigen Geſchwindigkeiten ſich bewegender Körper erzeugten Fliehkräfte ſich verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, womit ſich dieſe Körper bewegen.

§. 176.

Bey ungleich groſen Kreiſen, worinn ſich die Körper bewegen, und ungleichen gleichförmigen Geſchwindigkeiten, oder Bewegungen, verhalten ſich die, von dieſen Bewegungen erzeugten Fliehkräfee, gerade wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, und umgekehrt, wie die Durchmeſſer der Kreiſe.

Denn die Kräfte verhalten ſich, wie $\frac{Aa^2}{AB}$ (§. 173.) und Aa verhält ſich beſtändig, wie die Geſchwindigkeiten, womit ſich die Körper bewegen.

§. 177.

Bewegen ſich zwey Körper gleichförmig in ungleichen Kreiſen, mit Geſchwindigkeiten, die den Umkreiſen,

kreiſen, worinn ſie ſich bewegen, proportional ſind, d. i. legen ſie ihre Umläufe in gleicher Zeit zurück; ſo verhalten ſich die von dieſer Bewegung erzeugten Centralkräfte, wie die Durchmeſſer.

Denn die Fliehkraft iſt $= \frac{Aa^2}{AB}$. Aber Aa verhält ſich hier, wie AB; denn die Umkreiſe werden in gleicher Zeit zurückgelegt. Daher verhält ſich die Fliehkraft, wie $\frac{AB^2}{AB} = AB$, d. i. wie die Durchmeſſer.

§. 178.

Bewegen ſich ferner zwey Körper in verſchiedenen ungleichgroſen Umkreiſen, mit gleicher und überall gleichförmiger Geſchwindigkeit, ſo verhalten ſich die, durch dieſe Bewegung erzeugten Kräfte, verkehrt, wie die Durchmeſſer.

Denn die Fliehkraft iſt überall $= \frac{Aa^2}{AB}$. Hier iſt aber Aa beſtändig, AB veränderlich. Da nun ein mathematiſches Verhältnis durch eine beſtändige Größe dividirt, einerley bleibt; ſo verhält ſich auch hier die Fliehkraft, wie $\frac{1}{AB}$, d. i. umgekehrt, wie der Durchmeſſer.

§. 179.

Ein Körper, der ſich im Umfang eines Kreiſes bewegt, würde in eben der Zeit, worinn er mit gleichförmiger Geſchwindigkeit einen Bogen des Umkreiſes zurücklegt, eine Linie zurücklegen, die die dritte Proportionallinie zum Durchmeſſer und dem in der gegebenen Zeit zurückgelegten Bogen iſt, wenn er von der bloſen Schwerkraft getrieben würde.

Denn es ſey Aa der Bogen, den der Körper in einem Zeitelement zurücklegen kann, ſo iſt der Bogen, den er in der Zeit t mit gleichförmiger Geſchwindigkeit zurücklegt, = t. Aa. Die Fliehkraft aber, die dieſer Bewegung zukommt, iſt ab. Da aber dieſe Kraft beſtändig und gleichförmig wirkt, folglich auch eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung hervorbringt: ſo muß der Raum, wodurch der Körper, von dieſer Kraft allein getrieben, ſich fortbewegt, ſich verhalten, wie t^2. §. 147. Aber die Fliehkraft verhält ſich, wie $\frac{Aa^2}{AB}$, oder wie ab, daher auch der Raum, wodurch dieſe Kraft den Körper in einer unendlich kleinen Zeit fortbewegt, $= \frac{Aa^2}{AB}$, ſo den vollen Effekt dieſer Kraft ausdrückt. §. 23. Demnach verhält ſich der Raum, der im Umkreis in der Zeit t zurückgelegt wird, zu dem Raum, wodurch in eben der Zeit der Körper von der Fliehkraft, wenn ſie allein wirkte, fortgerückt

rückt würde, wie $t. Aa : t^2. \frac{Aa^2}{AB} = AB : t. Aa$, d. i. wie der Durchmeſſer zu dem in gleicher Zeit zurückgelegten Bogen des Umkreiſes. Oder nennen wir den leztern Raum, wodurch die Fliehkraft den Körper triebe, S, ſo verhält ſich der Raum im Umkreis $t. Aa : S = AB : t. Aa$, daher $S = \frac{t. Aa. t. Aa}{AB}$, d. i. = der dritten Proportionallinie zum Durchmeſſer und dem in gleicher Zeit zurückgelegten Bogen des Umkreiſes.

§. 180.

Hieraus ſchließt man, daß dieſe Fliehkraft der Schwere gleich wird, wenn der im Kreis gleichförmig ſich bewegende Körper mit einer ſolchen Geſchwindigkeit verſehen iſt, als er im freyen Fall durch den vierten Theil des Durchmeſſers dieſes Kreiſes erhalten kann.

Denn des Kreiſes Durchmeſſer heiſe D, ſo entſteht vom Fall durch $\frac{1}{4}$D eine Geſchwindigkeit im Körper, womit er in eben der Zeit im Umfang des Kreiſes einen Bogen zurücklegen kann, deſſen Länge $\frac{1}{2}$D. §. 49. Der Raum aber, wodurch er in gleicher Zeit, von der Fliehkraft getrieben, geführt würde, wäre $\frac{\frac{1}{2}D. \frac{1}{2}D}{D}$ (§. 179.) $= \frac{1}{4}$D. Da alſo der von der Fliehkraft entſtehende Effekt, dem von der Schwere gleich

gleich iſt, ſo müſſen nothwendig auch die Kräfte ſelbſt, nämlich die Schwere und die Fliehkraft, gleich ſeyn.

§. 181.

Hieraus begreift man, daß eine Kugel mit ſo großer Geſchwindigkeit von der Erde geworfen werden kann, daß ſie nie wieder zur Erde zurückkehrt, ſondern, einmal in Bewegung gebracht, wie ein Trabant um ſelbige herumläuft. Die Kugel darf nur mit einer Geſchwindigkeit geworfen werden, die derjenigen gleich iſt, die ſie im Fall durch den vierten Theil des Erddurchmeſſers erhalten würde. Zugleich ſetzen wir aber voraus, daß die Kugel blos durch ihre natürliche Schwere gegen die Erde getrieben, und ihre Bewegung weder von der Luft, noch von andern auf der Erdfläche vorkommenden Körpern, noch auch von ihren Ungleichheiten, wie Berge andere hervorragende Körper, gehindert wird.

Denn da die Wirkung der natürlichen Schwere von der Geſchwindigkeit der Kugel aufgehoben wird, ſo kann dieſe zur Erde nicht fallen. Sie wird aber ganz aufgehoben, wenn die Geſchwindigkeit ſo groß iſt, wie im Fall durch den vierten Theil des Durchmeſſers des Kreiſes, worinn ſich die Kugel bewegt.

§. 182.

Daß die Schwere in größern Entfernungen von der Erde Mittelpunkt immer ſchwächer wird, werden wir unten erweiſen, und zwar ſo, daß wir nichts von dem, was wir hier aus dieſer Wahrheit herleiten, als Grundſatz annehmen. Wir werden darthun, daß die Schwere im verkehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt

abnimmt,

abnimmt, wie wir bereits im vorigen, als Hypotheſe annahmen. Verhält ſich dies aber ſo, ſo folgt, daß in größerer Weite von der Erde auch eine geringere Geſchwindigkeit zu Aufhebung der Wirkungen der Schwere hinreichend ſey. Setzet z. B. der Mond ſey 60 halbe Erddurchmeſſer von der Erde entfernt, und in dieſer Entfernung werde ein Körper mit der, zu Aufhebung ſeines Gewichts erforderlichen Geſchwindigkeit geworfen. Nun iſt die Schwere in einer Entfernung von der Erde, die der Entfernung des Monds gleich iſt, $\frac{1}{3600}$ der Schwere auf der Erdfläche. Ferner verhalten ſich, wie §. 10. 1. Zuſ. erwieſen, die im Fall durch gleichgroſe Räume von verſchiedenen gleichförmigen Kräften erzeugten Geſchwindigkeiten, wie die Quadratwurzeln der Kräfte ſelbſt. Sezt man daher den Halbmeſſer der Erde $= r$, die Schwere auf der Erdfläche $= 1$, und die durch $\frac{1}{2}r$ erlangte Geſchwindigkeit $= H$, ſo iſt die, von eben der Kraft der Schwere, in der Entfernung des Monds, durch den Raum $= \frac{1}{2}r$ erzeugte Geſchwindigkeit $= \frac{H}{60}$.

Nun kann ein Körper im Fall durch den halben Halbmeſſer des Kreiſes, in deſſen Umfang ſich der Mond befindet, durch den Trieb unſerer Schwere, wie ſie in der Weite des Mondhimmels beſchaffen, eine Geſchwindigkeit erlangen, womit er dieſe Schwere vernichten kann. §. 180. Und dieſe Geſchwindigkeit wird daraus leicht gefunden, daß bey einerley beſtändig gleichförmig wirkender Kraft, die zurückgelegten Räume ſich verhalten, wie die Quadrate der

Geſchwin-

Geſchwindigkeiten, daß alſo $\sqrt{\tfrac{1}{2}r} : \frac{H}{60} = \sqrt{\tfrac{60}{2}r}$ zu der Geſchwindigkeit, die zu Aufhebung der Wirkungen der Schwere im Mondkreiſe hinreichend iſt. Daher dieſe Geſchwindigkeit $= \frac{H}{\sqrt{60}}$.

Soll die Schwere, wie ſie in unſern Gegenden beſchaffen, dieſe Geſchwindigkeit erzeugen, ſo iſt die Fallhöhe, wodurch ſie erlangt wird, $= \frac{r}{2.60}$. Denn $H^2 : \tfrac{1}{2}r = \frac{H^2}{60} : \frac{r}{2.60}$. Dieſe Höhe iſt alſo nur $\frac{1}{60}$ derjenigen, die zu Erlangung der Geſchwindigkeit, die zur Vernichtung der Wirkungen unſerer Schwere hinreichend iſt, erfordert wird.

§. 183.

Auch iſt die Geſchwindigkeit nicht ſehr groß, wodurch zuwege gebracht werden kann, daß der in dieſer Weite geworfene Körper ein Planet wird. Denn da der Halbmeſſer der Erde beynahe 19615782 Par. Fuß, ſo iſt $\frac{1}{120}$ deſſelben $= 163465'$, und die Geſchwindigkeit, die im Fall durch dieſe Höhe erlangt würde, $= \sqrt{(60.\,163465)} = 3132'$ beynahe in einer Sekunde.

Wäre alſo der Mond mit dieſer Geſchwindigkeit geworfen, und dieſe Geſchwindigkeit durch keinen Wider-

Widerſtand vermindert worden, ſo iſt klar, daß ſelbiger in der Kreisbewegung um die Erde beharren, und ſich ihr weder nähern, noch ſich von ihr entfernen würde. Hiervon unten ausführlicher und allgemeiner.

§. 184.

Hieraus ſieht man alſo deutlich genug, was erfordert wird, wenn die von Schwerkräften getriebenen Körper ſich in Kreiſen bewegen ſollen. Es muß nämlich die nach dem Mittelpunkt drückende Kraſt, oder die Schwere, durch die ganze Bewegung überall der Fliehkraft der ſich bewegenden Körper, d. i. der Kraft, womit ſie ſich vom Mittelpunkt zu entfernen beſtreben, gleich ſeyn. Da aber dies nur ſtatt haben kann, wenn die Körper im Anfang der Bewegung in ſenkrechter Richtung auf den Halbmeſſer ihrer Bahn, mit der Geſchwindigkeit geworfen worden, die ſie im Fall durch den halben Halbmeſſer erlangen können. (§. 180.); ſo iſt dieſe beſtimmte Geſchwindigkeit die einzige, womit bey unveränderlichen Kräften, ein Körper im Kreis herumlaufen kann.

§. 185.

Daher iſt auch die Bewegung im Kreis gleichförmig, und ihre Geſchwindigkeit wird weder vermehrt noch vermindert. Denn die eine Centralkraft iſt beſtändig der andern gleich, und wirkt in einer, der Richtung der andern entgegengeſezten Richtung.

§. 186.

Auch ſchlieſen wir hieraus, daß ein in ſenkrechter Richtung auf ſeine Entfernung vom Mittelpunkt geworfe-

worfener Körper, mit der vorhin beſtimmten Geſchwindigkeit, oder mit einer größern oder kleinern, zwar einen Kreisbogen beſchreibt, der aber von dem verſchieden iſt, deſſen Mittelpunkt der Punkt C, nach welchen die Kräfte ſtreben. Dieſer Bogen wird alſo der Bogen einer Kurve ſeyn, worauf die Kräfte in ſchiefer Richtung wirken, ſo daß die Geſchwindigkeit des Körpers bald größer, bald kleiner ſeyn kann. In dieſem Fall werden auch die Kräfte, ſowohl die Schwer- als Fliehkraft, in verſchiedenen Punkten der Bahn verſchieden ſeyn, wenn die Größe der Schwerkraft gewiſſermaßen von der Größe der Entfernung abhängt; denn dieſe wird ſich mit der Entfernung, die Fliehkraft aber mit der Geſchwindigkeit ändern.

§. 187.

Und weil in der Kreisbewegung die Kräfte, wenn ſie von keiner andern Größe, auſer der Entfernung vom Mittelpunkt, abhängen, überall durch den ganzen Umlauf unveränderlich ſeyn müſſen, ſo folgt auch, daß allemal Kreiſe beſchrieben werden, auf was für Art auch die Kräfte von der Entfernung abhängen, wo die Geſchwindigkeit ſo groß iſt, als ſie im Fall durch die halbe Entfernung vom Mittelpunkt durch die Wirkung der Kräfte erlangt wird, und die Körper mit dieſer Geſchwindigkeit in ſenkrechter Richtung auf den Halbmeſſer geworfen werden.

Anmerkung. Erhalten die von verſchiedenen unveränderlichen Kräften durch verſchiedene Höhen niederwärts bewegte Körper einerley Geſchwindigkeit,

keit, ſo müſſen dieſe Höhen ſich umgekehrt, wie die Kräfte verhalten. §. 10. 2. Daher iſt auch die Geſchwindigkeit in jedem Kreiſe die, ſo im Fall durch den halben Halbmeſſer erzeugt werden kann. Es ſey alſo dieſer Halbmeſſer R, die Centralkraft g, die natürliche Schwere 1, und die Fallhöhe, wodurch jene Geſchwindigkeit von der natürlichen Schwere erzeugt wird, h, ſo wird $\frac{1}{g} : \frac{1}{2}R = 1 : h$, oder $g : 1 = h : \frac{1}{2}R$, d. i. bey der Bewegung im Kreiſe verhält ſich die Centralkraft zur natürlichen Schwere, wie die Fallhöhe, wodurch der Körper, von der natürlichen Schwere getrieben, jene Geſchwindigbeit erlangt, zum halben Halbmeſſer des Kreiſes, worinn die Bewegung geſchieht. Hieraus läßt ſich offenbar die wahre Größe der Centralkraft beſtimmen.

Die Rechnung §§. 182. 183. wird durch gegenwärtig angenommenen Satz noch kürzer und leichter. Denn da $h = \frac{g.R}{2}$, und $R = 60.r$, weil wir durch r den halben Durchmeſſer der Erde verſtehen, ſo wird $h = \frac{60.r}{2.3600} = \frac{r}{120}$; und daraus erhellt ſogleich, daß man die Geſchwindigkeit ſuchen muß, die im Fall durch $\frac{r}{120}$, oder durch 163465 Par. Fuß erlangt wird. (V.)

§. 188.

Eben ſo erhellt, daß ein Körper, der einmal ſich im Kreis zu bewegen angefangen, in dieſer Kreisbewegung beharren wird, wenn des Kreiſes Mittelpunkt mit der Schwerkraft Mittelpunkt einerley iſt, und überdies dieſe Kraft von der bloſen Entfernung, auf was für Art es auch ſey, abhängt. Denn alsdenn wird die Geſchwindigkeit in der Richtung der Tangente niemals verändert, folglich auch die Fliehkraft weder vermehrt, noch vermindert. Daher auch umgekehrt die Entfernung ſich nicht ändert, wodurch die Schwerkraft, die überall der Fliehkraft gleich, und der Richtung noch entgegengeſezt iſt, auch überall einerley bleibt.

§. 189.

Jeder Kurve Element iſt als ein unendlich kleiner Kreisbogen anzuſehen; ſind aber die Kurven ſelbſt, worinn die Umläufe geſchehen, von Kreislinien verſchieden, ſo muß auch der Kräfte Mittelpunkt von dieſer Kreisbogen Mittelpunkt verſchieden ſeyn. Denn es ſey AF (Taf. IX. Fig. 8.) ein ſolcher Elementarkreisbogen, deſſen Halbmeſſer AD, und der Mittelpunkt D, ſo iſt alsdenn die abſolute Größe der Fliehkraft aus der Wirkung, die ſie in der, der Richtung AD entgegengeſezten Richtung äuſert: die Größe der Schwerkraft aber aus dem Effekt zu ſchätzen, den ſie in der Richtung AC hervorbringt, wenn nämlich der Mittelpunkt dieſer Kraft in C. Demnach wirken in andern, vom Kreis abweichenden Kurven, nicht nach einander entgegengeſezten Richtungen, wie in Kreiſen: folglich zerſtört auch keine den ganzen Effekt der andern, wel-

ches

ches nur dann ſtatt findet, wenn dieſe Kräfte, ihrer abſoluten Größe nach, einander gleich ſind. Denn drückt BA die ganze Schwerkraft aus, ſo läßt ſie ſich in zwo andere, Ac und Ad, zerlegen, wovon die erſte nur der Fliehkraft entgegengeſezt iſt, die andere, nach der Tangente wirkende, aber die Geſchwindigkeit des umlaufenden Körpers entweder vermehrt oder vermindert, nachdem der Winkel CAE in der Bewegung entweder ſpitzig oder ſtumpf iſt. §. 65. Aber Ac iſt überall der Fliehkraft gleich, weil ſich das Element Ad als ein Kreisbogen anſehen läßt.

§. 190.

Dieſe Ungleichheit der für ſich betrachteten Centralkräfte, iſt Urſache, daß auch in andern Kurven, die keine Kreiſe ſind, Umläufe geſchehen. Dies hindert aber nicht, daß dieſe Kräfte, die Schwer- und Fliehkraft, auch in dieſen Kurven gleich ſind. Und dies wird mit Recht behauptet, wenn es in dem Verſtande genommen wird, wie §. 184. oder wenn wir dieſe Kräfte nicht für ſich und in Beziehung auf die verſchiedenen Mittelpunkte C und D, ſondern in ſo fern betrachten, als ſie zu einem und demſelben Mittelpunkt C gehören. Denn es iſt allerdings wahr, daß, AF als ein unendlich kleiner Bogen der Kurve angenommen, der von der Fliehkraft durch das Stück EF von der Kurve weggerückte Körper, auch in eben der Zeit durch eben die Linie EF von der Schwerkraft niederwärts nach der Kurve zurückgezogen worden wäre; wäre dies nicht geſchehen, ſo würde ſich der Körper am Ende dieſes Zeittheilchens nicht in dem zur Kurve AF gehörigen Punkte F befinden. Demnach ſind die Centralkräfte,

kräfte, in dieſer Rückſicht betrachtet, ſtets und überall gleich zu nennen, ſo wie die Wirkung der Gegenwirkung gleich iſt.

Hiermit ſchlieſen wir gegenwärtige Vorleſung. Nur zwey Stücke wollen wir noch bemerken, die die Kreisbewegung betreffen.

§. 191.

Verhalten ſich die Geſchwindigkeiten der, in ungleichen Kreiſen gleichförmig ſich bewegenden Körper verkehrt, wie die Quadratwurzeln aus dem Durchmeſſer; ſo verhalten ſich die daraus erzeugten Fliehkräfte umgekehrt, wie die Quadrate der Durchmeſſer.

Denn da die Fliehkraft beſtändig $= \frac{Aa^2}{AB}$, ſo

wird, wenn $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$, d. i. verkehrt wie die Quadrate der Durchmeſſer.

§. 192.

Bewegen ſich endlich zwey Körper in ungleichgroſen Kreiſen, mit Geſchwindigkeiten, die ſich umgekehrt verhalten, wie die Durchmeſſer; ſo verhalten ſich die von dieſer Bewegung erzeugten Fliehkräfte verkehrt, wie die Würfel der Durchmeſſer.

Denn

Denn weil, wie vorhin, die Fliehkraft $\frac{Aa^2}{AB}$, ſo werden ſich, wenn $Aa = \frac{1}{AB}$, die Fliehkräfte verhalten, wie $\frac{1}{AB^3}$, d. i. umgekehrt, wie die Würfel der Durchmeſſer.

§. 193.

Bisher nahmen wir die umlaufenden Körper beſtändig von gleicher Materie und Trägheit an. Iſt aber die Maſſe verſchiedener Körper verſchieden, ſo müſſen auch die Fliehkräfte, wenn das übrige einerley iſt, den Maſſen proportional ſeyn. Denn doppelte Maſſe iſt auch mit doppelter Kraft verſehen, weil dieſe allen Theilen gleichförmig beywohnt u. ſ. w. Demnach verhalten ſich die Kräfte, wie die Maſſen.

Sechſter Zuſatz.

Allgemeinere Entwickelung der Centralkräfte. Kegelförmige oder Wirbelbewegung der Pendeln.

Inhalt.

§. 137. — 139. Aus den gegebenen Kräften in der Kreisbewegung die Geſchwindigkeit und die Umlaufszeit, und umgekehrt §. 140. 141. aus der Zeit die Centralkraft zu finden. §. 142. — 145. Kegelförmige oder Wirbelbewegung der Pendeln. §. 147. — 149. Beſtimmung der Geſchwindigkeit und der Zeit dieſer Bewegung. §. 150. 151. Gleichzeitigkeit dieſer Bewegungen. §. 153. — 157. Wenn die Fliehkraft der Schwere gleich iſt. Vergleichung dieſer Umlaufsbewegung mit den Schwingungen der Pendeln ꝛc.

---

§. 137.

Obgleich die Lehren von den **Centralkräften** ſich auf einen allgemeinern Weg, als wir uns im vorhergehenden bedienten, und zwar auf einen ſolchen erweiſen laſſen, der auf die Bewegungen in allen Kurven anwendbar iſt, und den wir im folgenden erklären werden: ſo iſt doch das, was zur Kreisbewegung gehört, wenn es ſo vorgetragen wird, wie in voriger Vorleſung geſchehen, ſo leicht einzuſehen, daß wir es nicht nur für unnütz, ſondern beynahe für ſchädlich halten, jenen einfachen Weg zu verlaſſen, und dieſe nützlichen und leichten Sätze erſt aus allgemeinen Gleichungen herzuleiten. Denn da dieſe Kreisbewe-

bewegung zugleich gleichförmig angenommen wird, ſo ſieht man die Auflöſung der hieher gehörigen Aufgaben beynahe in eben dem Augenblick, da ſie vorgetragen werden, ein. Aus dieſer Urſache wollen wir nur die von dieſer Materie angefangenen Betrachtungen fortſetzen, und einige andere hinzufügen. Zu dem Ende erinnern wir wieder, daß die von der gleichförmigen Bewegung in eben dem Kreis erzeugte, Fliehkraft $\frac{Aa^2}{AB}$ eine beſtändige Größe, und daher dieſe Kraft, weil weder Aa noch AB ſich währen der Bewegung ändert, durch den ganzen Umlauf beſtändig einerley iſt. §. 185. Vorl.

§. 138.

Um alſo aus dem gegebenen Geſetz der Fliehkräfte das Verhältnis der Geſchwindigkeiten zu finden, vergleiche man das Geſetz oder Verhältnis der Kräfte mit der durch $\frac{Aa^2}{AB}$ ausgedrückten Fliehkraft, wobey zu merken, daß Aa hier die Geſchwindigkeit, AB aber den Durchmeſſer des Kreiſes andeutet, worinn der Körper ſeinen Umlauf vollendet. (Taf. IX. Fig. 7.)

Erſter Fall. Sind in zwey ungleichen Kreiſen die Fliehkräfte gleich, ſo wird $\frac{Aa^2}{AB} = a$, wenn a eine unveränderliche Größe bedeutet. Daher Aa^2
$= a.$

$= a. AB$, und Aa wie $\sqrt{AB}$, d. i. die Geſchwindigkeit verhält ſich, wie die Quadratwurzel des Durchmeſſers des Kreiſes, worinn der Umlauf geſchieht.

Zweyter Fall. Die Centralkräfte in ungleichen Kreiſen verhalten ſich verkehrt, wie die Quadrate der Durchmeſſer; ſo iſt $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^2}$.

Daher $Aa^2 = \frac{1}{AB}$, und $Aa = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, d. i. die Geſchwindigkeiten verhalten ſich in dieſem Fall umgekehrt, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer.

Dritter Fall. Verhalten ſich bey gleichförmiger Bewegung die Centralkräfte in ungleichen Kreiſen umgekehrt, wie die Durchmeſſer; ſo iſt $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB}$, und $Aa^2 = 1$; daher ſind die Geſchwindigkeiten beſtändige und gleiche Größen.

Hieraus erhellt genugſam, wie die Sache in andern Fällen anzuſtellen, daß es alſo überflüßig, den Leſer hier länger aufzuhalten.

§. 139.

Auch die Aufgaben, ſo die Zeit betreffen, werden leicht aufgelöſt. Denn da bey gleichförmiger Bewegung die Zeit ſich verhält, wie der Raum, durch die Geſchwindigkeit dividirt, ſo ſuche man nur nach §. 138. aus dem gegebenen Geſetz der Kräfte die Geſchwindigkeit, durch dieſe dividire man den zurückgelegten

legten Raum, der in der Kreisbewegung dem Umfang des Kreiſes allemal proportional iſt. Wir wollen dieſes mit folgenden Beyſpielen erläutern:

Erſtes Beyſpiel. Sind in ungleichen Kreiſen die Centralkräfte einerley, ſo verhalten ſich nach §. 138. die Geſchwindigkeiten, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer. Der Umfang heiſe alſo P, die Zeit T, ſo iſt der zurückgelegte Raum durch die Geſchwindigkeit dividirt $= \frac{P}{\sqrt{AB}} = T.$ Aber $P = AB$, daher $T = \sqrt{AB}$, d. i. die Zeiten verhalten ſich, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer.

Zweytes Beyſpiel. Die Centralkräfte verhalten ſich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer; man nenne die Geſchwindigkeit V, ſo wird $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{V^2}{AB} = \frac{1}{\sqrt{AB}}$, und $V = \sqrt[4]{AB}$. Daher $T = \frac{P}{\sqrt[4]{AB}} = \frac{AB}{\sqrt[4]{AB}}$ $= \sqrt[4]{AB^3}$.

Drittes Beyſpiel. Verhalten ſich die Centralkräfte in verſchiedenen Kreiſen verkehrt, wie die Quadrate der Durchmeſſer, ſo verhalten ſich die Geſchwindigkeiten umgekehrt, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer. §. 138. Daher $P.\sqrt{AB} = T = \sqrt{AB^3}$, folglich auch $T^2 = AB^3$,

oder die Quadrate der Zeiten verhalten ſich unter einander, wie die Würfel der Durchmeſſer.

Viertes Beyſpiel. Man nehme die Centralkräfte im verkehrten Verhältnis der Durchmeſſer, alsdenn iſt die Geſchwindigkeit beſtändig. §. 138. Daher auch $T = P$ oder $= AB$, d. i. die Zeiten, worinn die Umkreiſe zurückgelegt werden, verhalten ſich, wie die Umkreiſe ſelbſt, oder welches einerley, wie die Durchmeſſer.

Fünftes Beyſpiel. Setzet endlich, die Centralkräfte verhalten ſich umgekehrt, wie die Würfel der Durchmeſſer, ſo wird $\frac{Aa^2}{AB} = \frac{1}{AB^3}$, und $Aa^2 = \frac{1}{AB^2}$. Daher Aa, oder die Geſchwindigkeit $= \frac{1}{AB}$, d. i. im verkehrten Verhältnis der Durchmeſſer.

Folglich auch $T = P.\, AB = AB^2$, oder die Zeiten, worinn die Körper ſich in Kreiſen bewegen, verhalten ſich wie die Quadrate der Umkreiſe, oder der Durchmeſſer.

Sechſtes Beyſpiel. Iſt die Centralkraft beſtändig und der Schwere gleich, ſo wird die Umlaufszeit oder $T = \frac{P}{\sqrt{\frac{1}{2}AB}}$. §. 180. Vorl. Aber

die

die Zeit des Falles durch den halben Halbmeſſer = $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, denn ſie verhält ſich, wie die Geſchwindigkeit am Ende des Falles. Demnach verhält ſich hier die Umlaufszeit zur Zeit des Falles durch den halben Halbmeſſer, wie P : $\frac{1}{2}$AB, oder wie der Umkreis zum Halbmeſſer.

§. 140.

Zur Genüge erhellt alſo, wie aus den gegebenen Geſchwindigkeiten die Zeiten beſtimmt werden, daß alſo mehr hiervon zu ſagen überflüßig. Eben ſo begreift man auch das, was wir jezt hinzufügen. Da die Zeiten überall $= \frac{AB}{V}$ (wenn V der Ausdruck der Geſchwindigkeit) $= \frac{AB}{Aa}$, ſo wird auch Aa $= \frac{AB}{T}$. Sezt man alſo dieſe Größe $\frac{AB}{T}$ für Aa in dem vorhin gebrauchten Werth der Fliehkraft $\frac{Aa^2}{AB}$, ſo iſt dieſe Kraft $= \frac{AB}{T^2}$, folglich verhalten ſich die Centralkräfte gerade wie die Durchmeſſer der Kreiſe, worinn der Umlauf geſchieht, und umgekehrt, wie die Quadrate der Zeiten, worinn die ganzen Umkreiſe zurückgelegt werden.

§. 141.

Wenden wir dieſen lezten Werth der Centralkräfte an, ſo läßt ſich das Geſetz dieſer Kräfte aus dem gegebenen Geſetz der Zeiten beſtimmen; wie umgekehrt die Zeiten aus den Kräften gefunden werden. Da wir aber dieſes vorhin ſchon gezeigt haben, ſo iſt hier nur jenes mit einem und andern Beyſpiel zu erläutern:

I. Beyſpiel. Verhalten ſich die Zeiten, wie die Durchmeſſer, ſo verhalten ſich die Centralkräfte, wie $\frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB^2}$. §. 140. $= \frac{1}{AB}$, d. i. verkehrt wie die Durchmeſſer.

II. Beyſpiel. Setzet, die Zeiten verhalten ſich, wie die Quadrate der Durchmeſſer, ſo verhalten ſich die Centralkräfte, wie $\frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB^4}$ $= \frac{1}{AB^3}$, d. i. umgekehrt, wie die Würfel der Durchmeſſer.

III. Beyſpiel. Verhalten ſich die Zeiten, wie die Quadratwurzeln der Durchmeſſer, ſo ſind die Centralkräfte $\frac{AB}{T^2} = \frac{AB}{AB} = 1$, d. i. die Centralkräfte ſind in dieſem Fall überall beſtändig.

§. 142.

Völlig auf eben die Art werden mehrere andere Aufgaben von dieſer Gattung aufgelöſt; es iſt abrr genug, den allgemeinen Weg gezeigt zu haben. Wir ſchreiten nun zur Erklärung der Centralkräfte bey den Pendeln, die, in einem feſten Punkt aufgehängt, ſich im **Wirbel** oder kegelförmig bewegen.

Es ſey alſo AC (Taf. IX. Fig. 9.) ein im Punkt A befeſtigter Faden, an deſſen Ende ein Gewicht hängt, das den Faden hinlänglich ſpannt; ſo iſt klar, daß der aufgehängte, vom bloſen Gewicht geſpannte Faden, zur niedrigſten Stelle in B zu fallen ſtrebt, bis er in die Lage AB kommt; denn ſchwere Körper fallen immer ſo tief, als ſie können. Die Erfahrung lehrt, daß der in Bewegung geſezte Faden AC ſich um die Oberfläche eines Kegels CEDA herumdreht, und den Kreis CED beſchreibt. Je größer die Geſchwindigkeit, deſto höher ſteigt das Gewicht. **Dies iſt die kegelförmige**, oder ſogenannte **Wirbelbewegung der Pendeln**, die wir nun ausführlicher betrachten wollen.

§. 143.

Während der Bewegung wird das Gewicht mit dem Faden von der Schwere niederwärts in der Richtung drr Vertikallinie, oder nach Ch getrieben; die Fliehkraft aber, die beſtändig in der Richtung des Durchmeſſers CD wirkt, ſtößt das Gewicht nach der Linie fC fort. Wird alſo im Parallelogramm fChg die Centralkraft durch fC, und die Schwere durch Ch ausgedrückt; ſo wird die Diagonallinie Cg die Kraft andeuten, womit der Faden

von

von dieſen beyden Kräften zugleich gereizt und geſpannt wird.

§. 144.

Auch verhält ſich die Centralkraft, wie $\frac{Aa^2}{AB}$, und in einerley Kreiſen, wie Aa^2, d. i. wie das Quadrat der Geſchwindigkeit. Heiſt daher V die Fallhöhe, wodurch dieſe Geſchwindigkeit erlangt wird, ſo verhält ſich die Centralkraft in gleich großen Kreiſen beſtändig, wie V, und ſezt man den Halbmeſſer des Kreiſes = r, ſo iſt die Höhe des Falles, wodurch eine, der Schwere gleiche Fliehkraft erzeugt werden kann, $= \frac{1}{2}$r. §. 180. Vorl. Und dieſe Höhe läßt ſich ſtatt eines Maaſes gebrauchen, wodurch die Größe aller Centralkräfte ermeſſen werden kann.

§. 145.

Dies vorausgeſezt, iſt die Geſchwindigkeit leicht zu beſtimmen, womit das Pendel AC ſeinen kegelförmigen Umlauf im Kreiſe CED dergeſtalt fortſetzen kann, daß es ſich weder von der Axe AB weiter entfernt, noch auch ihr näher kommt. Zu dem Ende darf nur die Centralkraft Cf beſtimmt werden, und dieſes muß auf zweyerley Art geſchehen. Zuerſt iſt dieſe Bewegung geometriſch zu betrachten, und die Centralkraft aus den, in der Figur vorkommenden Größen, von welchen ſie abhängt: dann auch aus andern Eigenſchaften dieſer Bewegung zu beſtimmen.

Um

Um die Centralkraft nach der erſten Art zu beſtimmen, ſetzet Ch = g, Cf = c, AB = a, BC = b, ſo iſt AB : BC = gf : fC. Daher a : b

$$= g : \frac{bg}{a} = c,$$ dies giebt den Werth der Centralkraft, wenn wir die Sache geometriſch betrachten.

Ihr zweyter Werth wird ſo geſchloſſen. Es iſt

$$\tfrac{1}{2}b : g = x : \frac{2gx}{b}.$$ (Vergl. Anm. zu §. 187. Vorl.) wenn wir durch x die Fallhöhe verſtehen, wodurch die erforderliche Geſchwindigkeit erlangt wird, wenn das Pendel in ſeiner kegelförmigen Bewegung im Kreiſe CED beharren ſoll.

Demnach iſt $$\frac{2gx}{b} = \frac{bg}{a},$$ und $$x = \frac{b^2}{2a} =$$ der Fallhöhe, wodurch der Körper genannte Geſchwindigkeit erhält. Daher die Geſchwindigkeit ſelbſt $$= \frac{b\sqrt{g}}{\sqrt{a}}.$$ §. 17.

§. 146.

Iſt die Geſchwindigkeit gefunden, ſo ergiebt ſich die Zeit von ſelbſt. Denn da die Bewegung gleichförmig geſezt wird, wie aus dem, was im vorhergehenden von der Kreisbewegung geſagt worden, bekannt

bekannt iſt, ſo iſt die Zeit $= \frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}} = T$, und ſucht man die bloſe Verhältnis der Größen, $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$.

§. 147.

Hieraus ſchließt man

1.) der Körper muß ſich deſto weiter von der Axe entfernen, je größer ſeine Geſchwindigkeit iſt. Denn die Geſchwindigkeiten verhalten ſich, wie $\frac{b}{\sqrt{a}}$. Daher muß auch des Kegels Grundfläche, in deren Umkreis ſich der Körper dreht, deſto größer ſeyn; wenn nämlich a unveränderlich.

2.) Wird a kleiner, wenn b unveränderlich, d. i. ſoll der ſich drehende Körper immer höher ſteigen, ſo muß auch die Geſchwindigkeit ſich vermehren.

3.) Soll der Körper bis zur Spitze des Kegels ſteigen, und daſelbſt einen Kreis beſchreiben, ſo muß die Geſchwindigkeit unendlich groß ſeyn. Denn alsdenn wäre $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{1}{0}$.

§. 148.

Da alſo $T = \frac{P\sqrt{a}}{b}$, ſo ſind die Umlaufszeiten ungleich langer Pendeln, die durch ihre kegelförmige

förmige Bewegung in gleichhohen Kegeln ungleichgroße, mit dem Horizont parallele Kreiſe beſchreiben, $= \frac{P}{b} = \frac{b}{b} = 1$, d. i. die Zeiten ſind gleich, worinn die Pendeln ſich im Wirbel bewegen.

§. 149.

Beſchreiben zwey kegelförmig ſich bewegende Pendeln, Kegel von verſchiedener Höhe, aber gleichen Grundflächen; ſo verhalten ſich die Umlaufszeiten, wie die Quadratwurzeln der Höhen der Kegel.

Denn $T = \frac{P\sqrt{a}}{b} = \frac{b\sqrt{a}}{b}$. Daher $T = \sqrt{a}$.

§. 150.

Da die Zeit der kegelförmigen Bewegung der Pendeln $= \frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$. §. 146. und die Zeit des Falles durch die doppelte Höhe des Kegels $= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. §. 16. ſo verhalten ſich dieſe Zeiten zu einander wie $\frac{P}{b} : 2 = P : 2b$, d. i. wie der Umkreis zum Durchmeſſer.

§. 151.

Das Verhältnis des Umkreiſes zum Durchmeſſer heiſe $p : d$; die Zeit der kegelförmigen Bewegung der Pendeln T, die Zeit des einfachen Schwunges t. Dies vorausgeſezt iſt $p : d = T \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. §. 150. wie auch $p : d = t : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. §. 97. 2. Vorl. Daher $T : t = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{g}} = 2 : 1$, und folglich $T = 2t$; d. i. die Zeit der kegelförmigen Bewegung des Pendels muß alsdann doppelt ſo groß ſeyn, als die Schwingungszeit des einfachen Pendels; folglich muß dieſes in eben der Zeit zwey Schwünge thun, worinn jenes einen Umlauf zurücklegt; doch mit der Bedingung, daß die kegelförmige Bewegung der Pendeln ſehr gering iſt, d. i. daß die Umläufe des Pendels in ſehr kleinen Kreiſen vollendet werden. Denn geſchähen ſie in größern, ſo wäre nicht $AC = AB$, oder die Länge des kegelförmig ſich bewegenden Pendels, iſt von der Länge des ſeitwärts ſchwingenden Pendels verſchieden.

Hieraus ſieht man wiederum, daß die Umlaufszeiten wirbelnder Pendeln beſtändig einerley ſind, ſo oft ſie in ſehr kleinen Kreiſen herumgetrieben werden; und daß nichts daran liegt, ob dieſe Kreiſe kleiner oder größer ſind, wofern ſie nur keine merkliche Größe haben.

§. 152.

Soll ferner das Verhältnis der Umlaufszeit des kegelförmig ſich bewegenden Pendels zur Zeit des Falls durch die Länge des Pendels AC gefunden werden, ſo kann man folgendergeſtalt ſchlieſen. Die Zeit der kegelförmigen Bewegung iſt $\frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}}$, die Zeit aber durch AC, oder durch die Länge des Pendels iſt $= \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. Demnach verhalten ſich dieſe Zeiten wie $\frac{P\sqrt{a}}{b\sqrt{g}} : \frac{\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. So oft alſo die Umlaufszeit in der kegelförmigen Bewegung der Zeit des Falles durch die Länge des Pendels gleich ſeyn ſoll, ſo muß ſeyn $\frac{P^2}{2b^2} = \frac{l}{a}$, folglich $a : l = 2b^2 : P^2$. Daher verhält ſich auch der Sinus des Winkels ACD, den der Faden des Pendels mit der Horizontallinie macht, zum ganzen Sinus, wie das, dem Kreis ECD eingeſchriebene Quadrat, zum Quadrat des Umfangs dieſes Kreiſes.

§. 153.

Auf eben die Art werden auch andere Aufgaben aufgelöſt, worinn die kegelförmigen Bewegungen der Pendeln mit dem Fall der Körper, wie auch mit

den, im Fall durch andere gegebene Höhen, z. B. durch die halbe Pendellänge, erlangten Geſchwindigkeiten verglichen werden ſollen: wobey wir uns aber, da ſie keinen ſonderlichen Nutzen haben, länger nicht verweilen wollen, zufrieden, daß wir die allgemeine Methode erklärt haben, wornach ſich die übrigen auflöſen laſſen. Laßt uns vielmehr hinzufügen, **daß die Fliehkraft eines im Kreis ſich bewegenden Körpers der natürlichen Schwere gleich iſt, wenn er ſeinen Umlauf in eben der Zeit vollendet, worinn ein Pendel, deſſen Länge gleich dem Halbmeſſer dieſes Kreiſes, mit ſeiner Wirbelbewegung einen ſehr kleinen Kreis beſchreibt, oder, welches einerley, wenn er in der Zeit herumläuft, worinn ein einfaches Pendel von angezeigter Länge zwo ganze Schwingungen zurücklegt.**

Denn die Umlaufszeit des im Wirbel ſich bewegenden Pendels iſt einerley mit der Umlaufszeit eines andern, welches einen Kegel beſchreibt, deſſen Höhe ſowohl, als der Halbmeſſer der Grundfläche, dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich iſt, worinn ſich der Körper bewegt. §. 148. Daher auch die Fliehkraft des leztern Pendels einerley mit der Fliehkraft des Körpers. §. 175. **Vorl.** Es ſey nun der Halbmeſſer des Kreiſes $= b$, die Höhe des Kegels $= a$, ſo iſt nach §. 145. die Fliehkraft des Pendels $= \frac{bg}{a}$. Aber $b = a$, daher die Fliehkraft $= g$, oder der Schwere gleich.

§. 154.

Eben ſo erhellt, daß die Kraft, die bey der kegelförmigen Bewegung der Pendeln den Pendelfadetr ſpannt, ſich verhält wie Cg, (Taf. IX. Fig. 9.) wenn die Centralkraft ſich verhält wie Cf; die Schwere aber beſtändig wie Ch, was für einen Kreis auch das Pendel in ſeiner Wirbelbewegung beſchreibt. Es iſt aber auch Cg : Ch = AC : AB, und $Cg = \frac{Ch.AC}{AB}$; ſezt man daher die Höhen AB der, in der Wirbelbewegung beſchriebenen, Kegel gleichgros, ſo wird, weil Ch, d. i. die Schwere, unveränderlich, Cg = AC, d. i.

Beſchreiben zwey, von eben der Schwere getriebenen, ungleichlange Pendeln, in ihrer Wirbelbewegung gleichhohe Kegel, ſo verhalten ſich die Kräfte, die die Pendelfaden ſpannen, wie die Längen der Faden.

§. 155.

Legt das einfache Pendel den möglichgrößten Schwung zurück, d. i. ſchwingt es im Halbkreiſe, ſo wird der Faden von dem angehängten Körper im Mittel ſeines Schwungs dreymal ſtärker, als vom bloſen Druck der Schwere des ruhenden Gewichts, geſpannt.

Denn iſt das Pendel in Ruhe; ſo wird der Faden von der bloſen Schwere geſpannt; ſchwingt es aber, ſo wird der Faden von der vereinigten Schwere und Fliehkraft gezogen. Und weil in einerley Kreiſe die Fliehkräfte ſich wie die Quadrate der Geſchwin-

digkeiten, und dieſe Quadrate der Geſchwindigkeiten wieder verhalten, wie die Räume des Falles, wodurch dieſe Geſchwindigkeiten erlangt werden; überdies aber die im Fall durch den halben Halbmeſſer erlangte Geſchwindigkeit eine der Schwere gleiche Fliehkraft erzeugt, ſo folgt, daß die im Fall durch den ganzen Halbmeſſer erzeugte Geſchwindigkeit, wiederum eine Fliehkraft erzeugen muß, die der Schwere doppelt genommen gleich iſt. Demnach wird der Faden im Mittel ſeines Schwungs von einer Kraft geſpannt, die der Schwere, dreymal genommen, gleich iſt.

§. 156.

Im §. 151. haben wir erwieſen, daß das Pendel in ſeiner Wirbelbewegung ſeine Kreiſe, wenn ſie ſehr klein ſind, alle in gleicher Zeit beſchreibt, ſie mögen kleiner oder größer ſeyn. Nunmehr läßt ſich überdies die Kegelfläche beſtimmen, worinn der freybewegte Körper alle ſeine Umläufe in gleicher Zeit vollendet, er mag größere oder kleinere Kreiſe im Kegel zurücklegen: dieſe Kreiſe mit dem Horizont parallel, und folgendes in Acht genommen. Es ſey DFA (Taf. IX. Fig. 10.) eine Kurve, durch deren Umdrehung um die Axe GA der Kegel beſchrieben wird, worinn FE und BC einander unendlich nahe Ordinaten: ferner ſey CB = y, und FR = dy. Dies vorausgeſezt, iſt y der gemeinſchaftliche Halbmeſſer der Parallelkreiſe, worinn ſich die Körper dergeſtalt herumdrehen, daß beym Gleichgewicht der Fliehkraft mit der Schwere, die Zeiten, was auch für ein Kreis beſchrieben wird, gleich ſind.

Nun

Nun heiſe s die der Geſchwindigkeit in B zugehörige Höhe, und g die natürliche Schwere, ſo wird

$\frac{1}{2}y : g = s = \frac{2s}{y} g$, und dieſe Größe iſt die Fliehkraft im Kreiſe, deſſen Halbmeſſer BC = y. Es drücke BH die Fliehkraft, BI die Schwere aus; und da die Fliehkraft überall mit der Schwere im Gleichgewicht, ſo muß offenbar die Kraft in B, die beyden Kräften, der Fliehkraft ſowohl, als der Schwere, gleich iſt, auf die Kurve DBA ſenkrecht ſeyn. Widrigenfalls wird der bewegte Körper entweder nach D ſteigen, oder nach A fallen, da doch keins von beyden erfolgen kann, wenn beyde Kräfte vereinigt auf die Kurve DBA ſenkrecht wirken.

Dies alſo vorausgeſezt, iſt KH : HB = dy : dx. Denn FR mit HB gleichlaufend, folglich die Wechſelwinkel BFR und FBH gleich, ſo wie auch ihre Ergänzungen zu 90°, oder die Winkel FBR und HBK.

Daher $g : \frac{2s}{y} g = dy : dx$, und $s = \frac{ydx}{2dy}$. Da aber die Bewegung in jedem Kreiſe gleichförmig geſezt wird, ſo verhält ſich auch die Zeit, wie der zurückgelegte Raum durch die Geſchwindigkeit dividirt: und da der Raum des Kreiſes Umfang ſelbſt iſt,

ſo wird die Zeit, g = 1 geſezt, $= \frac{P\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} =$

$\frac{ny.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}}$, weil der Umkreis ſich als ein Vielfaches des Halbmeſſers betrachten, und das beſtändige Verhältnis dieſes zu jenem durch $1 : n$ ausdrücken läßt.

Man nimmt aber die Umlaufszeit in jedem Umkreis gleichgros, und daher unveränderlich an. Demnach $\frac{ny.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = a$, folglich $\frac{n^2y^2dy}{ydx} = a^2$, und $y^2 = \frac{2aa}{nn}.x$. Aber $\frac{aa}{nn}$ eine beſtändige Größe. Demnach muß die geſuchte Kurve, durch deren Umdrehung der geſuchte Kegel erzeugt wird, eine Parabel ſeyn, deren Parameter $\frac{2aa}{nn}$.

§. 157.

Daher iſt die Umlaufszeit in den Kreiſen des paraboliſchen Afterkegels $\frac{P.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}}$, wenn $g = 1$; und ſezt man den Parameter der Parabel $\frac{2aa}{nn} = p$, ſo wird dieſe Zeit $\frac{P.\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = \frac{P\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}$. Aber die

Schwin-

Schwingungszeit des einfachen Pendels, deſſen Län-
ge l heiſt, $= \frac{P\sqrt{l}}{d}$, wenn d : P das Verhältnis
des Durchmeſſers zum Umkreis. Daher verhalten
ſich dieſe Zeiten, 2y ſtatt d geſezt, wie $\frac{\sqrt{l}}{2y} : \frac{\sqrt{p}}{y\sqrt{2}}$,
und, $l = \frac{1}{2}p$ geſezt, wie 1 : 2.

Folglich wird ein ganzer Umlauf im paraboliſchen Afterkegel in eben der Zeit vollendet, worinn das einfache Pendel, deſſen Länge gleich dem halben Parameter der Parabel, zwey volle Schwünge zurücklegt.

Sezt man in der vorhingefundenen Gleichung
$\frac{ny\sqrt{dy}}{\sqrt{ydx}} = a$, ein ander Verhältnis der Zeit, ſo entſtehen hieraus mehrere Aufgaben, die alle auf ähnliche Art aufgelöſt werden. Da wir aber die vorzüglichſten und merkwürdigſten bereits vorgetragen haben, ſo wollen wir uns bey den minder wichtigen länger nicht aufhalten.

Zehnte Vorleſung.

Von dem aus der Kenntnis der Centralkräfte entſpringenden Nutzen, und ihrem Gebrauch bey Erklärung der Bewegungen der Weltkörper, und der Kräfte, von welchen dieſe Bewegungen hervorgebracht werden.

Inhalt.

§. 194 — 197. Die Erde ſelbſt iſt nicht mit eben der Schwere verſehen, die ihre Theile beſitzen. §. 197. Urſache der Bewegungen der Himmelskörper. §. 198. 199. Regeln, die Natur und Eigenſchaften der Centralkräfte zu finden. §. 199 — 203. Weitere Ausführung davon.

§. 194.

Bisher betrachteten wir die Centralkräfte in den leichteſten Fällen, wo ſie die Körper mit gleichförmiger Bewegung in Linien herumdrehen, in deren ſämmtlichen Punkten die Kräfte ſelbſt gleichgros und unveränderlich ſind. Aber dieſe Lehre von den Centralkräften gewinnt eine ganz andere Geſtalt, wenn ſie in andern Kurven Körper herumdrehen. Denn hier ändern ſich die Kräfte beſtändig in jedem Punkt der Kurve, ob ſie ſich gleich im ganzen Umlauf nach einem, in veränderlichen Größen ausgedrückten Geſetz richten. Dies wollen wir in gegenwärtiger Vorleſung deutlicher aus einander

ander ſetzen, und zugleich den großen Nutzen der Lehre von den Centralkräften zeigen. Sie iſt es, die uns zu genauer Kenntnis der Natur, ihrer Geſetze und Kräfte führt, und uns die Einrichtung der Natur, die wir bey den Bewegungen der Himmelskörper wahrnehmen, vor Augen ſtellt.

§. 195.

Um den Verſtand deſto beſſer darauf vorzubereiten, laſſet uns die mathematiſchen Betrachtungen ein wenig unterbrechen, und zu andern übergehen, die in die Natur- und zum Theil in die Sittenlehre einſchlagen. Jederman wundert ſich, wie unſere Erde in ihrer Stelle bleiben kann, ohne herunter zu fallen. Aber dieſe Frage iſt ungereimt. Denn da die Schwere, wodurch die Körper gegen den Mittelpunkt der Erde gedrückt werden, nur auf die Theile der Erde, nicht aber auf die Erde ſelbſt wirkt, ſo müſſen zwar auch nothwendig jene Theile, ſie mögen groß oder klein ſeyn, nach der Erde Mittelpunkt getrieben werden: aber die Erde ſelbſt, die kein Beſtreben nach ihrem Mittelpunkt hat, rückt nicht aus ihrer Stelle. Vielmehr iſt die Erde blos mit ihrer Trägheit verſehen, und weiter iſt keine Unterſtützung, um ihren Fall zu verhindern, nöthig. Demnach ſind es, aus bloſer Unwiſſenheit ausgeheckte Hirngeſpinſte, die Menſchenwitz erſann, um, mit ihrer Hülfe, die Erde für dem Fall ſicher zu ſtellen. Hieher gehört ſowohl die vor Alters im Schwang gehende Meynung, nach welcher man glaubte, die Erde ſchwimme in einem Waſſer, als auch andere, die der Erde Stützen, und gewiſſen Geiſtern den Auftrag gaben, die Erde zu tragen. Von dieſer Einbildung

bildung waren nicht nur viele der Alten eingenommen, noch heut zu Tage klebt ſie in manchem, vom Licht der Wiſſenſchaften, unerleuchteten Gehirn. Hieher iſt auch der gemeine, aus roher unbelehrter Frömmigkeit entſprungene Wahn zu nehmen, welcher glaubt, die Erde werde von der Hand des Schöpfers getragen, und bleibe durch ein göttliches Wunderwerk in ihrer Stelle. Daß aber dergleichen Erdichtungen die deutlichſten Beweiſe der Unwiſſenheit ihrer Erfinder ſowohl, als ihrer Anhänger ſind, ſieht jeder Anfänger in der Naturlehre und Meßkunſt. Nichts iſt in der Erde auſer der Trägheit vorhanden; und die Haupteigenſchaft dieſer Kraft iſt, daß der damit verſehene Körper beſtändig in eben der Stelle bleibt, wo er nicht von einer äuſern Kraft daraus gerückt wird.

§. 196.

Aber weit ſchwerer ſcheint es zu begreifen, wie die Himmelskörper, die wir Planeten nennen, und welche unſerer Erde ähnlich ſind, vom Anfang der Welt beſtändig einerley Bahnen, ohne einige Veränderung am Himmel beſchreiben, und nie im geringſten aus den Linien ſchweifen, worinn ſie den Umlauf einmal vollendet haben.

Daß jedoch in der That an der Kenntnis der Urſache hiervon ſehr viel liegt, wird niemand zweifeln. In wie viel Irrthümer die Unwiſſenheit derſelben die Alten geführet, und wieviel noch heut zu Tage unter den, von Wiſſenſchaften und geſunder Religion entfernten Völkern daraus entſtehen, lehren der Aberglaube und Götzendienſt zur Genüge, der faſt insgeſammt auf den irrigen Begriffen der menſchlichen

Einbildung beruht, die bey Unterſuchung der Urſachen von den Bewegungen am Himmel, den Knoten, den ſie nicht auflöſen konnte, elender Weiſe zerſchnitt. Um die Dauer dieſer Bewegungen zu begreifen, bildeten ſie ſich ein, die Sonne und die übrigen himmliſchen Körper wären Perſonen, die ſich ſelbſt, wie Menſchen, frey bewegten, und bey ihrer Bewegung zum Beſten des menſchlichen Geſchlechts ſich gewiſſe Regeln vorgeſchrieben hätten. Daher müſſe man ſie auch anbeten und verehren, ihnen Tempel und Altäre bauen und darinnen räuchern. Laßt uns aber zu unſerm Zweck zurückkehren. Denn was wir in dieſer Ausſchweifung kürzlich berührten, geſchah blos, um zu zeigen, wie viel dem menſchlichen Geſchlecht an gehöriger Einſicht in die hier vorgetragenen Wahrheiten gelegen, die der Menſch zur Aufklärung ſeines Verſtandes wiſſen muß: wenn man auch gar keine Rückſicht auf andere Theile der Mechanik und Naturlehre nimmt, die daraus erläutert und verſtanden werden.

§. 197.

Damit aber erhellt, wie ſolche Körper, wie Planeten, ihre Bewegung am Himmel in eben der Bahn, ohne einige Veränderung beybehalten können; ſo erinnere man ſich, was ſchon gröſtentheils im vorhergehenden erklärt worden. Denn wird ein Körper A, (Taf. X. Fig. 1.) der mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, in einer Richtung AD ſich fortzubewegen beſtrebt, von einer beſtändig drückenden Kraft, wie unſere Schwere, ſtets zurückgezogen, und nach einem Punkt C getrieben; ſo entſteht eine ſolche Bewegung. Der Körper entfernt ſich in ſeiner Bewegung

gung nach der Tangente immer mehr vom Mittelpunkt, z. B. um das Stück BE, hieraus entſteht die Fliehkraft, die ſich verhält wie BE. Iſt aber zugleich die, den Körper in jedem Augenblick nach dem Mittelpunkt drückende Schwerkraft mit der, in jedem Augenblick erzeugten Fliehkraft im Gleichgewicht, ſo muß offenbar der Körper A am Ende der augenblicklichen Bewegung im Punkt einer Kurve E ſich befinden. Aus eben dem Grunde würde der Körper im folgenden Augenblick, wenn die Schwerkraft in dieſem Augenblick zu wirken aufhörte, mit ſeiner Geſchwindigkeit nach der Tangente EF ſich bewegen, und vom Mittelpunkt entfernen: da er aber in eben dieſem Augenblick wiederum von der Schwerkraft nach eben den Mittelpunkt durch die Linie FG, die die Fliehkraft ausdrückt, getrieben wird; ſo gelangt der, von beyden Kräften zugleich gereizte Körper nach G, und beſchreibt alſo eine krumme Bahn um den Mittelpunkt der Kräfte. Und da bey jedem Umlauf eben das Verhältnis der Geſchwindigkeiten und der Centralkräfte bleibt, ſo müſſen nothwendig alle folgenden Umläufe, wenn keine äuſere Urſache, die die Bewegung ſtört, darzwiſchen kommt, in Ewigkeit auf eine und eben die Art, wie der erſte Umlauf, zurückgelegt werden.

§. 198.

Hier läßt ſich aber folgende Frage vorlegen: **Trifft man auſer der Schwere noch andere Centralkräfte in der Natur an,** die die Körper nach einen und denſelben Punkt ſtoßen, und mit was für Gründen wird ihr Daſeyn erwieſen? Ehe wir darauf antworten, bemerke man folgendes:

Wird

Wird der in der Kurve EAN (Taf. IX. Fig. 11.) deren hole Seite gegen den feſten Punkt C gekehrt iſt, von einer Centralkraft beſtändig nach dem Punkt C getrieben; ſo verhalten ſich die Zeiten der Bewegung, wie die Centralausſchnitte dieſer Kurve, d. i. die Zeiten durch die Bogen AB und ABE verhalten ſich wie ABC und ABEC.

Um dieſes zu erweiſen, laſſet uns die Bogen AB und BE unendlich klein, und als gerade Linien annehmen. Da nun der Körper mit der Geſchwindigkeit, womit er ſich durch AB bewegt, im folgenden Moment durch BD getrieben wird, ſo daß dieſe Momente gleich ſind, folglich auch AB = BD; ſo müſſen die Dreyecke DCB und BCA gleich ſeyn, wegen ihrer gemeinſchaftlichen Grundlinie BC und den gleichen Höhen. Unterdeſſen wird aber der Körper von der Schwerkraft beſtändig nach C in der Richtung BC getrieben. Wird alſo dieſe Schwerkraft durch FB ausgedrückt, ſo muß der Körper die Diagonallinie BE durchlaufen. Man ergänze das Parallelogramm EDBF, ſo iſt ED parallel mit BC, daher ſind die Dreyecke CEB und CDB zwiſchen den nämlichen Parallelen DE und BC enthalten, und ſtehen auf der nämlichen Grundlinie BC. Folglich auch das Dreyeck CEB = CBA.

Da nun, vermöge der Vorausſetzung, die Zeiten durch EB und BA gleich ſind, ſo verhalten ſie ſich auch wie dieſe Dreyecke, und da eben dies von allen Elementen der Kurve gilt; ſo iſt klar, daß, wenn ein Körper von der Centralkraft gegen einen Punkt C getrieben, und in einer Kurve bewegt wird, deren

hole

hole Seite gegen dieſen Punkt gekehrt iſt, und eben dieſe Kraft in jedem Punkt der Kurve drückt, die Zeiten der Bewegung ſich verhalten, wie die Ausſchnitte, die von geraden Linien, aus dem Mittelpunkt an die Enden der durchlaufenen Bogen gezogen, begränzt werden, oder wie CAB : CABE.

§. 199.

Eben ſo leicht wird der umgekehrte Satz erwieſen: **verhalten ſich die Zeiten in der Kurve, wie die von Linien, aus einem feſten Punkt C an die Enden der Bogen, deren hole Seite dieſem Punkt zugekehrt iſt, begränzten Ausſchnitte, oder verhalten ſich die Zeiten durch die Bogen EB und EBA, wie ECB und ECAB; ſo wird der bewegte Körper durch die ganze Linie von einer gegen den Punkt C drückender Centralkraft gereizt.** Denn es erhellt, daß die Bewegung in gleichen Zeiten vom Bogen AB nach BD ſo geſchehen muß, daß AB = BD. Da aber der bewegte Körper von BD nach BE gerückt wird, ſo daß DCB = BCA = ECB, ſo muß auch ſeyn ECB = CDB, und weil die Grundlinie BC einerley, ED mit BC parallel. Aber EFBD das Parallelogramm der Kräfte, wodurch der Körper nach BE getrieben wird. Daher muß auch die eine in der Richtung BF gegen den Mittelpunkt C wirken; folglich in Rückſicht auf dieſen Punkt eine Centralkraft ſeyn.

Da eben dieſer Beweis für alle Elemente der Kurve gilt, ſo wird auch der Körper überall in allen Punkten von der Centralkraft gegen den Punkt C getrieben werden, ſo oft die Zeiten den Abſchnitten ECB und ECAB proportional ſind.

§. 200.

§. 200.

Da nun die Beobachtungen der Sternkundigen, und die darauf gebaute Rechnung lehren, daß die Planeten ſich in elliptiſchen Bahnen, z. B. in CDB (Taf. IX. Fig. 12.) dergeſtalt bewegen, daß die Ausſchnitte vom Brennpunkt f, CfB und AfB den Zeiten proportional ſind; ſo folgt, daß dieſe Körper von Centralkräften beſtändig gegen dieſen Punkt getrieben werden, und dieſe Kräfte die Urſachen der himmliſchen Bewegungen ſind.

§. 201.

Die phyſiſche Beſchaffenheit und Natur dieſer Kräfte wollen wir gegenwärtig nicht unterſuchen. Dies iſt den phyſiſchen Vorleſungen zu überlaſſen. Aber einige Benennungen müſſen wir erklären, deren Bedeutung uns bekannt ſeyn muß, damit wir in der folgenden Vorleſung nicht aufgehalten werden, wo die Geſetze, wornach ſich die in der Natur vorhandenen Centralkräfte richten, entwickelt werden ſollen. Dies iſt der Zweck, zu deſſen Behuf wir gegenwärtige Betrachtung anſtellten.

Man bemerke alſo

1.) der Punkt C, gegen welchen die Kräfte während der Bewegung in der Kurve beſtändig drücken, heiſt der Mittelpunkt der Kräfte. 2.) Die vom Mittelpunkt der Kräfte nach dem bewegten Körper gezogene Linie CB, heiſt der Radius Vector: denn in dieſer Linie ſcheint der, in der Kurve bewegte Körper gleichſam fortzurücken.

3.) Die durch dieſe Bewegung beſchriebene Kurve NBE ſelbſt, heiſt die Bahn.

§. 202.

Noch iſt in Acht zu nehmen, daß ſich für jede Linie HAG (Taf. IX. Fig. 13.) ein Kreis BAE gedenken läßt, deſſen Bogen mit dem unendlich kleinen Bogen der Kurve in A völlig zuſammenfällt. Der Kreis BAE heiſt der Krümmungskreis, ſo wie ſein Halbmeſſer AD der Krümmungshalbmeſſer.

§. 203.

Endlich wollen wir noch folgendes hinzufügen: **Auf was Art ſich auch der, von Schwerkräften nach einem gewiſſen Geſetz gereizte Körper in der Kurve mit ſeiner Geſchwindigkeit bewegt, ſo verhält ſich doch dieſe ſeine Geſchwindigkeit in irgend einem Punkt B (Taf. IX. Fig. 11.) umgekehrt wie das, vom Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangente der Kurve Et gefällte Loth Ct.**

Denn die Geſchwindigkeit im Dreyeck ECB verhält ſich wie die Grundlinie BE, wenn die Zeit gleich groß oder beſtändig genommen wird. §. 14. Vorl. Da aber bey gleichen Zeiten dieſe Dreyecke gleich ſind, (§. 198.) und in gleichen Dreyecken die Grundlinien ſich verkehrt verhalten wie die Höhen; ſo verhält ſich die Geſchwindigkeit umgekehrt wie die, auf die Tangenten gefällten Lothe.

Eilfte

Eilfte Vorleſung.

Von den Geſetzen der Centralkräfte in der Natur.

Inhalt.

§. 204 — 207. Die Centralkräfte in der Natur verhalten ſich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen. Erweis aus den Eigenſchaften der Kegelſchnitte. §. 207. 208. Nach dieſem Geſetz richtet ſich auch die Schwere in unſern Gegenden. §. 209. Die Erde ſelbſt iſt, nebſt den übrigen Planeten, gegen die Sonne ſchwer. §. 210. Die Schwere drückt den Mond gegen die Erde, und verurſacht den Fall der Körper. §. 211. Geſchwindigkeit, womit der Körper geworfen werden muß, um dieſen oder jenen Kegelſchnitt zu beſchreiben. §. 212. 213. Die Centralkräfte richten ſich nach verſchiedenen Geſetzen, wenn die Punkte, nach welchen ſie die, in eben der Bahn liegenden Körper drücken, verſchieden ſind.

---

§. 204.

Da wir im vorhergehenden das Daſeyn der Centralkräfte in der Natur erwieſen; ſo iſt noch übrig, die Geſetze zu unterſuchen, nach welchen ſich dieſe Kräfte richten, und die umlaufenden Körper treiben. Die **Bahnen** der Körper ſind **Ellipſen**. Da aber dieſe Geſetze der Kräfte durch eben die Arbeit zugleich auch in den übrigen Kegelſchnitten, der **Parabel** und **Hyperbel**, gefunden werden; ſo wollen wir ſie hier auf eine allgemeine Art abhandeln und erörtern. Und dieſes ſoll folgendergeſtalt geſchehen:

§. 205.

Die Sache kömmt nämlich auf die Beſtimmung des Geſetzes der Centralkräfte in der Natur an, von welchen uns die Eigenſchaft bekannt iſt, daß die, von ihnen gereizten und mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit bewegten Körper ſich in Kegelſchnitten herumdrehen. Denn beſchrieben dieſe Körper andere Linien, ſo würden auch die Centralkräfte anders und verſchieden ſeyn, und nach andern Geſetzen wirken. Denn es iſt allgemein wahr, daß aus der gegebenen Kurve, worinn die Kräfte gegen einen beſtimmten Mittelpunkt ſtoßen, ſich die Geſetze dieſer Kräfte finden laſſen, und dieſe verſchieden ſind, ſo wie jene ſich ändern.

Wir wollen aber in dieſen Vorleſungen keine andern Geſetze der Kräfte beſtimmen, als diejenigen, nach welchen Kegelſchnitte beſchrieben werden. Dieſe Betrachtung leidet keine Schwierigkeit. Es ſey alſo HAG (Taf. IX. Fig. 13.) ein Kegelſchnitt, und BE ein Kreis, der die Kurve im Punkt A berührt, deſſen Krümmungshalbmeſſer AD. Dies vorausgeſezt, verhält ſich die, im Kreis gegen ſeinen Mittelpunkt drückende Fliehkraft, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit in A, dividirt durch 2AD, §. 176.

Die Geſchwindigkeit aber in der Kurve iſt $= \frac{1}{CF}$.

§. 203.; daher auch die, zum Mittelpunkt D des Krümmungskreiſes gehörige Geſchwindigkeit $= \frac{1}{CF}$.

Ferner

Ferner verhält ſich auch die Centralkraft im Kreis zur Centralkraft in der Kurve HAG, wie ed : df. Denn die Kräfte verhalten ſich, wie ihre in gleichen Zeiten erzeugten Effekte. Nun iſt in den Dreyecken edf und FCf der Winkel f beyden gemein, und F und e rechte Winkel, weil De und AD unendlich nahe. Folglich auch die Dreyecke edf, FCf ähnlich, daher fd : de = fC : CF. Hieraus erhellt, daß **die Centralkraft in jeder Kurve und in jedem Punkte derſelben ſich verhält zur Centralkraft in dem, die Kurve in dieſem Punkte berührenden Kreiſe, wie der *Radius Vector* zum Loth auf die Tangente.**

Da aber $de = \frac{1}{2AD.\,CF^2}$. §. 205. ſo wird fd, oder die, in jeder Kurve zu dieſem de gehörige Centralkraft $= \frac{DC}{2AD.\,FC^3}$, denn dC und fC ſind von einander nicht verſchieden, wenn man fd unendlich klein annimmt.

Demnach ſteht die Centralkraft in allen Kurven überhaupt im zuſammengeſezten Verhältnis des Radius Vector, und dem verkehrten des Krümmungshalbmeſſers, in den Würfel des, auf die Tangente gefällten Loths multiplicirt.

§. 206.

Dieſes, ſo in allen Kurven überhaupt ſtatt findet, wollen wir auf die Kegelſchnitte anwenden. Zu

dem Ende iſt zu merken, was in der Analyſis erwieſen wird, daß nämlich, wenn BE (Taf. IX. Fig. 14.) ein Kegelſchnitt, EA ſeine Tangente, und EF das, auf die Tangente im Berührungspunkt gefällte Loth, der Krümmungshalbmeſſer $= \frac{4EF^3}{p^2}$, wo durch p der Parameter der Kurve verſtanden wird. Demnach iſt in jedem Kegelſchnitt die Centralkraft $= \frac{p^2 . dC}{8EF^3 . FC^3}$.

Setzen wir nun ferner, wie ebenfalls in der Analyſis dargethan wird, das, aus dem Brennpunkt D, oder dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangente gefällte Loth DC $= \frac{DE . \frac{1}{2}p}{EF}$, und dieſe Größe ſtatt FC in dem vorhin gefundenen Werth $\frac{p^2 . DC}{8EF^3 . FC^3}$, ſo entſteht daraus der Werth der Centralkräfte $= \frac{p^2 . dC . EF^3}{DE^3 . \frac{1}{8}p^3 . 8EF^3} = \frac{dC}{DE^3 . p}$, und weil dC hier DE, $= \frac{1}{DE^2 . p}$. Da nun p, oder der Parameter der Figur beſtändig, ſo erhellt, daß die Centralkräfte in jedem Kegelſchnitt, womit

mit die Körper gegen den Mittelpunkt der Kräfte, oder den Brennpunkt des Kegelſchnitts gedrückt werden, ſich überall umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der *Radiorum Vectorum*, d. i. umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt.

§. 207.

Hieraus ſieht man das Geſetz der Kräfte in der Natur. Denn die aſtronomiſchen Betrachtungen lehren, daß die Himmelskörper ſich in Ellipſen dergeſtalt bewegen, daß die Zeiten durch die Bogen ſich wie die Ausſchnitte vom Brennpunkt der Ellipſe verhalten. Daher verhalten ſich auch die Kräfte, die Bewegung und Umlauf bewirken, umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen von einem feſten Punkt, welches der Brennpunkt iſt. §. 199. Die Kenntnis dieſes Geſetzes iſt von der größten Wichtigkeit zur Einſicht in die Natur. Hieraus lernen wir die Zeiten ſowohl, als die Oerter der am Himmel wahrzunehmenden Bewegungen kennen. Mehrere aus dem erwieſenen Satz herzuleitende Schlüſſe verſparen wir an einen andern Ort; gegenwärtig wollen wir nur das anführen, was zur Mechanik gehört, und der Endzweck unſerer Unterſuchung iſt.

§. 208.

Wir kehren alſo zur Schwere zurück, deren Natur aus dem geſagten abzunehmen iſt. Im vorhergehenden nahmen wir öfters als ausgemachte Hypotheſe an, daß unſere Schwere im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde abnimmt. Daß dieſes wahr ſey, erhellt

erhellt aus angeführtem ſehr deutlich. Denn die Sache muß ſich nothwendig ſo verhalten. Dies folgt aus den Geſetzen, wornach ſich alle Centralkräfte überhaupt in der Natur richten. Die Schwere kann alſo von dieſem Geſetz nicht ausgenommen ſeyn; noch anders als nach dem verkehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkt der Kräfte wirken.

Anmerkung. Dies läßt ſich zwar aus dem geſagten nicht ſchlieſen, wie der Herr **Verfaſſer** will, vielweniger folgt nothwendig und unmittelbar daraus, daß eben das Geſetz, wornach ſich die Schwerkraft, als die Urſache der himmliſchen Bewegungen richtet, den übrigen anziehenden und Schwerkräften in der Natur gleichfalls vorgeſchrieben ſey, vergl. Anm. zu §. 44. Vorl. daß jedoch das erſte ſich wirklich ſo verhält, und unſere Schwere mit der Schwerkraft im Himmel von einerley Natur und eben den Wirkungsregeln unterworfen, wird erſt durch das, was §. 120. folgt, erwieſen. (T.)

§. 209.

Daß die Schwere durchgehends allen Körpern, die ſich durch die Sinnen wahrnehmen und beobachten laſſen, beywohnt, ſehen wir. Die Sonne, der größte Körper, liegt alſo im **Brennpunkt**, oder im gemeinſchaftlichen Mittelpunkt aller Bahnen, worinn ſich die himmliſchen Körper bewegen; die insgeſammt durch ihre Schwere nach der Sonne Mittelpunkt ſtreben, und mit einer Kraft getrieben werden, die ſich umgekehrt verhält, wie die Quadrate der Entfernungen von dieſem Mittelpunkt. Dieſe Kraft iſt

in allen einerley: alle ſtreben gegen die Sonne zu fallen, und wie auf unſerer Erde in die Höhe geworfene Körper wieder niederſinken, und, würden ſie nicht gehindert, der Erde Mittelpunkt erreichten, ſo würden jene Himmelskörper in die Sonne ſtürzen, wenn nicht eine andere Urſache dieſer Bewegung im Wege ſtünde.

§. 210.

Doch fragt ſich es noch: **iſt unſere Schwere, ihrer abſoluten Größe nach, mit der beſagten allgemeinen Schwere oder Schwerkraft einerley?** oder kömmt ſie blos darinn mit ihr überein, daß ſie ſich nach eben dem Geſetz und Verhältnis richtet? daß aber beyde eine und dieſelbe Kraft ſind, wird erwieſen und auſer allen Zweifel geſezt. **Denn die Centralkraft, womit der Mond in ſeiner Bahn ſich um die Erde bewegt, iſt mit unſerer Schwere einerley, durch ſie fällt er gegen der Erde Mittelpunkt völlig eben ſo, wie unſere ſchweren Körper auf der Oberfläche dieſer Kugel.**

Dies ſchließt man folgendergeſtalt: Wir wiſſen aus der Sternkunde, daß die Bahn, worinn der Mond um die Erde herumläuft, mit einem Kreiſe zwar nicht völlig, doch beynahe übereinkömmt, und ſich, wenn wir auf die ganze Umlaufszeit ſehen, als ein Kreis annehmen läßt. Der Mond iſt zwar bald näher bey der Erde, bald weiter von ihr entfernt, aber die mittlere Weite zwiſchen der kleinſten und größten findet ſich beynahe 60 halbe Erddurchmeſſer; denn wir bekümmern uns um keine größere Schärfe

 in

in Zahlen, die in gegenwärtiger Rechnung wegbleiben kann. Ferner lehren auch die Beobachtungen der Sternkundigen, daß die periodiſche Umlaufszeit des Monds 27 Tage, 7 Stunden beynahe, oder 2358000 Sekunden.

Dies vorausgeſezt, ſchließt man folgendergeſtalt: Da man annimmt, der Mond bewege ſich im Kreiſe, ſo findet man ſehr leicht aus dem vorhergehenden ſeine mittlere Geſchwindigkeit, womit er in einer Sekunde ſeine Bahn verfolgt. Denn nach §. 183. iſt dieſe Geſchwindigkeit mit der einerley, die im Fall durch $\frac{1}{120}$ des Erdhalbmeſſers erlangt wird, ſo daß in einer Sekunde 3134′ zurückgelegt werden. Nun iſt der Halbmeſſer der Mondsbahn = 1176948000 Fuß, wenn der halbe Erddurchmeſſer = 19615800′. Folglich der ganze Umfang des Mondkreiſes 7391233440′, der durch 3134′ zu dividiren, um die Umlaufszeit des Monds = 2358400″ zu erhalten, die von der wahren nur um 400″ unterſchieden iſt, welcher Unterſchied hier billig auſer Acht gelaſſen wird, da er ſelbſt ſehr gering, und auch die wahre mittlere Entfernung um etwas von 60 halben Erddurchmeſſern, wie wir ſie hier annehmen, unterſchieden iſt.

§. 211.

Hieraus folgt, daß die Schwerkraft, wodurch der Mond in ſeiner Bahn ſich bewegt, mit unſerer Schwere einerley iſt. Jene erzeugt eben die Bewegung, die dieſe in der Entfernung des Monds von der Erde hervorbringen würde; denn in dieſer Entfernung muß unſere Schwere nur $\frac{1}{3600}$ der Gewalt haben, die ſie auf der Erdfläche hat. Hieraus lieſen

ſich

ſich mehrere Folgen ſchlieſen, und unter andern darthun, daß eben dieſe Schwere auch die übrigen Planeten gegen die Sonne, und die Trabanten der Planeten gegen die Planeten ſelbſt drückt, wo es nicht zu weitläuftig wäre, und die Gränzen dieſer Vorleſungen überſchritte.

Statt deſſen laßt uns folgendes hinzufügen: Es läßt ſich die **Geſchwindigkeit geworfener Körper beſtimmen**, *) **um dieſen oder jenen Kegelſchnitt zu beſchreiben.**

1.) **Bewegen ſie ſich im Kreiſe, wenn die Geſchwindigkeit, womit ſie geworfen werden, mit der einerley iſt, die im Fall durch die halbe Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte, d. i. durch** $\frac{1}{2}$AC **erlangt wird,** (Taf. IX. Fig. 7.) **und die Richtung des Wurfs auf die Entfernung in A, wo ſie von der Centralkraft durch** $\frac{1}{2}$AC **gereizt werden, ſenkrecht iſt.**

2.) Wenn die Körper mit einer Geſchwindigkeit geworfen, deren zugehörige Höhe doppelt ſo groß, als diejenige, die zur Kreisbewegung, oder zur Vernichtung der Effekte der Schwere erfordert wird, ſo müſſen die geworfenen Körper eine **Parabel um den Mittelpunkt der Kräfte beſchreiben.** Man nimmt aber an, daß die Kräfte im verkehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen wirken.

3.) Iſt die Geſchwindigkeit, womit der Körper geworfen wird, noch größer als die, ſo zur Beſchreibung der **Parabel** erfordert wird, ſo wird der geworfene Körper ſich in der **Hyperbel** bewegen.

4.) Iſt

*) S. Zuſ. §. 170 — 172.

4.) Iſt aber die Geſchwindigkeit kleiner als die, ſo zur Bewegung in der Parabel nöthig, ſo wird allemal eine Ellipſe beſchrieben, den einzigen Fall ausgenommen, wo die Bewegung im Kreiſe geſchieht. Wird eine Ellipſe beſchrieben, ſo iſt der Mittelpunkt der Kräfte in dem einen Brennpunkt, wenn die Geſchwindigkeit des Wurfs größer als die, ſo im Kreis nöthig: in dem andern entgegengeſezten aber, wenn ſie kleiner.

5.) Ferner iſt auch zu merken: Wenn drr Mittelpunkt der Kräfte ein mathematiſcher Punkt ohne Größe und Materie, ſo wird der Körper, was für Geſchwindigkeiten er auch hat, nie zum Mittelpunkt fallen, ſondern ſich um ihn herumdrehen, und zwar in einer Bahn aus den Kegelſchnitten, und nie in einer andern Kurve.

§. 212.

Wir ſetzen noch, ehe wir ſchlieſen, folgendes hinzu, was vielleicht dem aufmerkſamen Leſer ſchon für ſich beygefallen. Es liegt ſehr viel daran, wo der Mittelpunkt der Centralkräfte in einer Kurve liegt, nach welchen die Schwerkräfte den umlaufenden Körper ſtoßen. Denn ändert ſich dieſer Punkt, indem die Kurve einerley bleibt, ſo wird eine andere Centralkraft erfordert, auch müſſen ſich die Kräfte nach einem andern und verſchiedenen Geſetz richten, um die Bewegung in eben der Kurve beyzubehalten. Dies deſto beſſer zu verſtehen, wollen wir es mit dem einfachſten Beyſpiele aus der Kreisbewegung erläutern.

Es ſey ADB (Taf. IX. Fig. 15.) ein Kreis, ſo iſt nach §. 205. das Verhältnis der Centralkraft zu-

ſammen-

ſammengeſezt aus dem geraden des Radius Vector, und dem verkehrten des Produkts aus dem Krümmungshalbmeſſer in den Würfel des, auf die Tangente EAF gefällten Loths. Drückt daher die Centralkraft nach des Kreiſes Mittelpunkt, ſo iſt ſie

$$= \frac{AC}{AC.\,AC^3} = \frac{1}{AC^3},$$ d. i. im verkehrten Verhältnis des cubirten Radius Vector.

Wirken aber die Kräfte nach einem andern Punkt D im Umkreiſe, und heißt das Loth auf die Tangente EAF, DE, der Radius Vector DA, AC aber der Krümmungshalbmeſſer, der hier mit des Kreiſes Halbmeſſer ſelbſt einerley iſt; ſo wird die Centralkraft $= \frac{DA}{AC.\,DE^3}$. Aber die Dreyecke AED, ADB ähnlich, weil ED, AB Lothe auf EAF, folglich parallel. Daher AB : DA = DA : ED, und $ED = \frac{DA^2}{AB}$. Demnach iſt die, gegen den Punkt D im Umkreis reizende Centralkraft $= \frac{DA.\,AB^3}{AC.\,DA^6}$, welches, weil das Verhältnis des Halbmeſſers zum Durchmeſſer beſtändig, beyde zu einerley Dignität erhoben, in $\frac{1}{DA^5}$ übergeht. Daher

verhält

verhält ſich die, nach einem Punkt im Umkreis drückende Centralkraft umgekehrt, wie der zur fünften Dignität erhobene Radius Vector.

§. 213.

Eben ſo iſt, wenn die Centralkraft gegen einen andern Punkt innerhalb des Umkreiſes, z. B. gegen B, ſtrebt, und GAD die Tangente, BA der Radius Vector, BD das Loth auf die Tangente, die, den Körper gegen den Punkt B ſtoßende Centralkraft $= \frac{AB}{FC.BD^3}$. §. 205. Aber die Dreyecke FAE, ABD ähnlich, wegen dem Winkel DAE = AFE, und den rechten Winkeln bey D und A, daß alſo FE : AE = AB : DB, daher auch $DB = \frac{AB.\ AE}{FE}$. Dieſen Werth ſtatt DB in $\frac{AB}{FC.BD^3}$ geſezt, erhält man $\frac{AB.FE^3}{FC.AB^3.AE^3}$, welches, weil FE^3 und FC beſtändig, in $\frac{1}{AB^2.AE^3}$ übergeht. Dieſes Verhältnis der Centralkräfte lehrt folgendes:

Die nach einem, vom Mittelpunkt verſchiedenen Punkt innerhalb des Umkreiſes ſtrebenden

den Centralkräfte verhalten ſich umgekehrt, wie das Produkt aus dem Quadrat des Radius Vector in den Würfel der Sehne AE durch den Mittelpunkt der Kräfte B.

Aus dieſem allgemeinen Satz läßt ſich auch der §. 212. erwieſene herleiten. Denn liegt der Punkt B im Umkreiſe in E, ſo wird AB = AE, und daher die Centralkraft $= \frac{1}{AE^5}$, d. i. im verkehrten Verhältnis der fünften Dignität des Radius Vector, wie wir a. a. O. fanden.

Eben ſo folgt auch aus dem hier erwieſenen Geſetz der Kräfte dasjenige, wornach ſich die Kräfte beym Beſtreben nach des Kreiſes Mittelpunkt richten. In dieſem Fall iſt AB mit FC, und AE mit FE einerley, daher ändert ſich der gefundene allgemeine Werth der Kräfte $\frac{AE.\,FE^3}{FC.\,AB^3.\,AE^3}$ in $\frac{1}{FC^3}$, zum Zeichen, daß alsdenn die Kräfte ſich umgekehrt verhalten, wie die Würfel der Halbmeſſer.

Hieraus erhellt auch, daß aus dem hier erwieſenen allgemeinen Geſetz der Centralkräfte ſich alles übrige, was wir von den im Kreis wirkenden Kräften geſagt haben, nebſt allen ſeinen Folgen ſchlieſen läßt. Mit Recht ziehen wir die leichteſten und deutlichen Beweisarten den zu allgemeinen vor, als woraus die vorliegenden Fälle nicht ohne Schwierigkeit beurtheilt werden. Sie aufzuſuchen, räth uns auch der

der Plan unſers Werks. Wir wollen uns aber hier nicht länger aufhalten, ſondern zu andern merkwürdigen Naturgeſetzen übergehen.

Doch laßt uns beym Schluſſe kürzlich dies hinzuthun. Durch den Ausdruck Schwere bezeichneten wir überhaupt die Kraft in der Natur, die die Materie überall und in jeder Lage nach einem Mittelpunkt ſtößt. Jezt erſt ſieht man völlig ein, was wir in der zweyten Vorl. §. 34. behaupteten, die Schwere ſey eine in den Planeten und in der ganzen Welt, eben ſo wie hier auf unſerer Erdfläche, wirkende Kraft; wie auch §. 46. daß aus der Art, wie die Schwere im Himmel ihre Kraft äuſert, das Geſetz erkannt werde, wornach ſie ſich bey uns richtet. Denn das, was wir §. 200. und im folgenden hin und wieder vorgetragen haben, läßt keinen Zweifel zurück, daß durch die ganze Welt eben die Schwere, wie unſere, angetroffen wird.

Sieben-

Siebenter Zuſatz.

Von den Centralkräften.

Inhalt.

I. Von den Centralkräften überhaupt. §. 158. Sie unterſcheiden ſich in Normal- und Tangentialkräfte, deren Werthe allgemein beſtimmt werden. §. 159 — 161. Die Geſchwindigkeit in der Centralbewegung, und §. 162. die Zeit zu finden. §. 163. Allgemeine Beſtimmungsregeln der Bahnen. §. 165 — 169. Die für die Bahnen gefundenen unbequemen Gleichungen in andere zu verwandeln, die das Verhältnis der ſenkrechten Coordinaten ausdrücken. §. 170 — 172. Die Bewegung muß in einem Kegelſchnitt geſchehen, ſo oft die Centralkraft ſich umgekehrt verhält, wie die Quadrate der Entfernungen. §. 173. Bey eben dieſem Geſetz der Kräfte verhalten ſich die Umlaufszeiten in Ellipſen, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der großen Axen. §. 174. Verhalten ſich die Kräfte wie die Entfernungen, ſo ſind die Bahnen Ellipſen, in deren Mittelpunkt der Kräfte Mittelpunkt ſelbſt liegt; die Bewegung geſchieht aber in Spirallinien, wenn die Kräfte ſich verkehrt verhalten, wie die Würfel der Entfernungen.

II. Das Geſetz der Centralkräfte aus der bekannten Natur der Bahnen zu finden, 1.) wenn die Bahn unbeweglich, und ſich nicht ſelbſt um den Mittelpunkt der Kräfte herumdreht. §. 175. 2.) wenn die Bahn beweglich, und ſich um den Mittelpunkt der Kräfte herumdreht.

I.
Von den Centralkräften überhaupt.

§. 158.

Es ſey ACD (Taf. X. Fig. 2.) jedwede Kurve, B der Mittelpunkt der Kräfte, GDI eine Tan-

 gente

gente der Kurve, die mit einem Element derſelben CD zuſammenfällt. Auch ſeyen BC und BD Ordinaten der Kurve, auf den Mittelpunkt der Kräfte B bezogen, DF und CE aber Kreisbogen, als Abſciſſen betrachtet, die auf ihre Ordinaten bezogen werden, wie in der Geometrie zu geſchehen pflegt, wenn die Ordinaten aus einem einzigen Punkt B gezogen werden. Ferner heiſe DB, y; DF, x; CL, dy; DL, dx, und der Kurve Element CD, ds. Dies vorausgeſezt iſt folgendes zu merken:

Wird die ganze Kraft in D durch die Linie BD vorgeſtellt, ſo läßt ſie ſich jederzeit in zwo andere Seitenkräfte zerlegen, in die, in der Richtung der Tangente GCDI wirkende Tangentialkraft DI, und in die, auf die Kurve ſenkrechte Normalkraft KD. Demnach zerfällt die ganze, nach BD wirkende Kraft, in zwo andere, die einander in ihren Wirkungen nicht hindern, §. 67. Vorl. ſondern vereinigt dergeſtalt zugleich wirken, daß DK die Richtung der Bewegung, DI aber die Geſchwindigkeit zu ändern ſtrebt. Die ganze Sache kommt nun darauf an, daß dieſe beyden Kräfte, nebſt den Effekten, die ſie in dem bewegten Körper hervorbringen, beſtimmt werden.

Die ganze nach DB wirkende Kraft ſey $= K$, der Bogen DL unendlich klein, und daher als eine, auf die Ordinate CB ſenkrechte, gerade Linie zu betrachten. Ferner ſind CLD, DBI ähnliche Dreyecke, weil L und I rechte Winkel, CB und DB einander unendlich nahe, daß alſo der Winkel $CBD = o$, und CB mit DB parallel. Daher $LCD = BDI$, und $DC :$

$$CL = DB : DI, \text{ oder } ds : dy = K : \frac{Kdy}{ds} = DI.$$

Dem-

Demnach iſt $\frac{Kdy}{ds}$ der Werth der nach der Tangente wirkenden Kraft, und eben dieſer Werth hat auch bey vielen andern Bewegungen ſtatt, wenn ſie nur einigermaßen zu den centralen ſich rechnen laſſen, ob ſie gleich von denjenigen, die wir hier betrachten wollen, verſchieden ſind.

Der Werth der Normalkraft wird eben ſo auf ähnliche Art beſtimmt. Denn DC : DL = DB : BI; oder ds : dx = K : $\frac{Kdx}{ds}$ = BI, auch dieſer Werth iſt allgemein für die Normalkraſt in jeder Bewegung, die ſich einigermaßen zu den Centralbewegungen rechnen läßt.

Um die übrigen nöthigen Gleichungen zu erhalten, die das gegenſeitige Verhältnis der Kräfte und Geſchwindigkeiten, wie auch das Verhältnis der Zeit und der zu beſchreibenden Bahn ausdrücken, darf man nur dieſe Werthe gehörig in den allgemeinen Gleichungen ſetzen, und dadurch die Kräfte weiter beſtimmen. Es iſt nämlich §. 4. 7. $\frac{np}{m}dt = dv$, und $\frac{dy}{v} = dt$. Sezt man daher $K\frac{dy}{ds}$ ſtatt $\frac{p}{m}$, ſo hat man eine, in beſtimmten Fällen anzuwendende Gleichung für die Tangentialkraft. Eben ſo

$K\frac{dx}{ds}$ für $\frac{p}{m}$ geſezt, entſteht die Gleichung für die Normalkraft. Demnach wird

1.) für die Tangentialkraft, $-\frac{nKdy}{ds}.dt = dv$, wo die erſtere Größe verneint zu nehmen, weil, wie aus der Figur erhellt, y abnimmt, wenn x wächſt. Da aber $dt = \frac{dy}{v} = \frac{ds}{v}$, ſo wird $-nKdy = vdv$, in welcher Formel zu merken, daß v die Geſchwindigkeit in D, und K eine beſchleunigende Kraft, nicht aber Druck bedeutet.

2.) Für die Normalkraft erhält man auch zuerſt $\frac{Kdx}{ds}.dt = \frac{dv}{n}$. Da aber dieſe Kraft überall auf die Kurve ſenkrecht iſt, folglich überall in der Richtung des Krümmungshalbmeſſers, den wir r nennen, wirkt, ſo erhellt, daß die Normalkraft 1.) $= K\frac{dx}{ds}$ vermöge des vorhergehenden, und 2.) $= \frac{v^2}{r}$, als eine nach des Krümmungskreiſes Mittelpunkt ſtoſende Kraft betrachtet. §. 176. **Vorl.** Demnach

nach iſt $K\frac{dx}{ds} = \frac{v^2}{r}$, und $rKdx = v^2ds$ oder $=$ mv^2ds, wenn m eine beſtändige Größe bedeutet.

Wird nun ſtatt der Geſchwindigkeit die Höhe des Falles geſezt, wodurch die Geſchwindigkeit erlangt wird, und n in vorigem Werth der Tangentialkraft gehörig genommen, ſo erhalten wir folgende Gleichungen.

1.) **Für die nach der Tangente wirkende Kraft**, $-dV = Kdy$, und

2.) Für die, auf die Kurve ſenkrechte **Normalkraft**, $Krdx = 2Vds$, wo V ebenfalls die, der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe ausdrückt.

Heißt ferner p das Loth BI auf die Tangente DI, ſo wird, weil DB : BI = CD : DL, oder $y : p = ds : dx$; $ydx = pds$, und, ds im Differentiiren beſtändig geſezt,

$$dp = \frac{dydx + yddx}{ds}.$$

Wir wiſſen aber auch aus der Analyſis, daß der Krümmungshalbmeſſer, wenn dx beſtändig genommen wird, $= \frac{ydyds}{dydx + yddx}$. Wird nun dieſe Größe gewöhnlichermaßen in die vorige Differentialgleichung $\frac{dydx + yddx}{ds} = dp$ eingeführt, ſo wird

 r =

$r = \frac{ydy}{dp}$. Hieraus entſteht ein neuer Werth der Normalkraft, oder vielmehr eine neue Gleichung $\frac{Kydydx}{dp} = 2Vds$, und weil, wie vorhin geſagt, $\frac{ds}{dx} = \frac{y}{p}$, ſo wird für die Normalkraft $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$.

§. 159.

Allgemeine Methode, aus den gegebenen Geſetzen der Kräfte, die Kurven, worinn der Umlauf geſchieht, oder die Bahnen, und die Hauptgeſetze dieſer Bewegungen zu finden.

Um die Bahnen oder die Kurven, worinn die Körper von Centralkräften bewegt werden, zu finden, muß vorher die Geſchwindigkeit überhaupt beſtimmt werden. Hierzu muß man den doppelten Werth der Kraft K aus den vorigen Gleichungen ſuchen. Der erſte iſt $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$, daraus findet man $K = \frac{2Vdp}{pdy}$. Der zweyte war $-dV = Kdy$, daraus $K = \frac{-dV}{dy}$, folglich $\frac{2Vdp}{pdy} = \frac{-dV}{dy}$,

und

und $\frac{2Vdp}{p} = -dV$, wo dy aus beyden Gliedern der Gleichung wegfällt. In dieſer Gleichung ſind keine andern Größen vorhanden, als die, ſo zur Kurve gehören, nebſt denjenigen, ſo die Höhe des Falles V, wodurch die Geſchwindigkeit der Bewegung erlangt wird, beſtimmen.

Dieſe Gleichung $\frac{2Vdp}{p} = -dV$ zeigt die Geſchwindigkeit in jedem Punkt der Kurve, wenn man beyde Glieder durch V dividirt. Denn $\frac{2dp}{p} = \frac{-dV}{V}$, welche Gleichung ſich überhaupt allemal integriren läßt, und in $2\,L.p - b = L.\frac{1}{V} + B$ übergeht, wo B und b beſtändige logarithmiſche Größen bedeuten, die das Integral ergänzen, und gefunden werden, indem man für b oder B, nBA ſezt, wenn der Körper nach dem Loth AB in A entweder geworfen worden, oder geworfen gedacht wird; wo n eine beſtändige Größe, die aus dem gegebenen Neigungswinkel in A, FAB leicht gefunden wird. Laßt uns alſo dieſe logarithmiſchen Größen b und B durch 2 L. b und L. B ausdrücken, und wir haben die Gleichung

$$2L.p - 2L.b = L.\frac{1}{V} + L.B.$$ Hieraus ſchließt man $$2L.p - 2L.b - L.B = L.\frac{1}{V},$$ und daraus wieder $$L.\frac{p^2}{Bb^2} = L.\frac{1}{V}.$$ Daher auch die Größen ſelbſt genommen $$\frac{p^2}{Bb^2} = \frac{1}{V},$$ und $$V = \frac{Bb^2}{p^2}.$$ In dieſer Gleichung aber drückt b das Loth aus dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangente der Kurve in A aus, und B bezeichnet die, der Geſchwindigkeit, womit man ſich den umlaufenden Körper in A geworfen denkt, zugehörige Höhe tA.

§. 160.

Da alſo überhaupt $V = \frac{Bb^2}{p^2}$, ſo wird auch $V = \frac{1}{p^2}$, und da V ſich wie das Quadrat der Geſchwindigkeit verhält, ſo folgt, daß die Geſchwindigkeit ſelbſt in jedem Punkt der Kurve ſich umgekehrt verhält, wie das auf die Tangente gezogene Loth, welches einerley mit dem, was wir §. 203. Vorl. erwieſen.

§. 161.

Ferner iſt auch die Geſchwindigkeit, die der, von der Kraft K gegen den Mittelpunkt der Kräfte B gereizte Körper im Fall durch tE bis E erlangt, einerley mit der Geſchwindigkeit im Punkt der Kurve C; und die, im Fall, durch die gerade Linie in F erlangte Geſchwindigkeit einerley mit der, die der, in der Kurve fallende Körper im Punkt D beſizt. Und allgemein ſind die in einem Punkt der geraden Linie tB erlangten Geſchwindigkeiten einerley mit den Geſchwindigkeiten in den, vom Mittelpunkt B gleichweit entfernten Punkten der Kurve; aus eben dem Grund, warum die durch tA erlangte Geſchwindigkeit mit der Geſchwindigkeit des Körpers in A einerley iſt. Denn da wir für die Tangentialkraft erhielten $-dV = Kdy$, §. 158. ſo wird $V = S. - Kdy$, und da ebenfalls für den Fall durch die gerade Linie $dV = - Kdy$, und $V = S. - Kdy$, ſo iſt offenbar die Höhe für die Bewegung in der Kurve, und für den Fall durch die gerade Linie beſtändig einerley. Daher läßt ſich auch tF überall als die, der Geſchwindigkeit in F und D zugehörige Höhe anſehen, wofern nur tA vorher aus der Gleichung $V = \frac{Bb^2}{p^2}$ beſtimmt iſt.

§. 162.

Was aber die Zeit der Bewegung betrift, ſo wird ſelbige auch leicht gefunden. Denn die Zeit der gleichförmigen Bewegung durch CD iſt $= \frac{CD}{\surd V} =$

$\frac{pds}{b\sqrt{B}}$, und verhält ſich alſo wie pds, da $b\sqrt{B}$ eine beſtändige Größe. Hieraus erhellt aber, daß die Zeit durch jedes Element dem Ausſchnitt CBD proportional iſt; welches wiederum dem §. 199. Vorl. Erwieſenen genau entſpricht; daher verhält ſich auch die Zeit durch die ganze Linie AD wie ADBA, weil die ganze Zeit S. pds.

§. 163.

Da von der Normalkraft die Aenderung in der Richtung der Bewegung, und daher die Natur der beſchriebenen Kurve abhängt; ſo iſt ſie auch bey Beſtimmung der Bahn in Betracht zu ziehen. Daher muß in der Gleichung für die Normalkraft $\frac{Kdy}{2V} = \frac{dp}{p}$ ſtatt der Größe V ihr vorhin gefundener Werth $\frac{Bb^2}{p^2}$ geſezt werden, wodurch eine neue ſehr zweckdienliche Gleichung entſteht $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, weil die darinn vorhandenen veränderlichen Größen von einander getrennt ſind, wenn K eine Function der Größe y. Daß dieſes aber eine Gleichung für die Kurve, erhellt daraus, weil darinn auſer den beſtän-

digen

digen Größen ſonſt keine, als die Ordinaten auf die Kurve, und die auf die Tangente der Kurve gefällten Lothe vorkommen. Und obgleich das Loth auf die Tangente hier ſtatt der Abſciſſe gegeben iſt, und folglich die Kurve auf eine ungewöhnliche Art ausgedrückt wird: ſo iſt doch die Gleichung ſehr einfach, weil die Kurve darinn durch gerade Linien gegeben wird.

§. 164.

Auch ſieht man, daß das, was wir aus allgemeinen Gleichungen ſchlieſen, mit dem, was in den Vorleſungen behauptet worden, genau übereinſtimmt. Denn $kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, und $r = \frac{ydy}{dp}$, daher $K = \frac{2Bb^2y}{p^3r}$. Demnach K proportional $\frac{y}{p^3r}$, d. i. das Verhältnis der Centralkraft iſt zuſammengeſezt aus dem geraden Verhältnis des Radius Vector, und dem verkehrten des Krümmungshalbmeſſers, in den Würfel des Loths auf die Tangente der Kurve multiplicirt.

§. 165.

Da die §. 164. gefundene Gleichung $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$ den Radius Vector, als Ordinate aus

dem

dem Mittelpunkt der Kräfte gezogen, nebſt dem Loth auf die Tangente enthält; und eine ſolche Gleichung nicht ſehr bequem iſt, um daraus die Eigenſchaften der Kurve leicht zu ſchlieſen; ſo muß man ſich vorzüglich bemühen, dieſe Gleichung in eine andere zwiſchen rechtwinklichten Ordinaten und Abſciſſen zu verwandeln. Dieſe Verwandlung läßt ſich durchgängig verrichten, wofern nur K nicht zugleich eine Function anderer Größen auſer y. Zu dem Ende muß erſt eine Gleichung geſucht werden, wo das, auf die Tangente gefällte Loth ausfällt.

Es ſey alſo ADF (Taf. X. Fig. 3.) eine Kurve, in C der Mittelpunkt der Kräfte, CD = y, CH = p, DM = dy, CI = x, IK = DL = dx, ID = z, EL = dz. Ferner ſey die Geſchwindigkeit in A der Höhe BA gemäs, und dieſe Höhe heiſe B. Das Loth aber auf die Tangente der Kurve, worinn die Bewegung geſchicht, ſey = b. Dies vorausgeſezt, iſt

$$z^2 = y^2 - x^2;\ dz = \frac{ydy - xdx}{\sqrt{(y^2 - x^2)}},\ \text{und}\ DE^2 =$$

$$dx^2 + dz^2$$

$$= \frac{y^2dy^2 - 2xydydx + x^2dx^2 + y^2dx^2 - x^2dx^2}{y^2 - x^2}$$

$$= \frac{y^2dy^2 - 2xydydx + y^2dx^2}{y^2 - x^2},\ \text{und}\ ME^2 = DE^2$$

$$- DM^2 = \frac{y^2dy^2 - 2xydydx + y^2dx^2}{y^2 - x^2} - dy^2$$

$$= \frac{(xdy - ydx)^2}{y^2 - x^2}$$, daraus wird

$$DE = \frac{\sqrt{(y^2dy^2 - 2xydydx + y^2dx^2}}{\sqrt{(y^2 - x^2)}}$$, und ferner

$$ME = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{(y^2 - x^2)}}.$$ Daher, weil $ds : ME = y : p$,

ſo wird $p = \frac{xydy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2 - 2xydydx + y^2dx^2)}}$. Sucht man nun auch den Werth der Größe p aus der Gleichung $\frac{-Kdy}{Bb^2} = \frac{-2dp}{p^3}$, §. 158. u. 160. deren Integral $S. \frac{-Kdy}{Bb^2} = \frac{1}{p^2} + C$, ſo erhält man

$$\frac{1}{S. \frac{-Kdy}{Bb^2} - C} = p^2,$$ folglich $$\frac{1}{\sqrt{\left[S. \frac{-Kdy}{Bb^2} - C\right]}}$$

$$= \frac{xydy - y^2dx}{\sqrt{(y^2dy - 2xydydx + y^2dx^2)}}$$, in welcher Gleichung p nicht vorhanden, da man K als eine bloſe Function von y annimmt, und C eine beſtändige Größe iſt.

Damit

Damit aber dieſe Gleichung in Rückſicht der beſtändigen Größen einfacher wird, ſo nehme man an, S.—Kdy ſey in A = o, dies läßt ſich annehmen, weil man den Punkt A, wo man will, annehmen kann. Daher wird das Integral durch die bloſe Größe $\frac{1}{p^2}$ ergänzt, der in A, $-\frac{1}{b^2}$ entſpricht. §. 159. folglich $\frac{1}{Bb^2}$. S.—Kdy $= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}$, und p =

$$\frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{(B-S.Kdy)}} = \frac{xydy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2xydydx+y^2dx^2)}}.$$

§. 166.

Da alſo, nachdem die Größe p aus der Gleichung weggeſchaft worden, dieſe keine veränderlichen Größen auſer x und y enthält: ſo läßt ſie ſich integriren, und iſt x und y beſtimmt, ſo findet man leicht z, welches allemal $= \sqrt{(y^2-x^2)}$.

Um nun leztere Gleichung $\frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{(B-S.Kdy)}} = \frac{xydy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2xydydx+y^2dx^2)}}$ ſolchergeſtalt zu verändern, muß man das leztere Glied integrabel machen. Hier erhellt ſogleich, daß

$$\frac{xydy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2xydydx+y^2dx^2)}}=\frac{xdy-ydx}{\frac{\sqrt{(dy^2-2xdydx+dx^2}}{y}}.$$

Dieſe Gleichung wird einfacher, wenn man ſezt $x=ty$, und man bekommt alsdenn folgende Gleichung $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}=\frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{(By^4-Bb^2y^2-y^4S.Kdy)}}$.

In dieſer Gleichung ſind die veränderlichen Größen von einander abgeſondert, daher laſſen ſich aus den gegebenen t und y, x und z beſtimmen, da $x=ty$, und $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$.

Da aber $S.\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ ein zum Kreis gehöriges Integral, ſo wird, wenn der zu t gehörige Bogen f heißt, $t=\frac{e^{f\sqrt{-1}}-e^{-f\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, wo durch e die Ordinate in der hyperboliſchen Logarithmenlinie, die den Logarithmen der Einheit ausdrückt, verſtanden wird. Heißt aber f der Winkel ACD, ſo wird $t=\frac{e^{f\sqrt{-1}}+e^{-f\sqrt{-1}}}{2}$.

§. 167.

§. 167.

Soll nun die Gleichung $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{(By^4 - Bb^2y^2 - y^4 S.Kdy)}}$ algebraiſch ſeyn, ſo müſſen auch die logarithmiſchen Integrale ſo beſchaffen ſeyn, daß die tranſcendentalen Größen in der Gleichung einander aufheben. Daher muß auch das Integral des Theils $\frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{(By^4 - Bb^2y^2 - y^4 S.Kdy)}}$, ſo wie dieſes Differential ſelbſt, mit dem Integral des andern Theils $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ und mit dieſem Differential ſelbſt ſich auf einerley Art verhalten. Demnach wird die vorgegebene Gleichung, wenn ſie algebraiſch iſt, überhaupt folgende Form haben $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{ndl}{\sqrt{(a^2-l^2)}}$.

§. 168.

Nun iſt das Integral des Differentials $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\text{Log.}(\sqrt{(1-t^2)} + t\sqrt{-1})$,

und

und das vollſtändige Integral des Differentials

$$\frac{n\,dl}{\sqrt{(a^2-l^2)}} = \frac{n}{\sqrt{-1}} . L.(\sqrt{(aa-ll)}+l\sqrt{-1}) -$$

$$\frac{n}{\sqrt{-1}} . L.(\sqrt{(aa-\beta\beta)}+\beta\sqrt{-1}),$$ wo das leztere Glied $-\frac{n}{\sqrt{-1}} . L.(\sqrt{(aa-\beta\beta)}+\beta\sqrt{-1})$ eine, in jedem beſondern Fall, zu beſtimmende beſtändige Größe. Beyde Integrale ſind unmögliche logarithmiſche Größen, und man bekommt $\sqrt{(1-t^2)}$

$$+t\sqrt{-1} = \frac{(\sqrt{(aa-ll)}+l\sqrt{-1})^n}{(\sqrt{(aa-\beta\beta)}+\beta\sqrt{-1})^n}.$$ Dieſe Gleichung iſt aber ſo beſchaffen, daß die tranſcendentalen Größen gehörigermaßen einander aufheben.

§. 169.

Setzet ferner $$\frac{(\sqrt{(aa-ll)}+\sqrt{-1})^n}{(\sqrt{(a^2-\beta^2)}+\beta\sqrt{-1})^n} = q,$$ ſo

iſt $t\sqrt{-1}+\sqrt{(1-t^2} = q$, und $t = \frac{q^2-1}{2q\sqrt{-1}} =$

$$\frac{q}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{2q\sqrt{-1}}.$$ Hieraus bekommt man t=

$$\frac{(\sqrt{(aa-ll)}+l\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}.(\sqrt{(a^2-\beta^2)}+\beta\sqrt{-1})^n}-\frac{(\sqrt{(a^2-\beta^2)}+\beta\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}.(\sqrt{(aa-ll)}+l\sqrt{-1})^n}.$$

Multipliciret Zähler und Nenner des erſten Bruchs mit $(\sqrt{(a^2-\beta^2)}-\beta\sqrt{-1})^n$, ingleichen Zähler und Nenner des zweyten Bruchs mit $(\sqrt{(aa-ll)}-l\sqrt{-1})^n$, ſo bekommt ihr

$$1=\frac{(\sqrt{(aa-ll)}+l\sqrt{-1})^n.(\sqrt{(a^2-\beta^2)}-\beta\sqrt{-1})^n}{2aa^n\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{(\sqrt{(aa-ll)}-l\sqrt{-1})^n.(\sqrt{(a^2-\beta^2)}+\beta\sqrt{-1})^n}{2aa^n\sqrt{-1}}.$$

§. 170.

Folgerungen aus dem vorigen, wodurch die Bewegung in den Fällen, wo die Centralkräfte ſich verkehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen, beſtimmt wird.

Laßt uns hier eben die Zeichen brauchen, deren wir uns vorhin bedient haben, und annehmen, der bewegte Körper ſey aus A (Taf. X. Fig. 3.) in ſenkrechter Richtung auf AC geworfen worden; ſo wird AC ſelbſt das Loth auf die Tangente der Kurve in A, und hier mit dem Radius Vector $=$ b einerley ſeyn. Ueberdies ſey die Fallhöhe AB, wodurch die Geſchwindigkeit im Punkt A erlangt werden kann $=$ B. Da wir nun alle veränderlichen Größen hier mit eben den

den Zeichen andeuten, ſo haben wir auch hier obige Gleichung (§. 165.) $\frac{dt}{\surd(1-t^2)} = \frac{b\surd B.dy}{\surd(By^4-Bb^2y^2-y^4.S.Kdy}$; wo zuerſt S. Kdy, und daraus die Bahn zu beſtimmen. Es läßt ſich aber unſere Schwere als eine Centralkraft betrachten, die ſich verkehrt verhält, wie die Quadrate der Entfernungen, wie wir bey der Centralkraft, wovon hier die Rede iſt, annehmen. Dies kann um ſo mehr geſchehen, weil, wenn wir bey der Centralkraft genanntes Geſetz vorausſetzen, eben dieſe Kraft unveränderlich gefunden wird, wenn die Unterſchiede der Entfernungen ſo klein ſind, daß man ſie auſer Acht laſſen kann: welches bekanntermaßen bey unſerer Schwere ſtatt hat. Folglich dient uns die Beſchleunigung unſerer Schwere ſtatt eines Maaſes und Einheit, worauf ſich die übrigen Centralkräfte von gleicher Gattung bringen laſſen. Man nenne alſo den Erdhalbmeſſer r, ſo iſt $\frac{1}{r^2} : g = \frac{1}{y^2} : \frac{gr^2}{y^2}$, welches die Centralkraft in der Entfernung y vom Mittelpunkt der Kräfte bezeichnet, und, g = 1 geſezt, $= \frac{r^2}{y^2}$. Daher Kdy $= \frac{r^2dy}{y^2}$, und S, Kdy =

$\frac{-r^2}{y}$; dieſes Integral wird ergänzt, wenn man die Größe $\frac{r^2}{b^2}$, worinn S. Kdy in den gegebenen Punkt A übergeht, hinzufügt; daß alſo S. Kdy $= \frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}$.

Wir bekommen alſo $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} =$

$$\frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{\left(By^4 - Bb^2y^2 - y^4\left\{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}\right\}\right)}};$$

und da die veränderlichen Größen im Nenner des leztern Glieds nur bis zur zwoten Dignität ſteigen, ſo iſt das Integral S. $\frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{\left(By^4 - Bb^2y^2 - y^4\left\{\frac{r^2}{b} - \frac{r^2}{y}\right\}\right)}}$ nicht nur in unmöglichen und logarithmiſchen Größen gegeben; es wird auch gefunden, wenn man das Differential in ein anders von der Form $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ verwandelt. Das leztere wird ſehr leicht bewerkſtelligt, wenn man

ſezt,

ſezt $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2Bb^2 p}{2Bb^2}$, dadurch bekommt man

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{dp}{\sqrt{\left[\left(\frac{2Bb - r^2}{2Bb^2}\right)^2 - p^2\right]}},$$ und daher p

$= l$ in §. 169.

Man vergleiche dieſen Fall mit dem allgemeinen §. 169. und man erhält den Werth t ſehr leicht, weil hier $n = 1$. Denn multipliciren wir in einander

$$\frac{(\sqrt{(aa - ll)} + l\sqrt{-1}).(\sqrt{(a^2 - \beta^2)} - \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}},$$

ingleichen $$\frac{-(\sqrt{(aa - ll)} - l\sqrt{-1}).(\sqrt{(a^2 - \beta^2)} + \beta\sqrt{-1})}{2a^2\sqrt{-1}},$$

ſo gelangen wir nach gehöriger Verſetzung der Glieder, und Weglaſſung derjenigen, die ſich einander aufheben, zu folgender Gleichung

$$t = \frac{-2\beta\sqrt{-1}.\sqrt{(a^2 - l^2)} + 2l\sqrt{-1}.\sqrt{(a^2 - \beta^2)}}{2a - 1} =$$

$$\frac{l\sqrt{(a^2 - \beta^2)} - \beta\sqrt{(a^2 - l^2)}}{a^2},$$ und da $l = p$, ſo wird

$$t = \frac{p\sqrt{(a^2 - \beta^2)} - \beta\sqrt{(a^2 - p^2)}}{a^2},$$ wo die beſtändige

Größe β aus der Natur gegenwärtigen Beyſpiels nunmehr genauer zu beſtimmen iſt.

Zu dem Ende iſt zu merken, daß $t\left(=\frac{x}{y}\right)$ der Coſinus des Winkels DCA, folglich, wenn in A dieſer Winkel $= 0$, $t = 1$. Da ferner $\frac{1}{y} = \frac{r^2-2Bb^2p}{2Bb^2}$, welches in A, wo $y = b$, in $l = p = \frac{r^2-2Bb}{2Bb^2}$ übergeht; ſo erhellt, daß $a = \frac{2Bb-r^2}{2Bb^2}$, daher $\sqrt{(a^2-l^2)} = 0$ in §. 167. und man erhält $t = \frac{p\sqrt{(a^2-\beta^2)}}{a^2}$; und da in A, $t = 1$, ſo wird $a^4 = a^2p^2 - \beta^2p^2$, daraus $-\beta^2 = \frac{a^2(a^2-p^2)}{p^2}$, folglich, weil a^2-l^2, oder $a^2-p^2=0$, $-\beta^2=0$, und $\beta = 0$.

Dieſemnach iſt $at = p$, oder $(r^2-2Bb)\,t = -2Bb^2p$. Sezt man in dieſer Gleichung $\frac{x}{y}$ ſtatt t,

und

und für p ſeinen Werth aus obiger Gleichung $\frac{1}{y} = \frac{r^2 - 2Bb^2 p}{2Bb^2}$, ſo entſteht folgende Gleichung zwiſchen x und y, die die Natur der geſuchten Kurve, d. i. der Bahn, ausdrückt:

$$y^2 = \frac{(r^2 - 2Bb)^2 x^2 - 4Bb^2 x (r^2 - 2Bb) + 4B^2 b^4}{r^4},$$

und da $y^2 = x^2 + z^2$, ſo gelangt man endlich zu der Gleichung zwiſchen den Coordinaten CK und KE,

$$z^2 = \frac{(4B^2 b^2 - 4Bbr^2) x^2 - 4Bb^2 (r^2 - 2Bb) x + 4B^2 b^4}{r^4}.$$

Welche Gleichung, wie man ſogleich ſieht, einen Kegelſchnitt ausdrückt, da die Größen die zwote Dignität nicht überſteigen.

§. 171.

Da die Ellipſe der Kegelſchnitt iſt, worauf ſich die übrigen ſehr leicht bringen laſſen, ſo vergleiche man die gefundene Gleichung mit der Gleichung für die Ellipſe, die Abſciſſen vom Brennpunkt f an gerechnet, die mit jener beynahe einerley Form hat.

Es ſey alſo ACDB (Taf. IX. Fig. 12.) eine Ellipſe, deren große Axe DB = A, Parameter = p, fa = x, ſo iſt aus der Analyſis bekannt, daß fH = $\frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - pA)}$, und daher fD = $\frac{1}{2}(A - \sqrt{(A^2 - pA)})$,

und $Da = \frac{1}{2}(A - \surd(A^2 - pA) - x$, $aB = \frac{1}{2}(A + \surd(A^2 - pA) + x$, und da überdies in der Ellipſe $Da.\,Ba : ab^2$, wie die große Axe der Ellipſe zum Parameter, ſo iſt

$$y^2 = \frac{-px^2}{A} - \frac{px}{A}\surd(A^2 - pA) + \tfrac{1}{4}p^2.$$

Vergleicht man mit dieſer Gleichung für die Abſciſſen vom Brennpunkt an, die vorhin gefundene, ſo findet man ſogleich

1.) **den Parameter der Bahn.** Denn $\frac{1}{4}p^2 = \frac{4B^2b^4}{r^4}$, daher der Parameter der Bahn $= \frac{4Bb^2}{r^2}$.

2.) **Die große Axe der Ellipſe.** Denn wir haben $\frac{-p}{A} = \frac{4B^2b^2 - 4Bbr^2}{r^4}$, und ſtatt p den erſt gefundenen Werth $\frac{4Bb^2}{r^2}$ geſezt, wird $A = \frac{-br^2}{Bb - r^2} = \frac{br^2}{r^2 - Bb}$, die Axe der Ellipſe.

3.) **Die kleine Axe der Ellipſe**, oder die doppelte Ordinate im Mittelpunkt, iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen der großen Axe und dem Parameter

rameter, und daher $= \sqrt{\left(\frac{br^2}{r^2-Bb}\cdot\frac{4Bb^2}{r^2}\right)} = \frac{2b\sqrt{Bb}}{\sqrt{(r^2-Bb)}}$.

4.) So oft alſo $r^2 < Bb$, ſo iſt $\sqrt{(r^2-Bb}$ unmöglich, und daher die kleine Axe imaginär, und die große verneint zu nehmen. Dies zeigt an,

a) daß alsdenn die Bahn eine Hyperbel; und

b) dieſe Bahn keine Ellipſe, wo nicht $r^2 > Bb$.

c) Wenn $r^2 = Bb$, ſo iſt $r^2 - Bb = 0$, und daher beyde Axen, die große und kleine $= \frac{1}{0}$, d. i. ſie ſind beyde unendlich gros. Daher auch dann die Bahn eine Parabel.

d) Endlich geht die Bahn, wenn ſie eine Ellipſe iſt, in den Kreis über, wenn beyde Axen gleichgros ſind, d. i. wenn $\frac{2b\sqrt{Bb}}{\sqrt{(r^2-Bb)}} = \frac{br^2}{r^2-Bb}$, daraus $r^4 = 4Bbr^2 - 4B^2b^2$. Und dieſe Gleichheit findet Statt, wenn $2Bb = r^2$.

5.) Sezt man in der Gleichung §. 170. $z^2 = \frac{4B^2b^2}{r^4}$ ꝛc. $B = 0$, ſo wird $z^2 = 0$, für die gerade Linie Df, worinn ſich der Körper vor= und rückwärts

bewegt, weil die Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung in $D = 0$.

6.) Auch findet man die Eccentricität, oder die Weite des Brennpunkts vom Mittelpunkt $= \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - pA)} = \frac{2Bb^2 - br^2}{2r^2 - 2Bb}$. Hieraus ſchlieſen wir

a) So oft dieſe Weite bejaht iſt, ſo iſt der Mittelpunkt der Kräfte im nächſten Brennpunkt; ſie iſt es aber, wenn $r^2 < 2Bb$.

b) Wird ſie hingegen verneint, ſo iſt der Mittelpunkt der Kräfte im andern Brennpunkt, auf der andern Seite des Mittelpunkts der Figur.

7.) Die Geſchwindigkeit in jedem Punkt der Kurve zu finden, damit die Gleichung §. 160. $V = \frac{Bb^2}{p^2}$: Hier ſetze man ſtatt p den in der Gleichung §. 160. ausgedrückten Werth $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{(B - S.Kdy)}}$, der nach §. 170. wird $p = \frac{b\sqrt{B}}{\sqrt{\left\{B - \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{y}\right\}}}$

oder $p = \frac{b\sqrt{Bby}}{\sqrt{(Bby + r^2(b - y)}}$. Demnach $V = \frac{Bb^2}{p^2}$.

$= \frac{Bby + r^2(b - y}{by}$.

Nun

Nun iſt $y = fb$, und $fb + Gb = DB$. Daher $\frac{br^2}{r^2 - Bb} - y = Gb = \frac{(b-y)r^2 + Bby}{r^2 Bb}$, und $V = \frac{Gb(r^2 - Bb)}{by}$, oder weil $y = fb$, $V = \frac{Gb}{fb}$. $\frac{r^2 - Bb}{b}$. Daher auch die Geſchwindigkeit $= \frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}} . \frac{\sqrt{(r^2 - Bb)}}{\sqrt{b}}$, die alſo, da $\frac{r^2 - Bb}{b}$ beſtändig, $\frac{\sqrt{Gb}}{\sqrt{fb}}$ proportional iſt.

8.) Was die Zeit der Bewegung betrift, ſo iſt ſchon oben erwieſen, daß ſie ſich überall verhält, wie die elliptiſchen Ausſchnitte der vom Brennpunkt nach den Bogen gezogenen Linien. Denn die Zeit der Bewegung iſt nach §. 162. $= S. \frac{pds}{b\sqrt{B}}$, welche Summe in der Ellipſe, wen S ein elliptiſcher Ausſchnitt heißt, $= \frac{2S}{b\sqrt{B}}$, und daher für die ganze Umlaufszeit $= \frac{2R}{b\sqrt{B}}$, wenn R die Fläche der ganzen Ellipſe.

Nun

Nun iſt aus der Analyſis bekannt, daß die Fläche der Ellipſe gleich der Fläche eines Kreiſes, deſſen Durchmeſſer die mittlere Proportionallinie zwiſchen den beyden Axen der Ellipſe. Es ſey alſo die große Axe der Ellipſe A, der Parameter p, ſo iſt die kleine Axe $\sqrt{Ap}$; und der Durchmeſſer des Kreiſes, der mit der Ellipſe gleichen Innhalts, $= \sqrt{(A\sqrt{Ap})}$,

Demnach $\frac{2R}{b\sqrt{B}} = \frac{11}{14} \frac{2A\sqrt{Ap}}{b\sqrt{B}}$. Aber nach §. 171.

$p = \frac{4Bb^2}{r^2}$. Daher $\frac{2R}{b\sqrt{B}} = \frac{11}{14} \cdot \frac{2A\sqrt{\left(A.\frac{4Bb^2}{r^2}\right)}}{b\sqrt{B}} =$

$\frac{\frac{22}{7}A\sqrt{A}}{r}$. Dies iſt die ganze Umlaufszeit in der elliptiſchen Bahn.

Es läßt ſich erweiſen, daß auch dann, wenn die Tangente in A (Taf. X. Fig. 2.) ſchief auf der Axe ſteht, die Linie eine Ellipſe, und der Mittelpunkt der Kräfte im Brennpunkt iſt. Doch gehen in dieſem Fall die Größen, die für den Punkt A in voriger Rechnung unveränderlich geſezt worden, in andere über, weil das auf die Tangente gefällte Loth hier nicht, wie in vorigem Beyſpiel, mit dem Radius Vector in A einerley iſt.

§. 172.

Hieraus verſteht man allererſt dasjenige völlig, **was §. 211. Vorl.** behauptet worden. Denn da wir

wir erwieſen, daß ein, in einer gewiſſen Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte geworfener Körper im Kreis nicht herumläuft, wo nicht $2\,Bb = r^2$: ſo erhellt, daß zur Kreisbewegung eine Geſchwindigkeit erfordert wird, der die Höhe $B = \frac{r^2}{2b}$ zukommt.

Es wird aber die natürliche Schwere $= 1$ geſezt. Daher $B : \frac{1}{2}b = \frac{r^2}{b^2} : 1$. Denn dieſe Proportion iſt mit der vorigen Gleichung $B = \frac{r^2}{2b}$ einerley. Iſt aber unſere Schwere $= 1$, ſo wird ſie in der Weite b vom Mittelpunkt der Kräfte $= \frac{r^2}{b^2}$, weil ſie im verkehrten Verhältnis der Quadrate der Entfernungen ſteht. Hierdurch wird dasjenige von neuen beſtätigt, was wir oben in der Anmerkung zu §. 187. Vorl. behaupteten, daß nämlich die Bewegung nur alsdenn im Kreiſe geſchieht, wenn die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe zur halben Entfernung vom Mittelpunkt ſich eben ſo verhält, wie die Centralkraft im Punkte des Wurfs zu unſerer natürlichen Schwere.

In der Parabel aber geſchieht der Umlauf, wenn $r^2 = Bb$. §. 171. 4. c. Daher die der Geſchwindigkeit im Punkte des Wurfs zugehörige Höhe $B = \frac{r^2}{b}$.

Eben

Eben dieſe Höhe aber im Kreiſe iſt $= \frac{r^2}{2b}$. Dieſe Höhen verhalten ſich alſo wie 2 : 1. Demnach wird zur Bewegung in der Parabel eine ſolche Geſchwindigkeit erfordert, daß die ihr zugehörige Fallhöhe doppelt ſo groß, als diejenige, wodurch die von unſerer natürlichen Schwere gereizten Körper die Geſchwindigkeit erlangen, die zur Kreisbewegung nöthig iſt.

Wenn $r^2 < Bb$ und $B > \frac{r^2}{b}$, d. i. wenn die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe größer als die, ſo zur Bewegung in der Parabel erfordert wird, ſo iſt die Bahn eine Hyperbel. §. 171. 4. a.

Wenn aber $r^2 > Bb$, ſo iſt die Kurve allemal eine Ellipſe. §. 177. 4. b: d. i. wenn $B < \frac{r^2}{b}$, oder wenn die der Geſchwindigkeit zugehörige Höhe kleiner, als die der Geſchwindigkeit in der Parabel zugehörige. Ferner iſt auch der Mittelpunkt der Kräfte entweder in dem, dem Punkte des Wurfs nächſten, oder im entferntern Brennpunkt; jenes, wenn die Höhe größer, als die, ſo zur Bewegung im Kreiſe erfordert wird; dieſes, wenn ſie kleiner. Dieſes ſieht man ſogleich aus §. 171. 6. a. b.

§. 173.

In Anſehung der Zeiten, worinn mehrere Körper um eben den Mittelpunkt der Kräfte ſich bewegen, iſt merkwürdig, daß dieſe Umlaufszeiten, wenn die Bahnen Ellipſen ſind, ſich unter einander verhalten, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der großen Axen. (Sunt in ratione axium majorum ſesquiplicata. Denn die ganze Umlaufszeit §. 171. $= \frac{22}{7 \cdot r} \cdot A\sqrt{A}$, und daher wie $A\sqrt{A} = \sqrt{A^3}$.

§. 174.

Auch bey Vorausſetzung anderer Geſetze der Kräfte findet man Bahn, Geſchwindigkeit und Zeit auf eben die Art, wie vorhin. Stehen z. B. die Kräfte im einfachen Verhältnis der Entfernungen, und man ſucht die Gleichung nach obiger Methode, und vergleicht ſie mit der Gleichung für die Ellipſe; ſo ergiebt ſich, daß die Kurve, worinn die Kräfte ſich verhalten, wie die Entfernungen von ihrem Mittelpunkt, auch eine Ellipſe iſt, mit dem Unterſchiede, daß der Mittelpunkt der Kräfte hier mit dem Mittelpunkt der Ellipſe ſelbſt zuſammenfällt, da er vorhin in ihrem Brennpunkte war.

Da aber dieſes Geſetz der Kräfte, nach welchem ſie im einfachen Verhältnis der Entfernungen ſtehen, in der Natur nirgends, ſo viel wir wiſſen, Statt findet, und daher auch die Unterſuchung der Bahn keinen großen Nutzen verſpricht: ſo will ich dieſe Materie

terie übergehen. Und dies um ſo mehr, da noch einiges von den Bahnen beyzufügen, worinn ſich die Körper bewegen, wenn man die Kräfte im verkehrten Verhältnis der Würfel der Entfernungen annimmt; hier wollen wir aber nur die leichteſten Fälle abhandeln. Dieſe lehren, wie von Centralkräften zuwege gebracht werden kann, daß endlich nach Verlauf einiger Zeit, die umlaufenden Körper in den Mittelpunkt der Kräfte ſelbſt, fallen, um welchen ſie in obiger Vorausſetzung, wo die Kräfte ſich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernungen, ſich dergeſtalt bewegen, daß ſie ſich ihm weder nähern, noch ſich jemals weiter davon entfernen.

Laßt uns alſo eben die Zeichen anwenden, deren wir uns vorhin bedient haben, mit dem einzigen Unterſchied, daß die Entfernung AC (Taf. X. Fig. 4.) wenn der Körper in A ſchief auf AC geworfen wird, hier d heißt, und b das Loth auf die Tangente der Kurve in A. Demnach $\frac{b}{d}$ der Sinus des Winkels, den die Tangente in A mit AC macht. Nun iſt die Centralkraft $\frac{r^2}{y^3}$, weil ſie im verkehrten Verhältnis der Würfel der Entfernungen angenommen wird, und da die Gleichung für die Kurve zwiſchen dem Radius Vector und dem Loth auf die Tangente der

Kurve

Kurve $S.Kdy = S.\frac{2Bb^2dp}{p^5}$. §. 163. ſo wird $\frac{r^3dy}{y^3} = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, und beſtimmt man die beſtändigen Größen aus dem Integral im Punkt A, ſo erhält man $\frac{Bp^2-Bb^2}{p^2} = \frac{(y^2-d^2)r^3}{2d^2y^2}$, welche Gleichung ohne weitere Veränderung beyzubehalten. Sezt man aber $B = \frac{r^3}{2d^2}$, ſo bekommt man die Gleichung für die Kurve $p = \frac{by}{d}$, oder $y:p = d:b$. Aber $b:d = \frac{CG}{CA}$, d. i. der Sinus des Winkels CAF, und $p:y$ der Sinus des Winkels CBD; Hieraus folgt, daß dieſe Kurve von der Natur, daß der Winkel, den der Radius Vector mit der Tangente oder mit der Kurve macht, überall einerley oder beſtändig iſt. Daher iſt dieſe Kurve die ſogenannte **logarithmiſche Spirallinie**, oder aus dem Geſchlecht der Spirallinien, das in der allgemeinen Gleichung (Taf. X. Fig. 4.) $ACB = t. Log. \frac{y}{a}$ enthalten

halten iſt, wo t, wie aus der Analyſis bekannt, die Tangente des Winkels CBD oder CAF.

Aber die Geſchwindigkeit $= \frac{b\sqrt{B}}{p}$. §. 160, oder weil $p = \frac{by}{d}$, vermöge des vorigen, $= \frac{d\sqrt{B}}{y}$.

Hieraus folgt, daß die Geſchwindigkeit in dieſem beſondern Fall ſich umgekehrt verhält, wie die Entfernungen vom Mittelpunkt der Kräfte oder vom Punkt C.

Da ferner aus der Analyſis bekannt, daß der Raum dieſer Spirallinie überall dem Quadrat der Linie BC proportional; ſo verhält ſich auch die ganze Zeit der Bewegung, wie das Quadrat der Linie BC, folglich die Zeit durch den Bogen AB $= CB^2 - CA^2$. Demnach iſt die Zeit endlich, obgleich der bewegte Körper unendliche Umlänfe um den Punkt C zurücklegen kann, ehe er hineinfällt.

Wird die Gleichung, wie §. 167. geſchehen, ſo verändert, daß ſie die Kurve durch die geraden Coordinaten t und y ausdrückt, ſo wird

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{\left(By^4 - Bb^2y^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2\right)}}.$$

Dieſer allgemeinen Gleichung Integral läßt ſich zu den logarithmiſchen rechnen, und insbeſondere, wenn

wenn es unmöglich wird, auf den Kreis bringen. Geſchieht dieſes, ſo iſt die geſuchte Kurve oder Bahn wiederum entweder algebraiſch oder nicht. Da aber dieſe Fälle von geringem Nutzen ſind, ſo wollen wir nur einen einzigen aus den übrigen wählen, wo

$$\frac{b\sqrt{B}.dy}{\sqrt{\left(By^4 - Bb^2y^2 - \frac{r^3y^4}{2d^2} + \frac{1}{2}r^3y^2\right)}}$$ integrabel unter der Vorausſetzung $B = \frac{r^3}{2b^2}$; alsdenn wird die minder verwickelte Gleichung $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} =$

$$\frac{b\sqrt{B}.dy}{y^2.\sqrt{\frac{1}{2}r^3}.\sqrt{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{d^2}\right)}} = \frac{d.b.dy}{y^2\sqrt{(d^2-b^2)}},$$ und

daher $S.\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{-db}{y\sqrt{(d^2-b^2)}} + C.$

Aber $S.\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$ ein Kreisbogen, deſſen Sinus t und der Halbmeſſer = 1. Daher $-S.\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}}$

der Unterſchied dieſes Bogens vom Quadranten. Beſchreibet alſo aus dem Mittelpunkt der Kräfte C (Taf. X. Fig. 5.) mit dem Halbmeſſer CD den Kreis DBD, und nennet CG, t, ſo wird $DB = - S. \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2}}$, und da $y = d$, wenn in A iſt $t = 0$, ſo wird $C = \frac{b}{\sqrt{(d^2-b^2)}}$. Ferner iſt auch $\frac{b}{d}$ der Sinus des Winkels CAH in A, und $\frac{\sqrt{(d^2-b^2}}{d}$ eben dieſes Winkels Coſinus; deſſen Tangente alſo der Sinus dividirt durch den Coſinus, oder $= \frac{b}{\sqrt{(d^2-b^2)}}$. Heißt daher T die Tangente des Winkels CAH, ſo iſt $DB = \frac{Td}{y} - T$. Hieraus folgt, daß dieſe Bahn die hyperboliſche Spirallinie, wo DB. FC beſtändig.

Demnach iſt die Zeit auch in dieſer Spirallinie endlich, wie in der vorigen, und $d-y$ proportional. §. 162. Der umlaufende Körper muß nach unendlichen Umläufen endlich in den Mittelpunkt der Kräfte ſelbſt fallen, und alle Bewegung aufhören.

II.

Aus den gegebenen Eigenſchaften der Bahn, worinn ſich ein Körper bewegt, das Geſetz der Centralkräfte zu finden.

§. 175.

Erſter Fall, wo die Kurve ſelbſt unbeweglich, und ſich nicht um den Mittelpunkt der Kräfte herumdreht.

Da nach §. 163. $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, und daher die Centralkraft $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$, ſo kommt alles darauf an, daß $\frac{dp}{p^3dy}$ aus den Eigenſchaften der gegebenen Linie beſtimmt wird; hieraus findet man K; da B hier, eben wie vorhin, die der Geſchwindigkeit im Anfange der Bewegung zugehörige Höhe, und b das auf die Tangente gefällte Loth andeutet.

I. Beyſpiel. Die gegebene Kurve ſey ein Kegelſchnitt, und ſein Brennpunkt D (Taf. IX. Fig. 14.) der Mittelpunkt, wornach die Centralkräfte ſtreben. Und wenn DE der Radius Vector, EF das Loth auf die Tangente, CD das auf eben die Tangente aus dem Mittelpunkt der Kräfte gefällte Loth, und FG das Loth aus dem Punkt F auf den Radius Vector gezogen; ſo iſt EG = dem halben

Parameter $= \frac{1}{2}\pi$, und ED : CD = EF : EG, oder y : p = EF : $\frac{1}{2}\pi$; wie in der Analyſis aus der Natur der Kegelſchnitte erwieſen wird. Demnach iſt EF in endlichen Größen gegeben: wir übergehen aber dieſen Werth, da man ohne ſelbigen zu einer Differentialgleichung zwiſchen p und y gelangen kann. Dieſe findet man folgendergeſtalt: Der Krümmungshalbmeſſer iſt überhaupt $\frac{ydy}{dp}$. §. 158. 2. Eben derſelbe aber iſt in den Kegelſchnitten, wie aus der Analyſis bekannt $= \frac{4EF^3}{\pi^2}$; demnach $\frac{4EF^3}{\pi^2} = \frac{ydy}{dp}$, daraus $EF = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi^2 ydy}{4dp}\right)}$. Daher y : p $= \sqrt[3]{\left(\frac{\pi^2 ydy}{4dp}\right)} : \frac{1}{2}\pi$, und $y^3 : p^3 = \frac{\pi^2 ydy}{4dp} : \frac{1}{8}\pi^3$; folglich $\frac{\pi y^2}{2p^3} = \frac{dy}{dp}$. Dieſen Werth alſo in der Gleichung $K = \frac{2Bb^2 dp}{p^3 dy}$ geſezt, wird $K = \frac{4Bb^2}{\pi y^2}$. Folglich verhält ſich auch, da $\frac{Bb^2}{\pi}$ eine beſtändige

Größe,

Größe, K überall, wie $\frac{1}{y^2}$, oder die Centralkraft in allen Kegelſchnitten, umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen.

II. Beyſpiel. **Die gegebene Kurve ſey eine logarithmiſche Spirallinie**, ſo wird das Geſetz der Centralkräfte leicht beſtimmt. Denn da der Winkel, den die Ordinate mit der Tangente einſchließt, in dieſer Gattung Kurven überall von beſtändiger Größe, ſo wird auch der Radius Vector y zum Loth auf die Tangente b in beſtändigem Verhältnis = 1 : a ſtehen. Daher p = ay, und dp = ady, folglich $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy} = \frac{2Bb^2ady}{a^3y^3dy} = \frac{Bb^2}{a^2y^3}$. Demnach **verhält ſich in dieſen Kurven** K **beſtändig**, wie $\frac{1}{y^3}$, **oder verkehrt wie die Würfel der Entfernungen.**

Auch in den übrigen Kurven läßt ſich die Kraft K auf eben die Art beſtimmen. Vorher muß aber p durch y dergeſtalt beſtimmt werden, daß keine andere veränderliche Größe auſer dieſer y im Werthe der Linie p vorhanden iſt.

§. 176.

II. Fall. **Man ſoll die Bahn finden, die ſelbſt ſich um den Mittelpunkt der Kräfte bewegt.**

Beynahe eben die Methode, die im vorigen zu Findung des Geſetzes der Centralkräfte angewandt worden, führt uns auch hier zum Zweck, wofern nur $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$ gehörigermaßen beſtimmt wird. Zu dem Ende iſt zu merken, daß ein um den Mittelpunkt der Kräfte in einer beweglichen Bahn bewegter Körper auf doppelte Art ſich herumdreht; wovon die eine aus der Bewegung des Körpers ſelbſt in der ruhenden Bahn, die andere aus der Bewegung der Bahn, wodurch er ſich bewegt, entſpringt. Daher muß auch der umlaufende Körper eine neue Kurve zurücklegen: und dieſer leztern Kurve Element muß geſucht, und vermittelſt deſſelben die Größe p in der Gleichung $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$ beſtimmt werden.

Es ſey alſo AaB (Taf. X. Fig. 6.) die gegebene Bahn, die ſelbſt ſich um den Punkt C herumdreht, indeß ſich der Körper in eben dieſer Bahn bewegt: C der Mittelpunkt der Kräfte, ca ein Element der Bahn, als unbeweglich betrachtet; die Bahn ſelbſt drehe ſich um C nach ab, indeß der in der Bahn ſich bewegende Körper den Bogen cb zurücklegt. Ferner ſey ec die Tangente der Kurve in $c = t$, p das Loth Ce vom Punkt C auf die Tangente gefällt, die Geſchwindigkeit in AB durch $ac = \sqrt{h}$, und in $cb = \sqrt{H}$. Dies vorausgeſezt, iſt $ac : cb = \sqrt{h} : \sqrt{H}$. Aber $ac = \frac{ydy}{ec}$

$= \frac{ydy}{t}$; daher $\sqrt{h} : \sqrt{H} = \frac{ydy}{t} : \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}} . \frac{ydy}{t}$ $= cb$. Nehmen wir nun an, daß die Winkelbewegung des Körpers in der Bahn AB ſich verhält zur Winkelbewegung in der neuen Bahn, deren Element cb, wie 1 : v, ſo verhalten ſich die Kreisbögen cg und cf, wie 1 : v; daher $\frac{pdy}{t} : cf = 1 : v$, und $\frac{vpdy}{t} = cf$. Hieraus wird das Loth Cd beſtimmt, deſſen Werth, ſtatt p geſezt, den Werth der Centralkraft K ausdrückt. Denn $cb : cf = y : Cd$, oder $\frac{ydy}{t} . \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}} :$ $\frac{vpdy}{t} = y : vp . \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}} = Cd$. Dieſe Gleichung enthält alles, was zur Auflöſung der vorgelegten Aufgabe, auf was Art ſie auch noch mehr beſtimmt wird, nöthig iſt; und läßt ſich überall zu Findung des Werths der Kraft K anwenden, wofern nur im Werth Cd ſonſt keine Größen, als die zur neuen Kurve, deren Element cb, gehören, vorhanden ſind.

Um dieſes zu erhalten, iſt zu merken, daß nun ein doppelter Werth der Größe cb bekannt iſt. Denn ſie iſt $= \sqrt{(cf^2 + bf^2)}$ und auch $= \frac{ydy}{t} . \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}}$.

 Daher

Daher $\sqrt{(cf^2 + bf^2)} = \frac{ydy}{y} \cdot \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{h}}$, in welcher Gleichung ebenfalls alle in der Aufgabe geſezten Bedingungen enthalten ſind; und da $bf = dy$, weil die Bewegung der Bahn eine Winkelbewegung um den Punkt C, ſo wird ſie verwandelt in $\frac{v^2p^2dy^2}{t^2} + dy^2 = \frac{y^2dy^2.H}{t^2h}$. Daraus wird $hv^2p^2 + ht^2 = y^2H$.

Dies vorausgeſezt, iſt die Geſchwindigkeit durch cb oder $\sqrt{H}$, nach §. 160. $= \frac{b\sqrt{B}}{Cd}$, daraus $H = \frac{Bb^2.H}{v^2p^2h}$, und $h = \frac{Bb^2}{v^2p^2}$, dieſen Werth in der vorigen Gleichung $hv^2p^2 + ht^2 = y^2H$ geſezt, erhält man $H = \frac{v^2p^2b^2B + b^2Bt^2}{v^2p^2y^2}$. Setzen wir nun beyde Werthe von H und h in $Cd = \frac{vp.\sqrt{h}}{\sqrt{H}}$, ſo wird $Cd = \frac{vyp}{\sqrt{(t^2 + v^2p^2)}}$, und weil $t^2 = y^2 - p^2$,

$Cd^2 =$

$$Cd^2 = \frac{v^2y^2p^2}{v^2p^2+y^2-p^2}.$$ Das Differential von CD heiſe d. Cd, ſo iſt $-\frac{2d.\,Cd}{Cd^3}$ das Differential von $\frac{1}{Cd^2}$. Man muß aber $\frac{v^2p^2+y^2-p^2}{v^2y^2p^2}$ ſo differentiiren, daß v beſtändig angenommen wird; (denn wäre v nicht beſtändig, ſo könnte die Geſchwindigkeit ſich nicht wie $\frac{1}{Cd}$ verhalten, ſie würde vielmehr eine Function der Größen v und p ſeyn, welches doch nicht ſeyn kann,) oder die Winkelbewegung in der Linie AB zu eben dieſer Bewegung in der erzeugten Kurve, deren Element cb, in einem beſtändigen Verhältnis ſteht. Nach geſchehenem Differentiiren ſetze man in $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$, $\frac{d.\,Cd}{Cd^3}$ anſtatt $\frac{dp}{p^3}$, ſo bekommt man $K = \frac{2Bb^2dp}{v^2p^3dy} + \frac{2Bb^2(v^2-1)}{v^2y^3}$.

§. 177.

Hieraus erhellt, daß der Unterſchied der Kräfte, die den in einer unbeweglichen Bahn umlaufenden Körper treiben, und derjenigen, wodurch der Körper in Bahnen, die ſelbſt ſich um

den

den Mittelpunkt bewegen, getrieben wird, $= \frac{2Bb^2(v^2-1)}{v^2y^3}$, und daher dieſer Unterſchied ſich verhält wie $\frac{1}{y^3}$, d. i. umgekehrt, wie die Würfel der Entfernungen. Denn es iſt offenbar der erſte Theil der Kraft K in der beweglichen Bahn, $\frac{2Bb^2dp}{v^2p^3dy}$ einerley mit der Kraft $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$ in der unbeweglichen, nur mit dem Unterſchiede, daß B im leztern Werthe in $\frac{B}{v^2}$ übergeht. Dieſe Aenderung rührt daher, weil die Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung, der Bewegung der Bahn AB um den Mittelpunkt der Kräfte proportional ſeyn muß. Heißt daher c die Geſchwindigkeit in der unbeweglichen AB, ſo iſt $1 : v = c : \sqrt{B}$, daraus $c^2v^2 = B$, und $c^2 = \frac{B}{v^2}$. Hieraus erhellt,

1.) wenn $v = 1$, d. i. wenn auſer der Winkelbewegung des umlaufenden Körpers ſelbſt keine in der Bahn vorhanden, daß $K = \frac{2Bb^2dp}{p^3dy}$ ohne ei-

nige

nige Veränderung, d. i. die Centralkraft iſt mit der in der unbeweglichen Bahn einerley, welches auch nothwendig Statt haben muß.

2.) Iſt aber $v > 1$, ſo iſt die Centralkraft in der beweglichen Bahn größer, als die Centralkraft in der unbeweglichen, und die Bahn ſelbſt bewegt ſich vorwärts.

3.) Iſt hingegen $v < 1$, ſo iſt die Centralkraft in der beweglichen Bahn kleiner, als die Centralkraft in der unbeweglichen, und die Bahn ſelbſt bewegt ſich rückwärts.

4.) Demnach kann eben die Kraft, die den Körper in einer unbeweglichen Bahn herumdreht, ihn auch in einer beweglichen herumbewegen, wofern nur dieſe Centralkraft um eine andere Centralkraft, die ſich verkehrt verhält, wie die Würfel der Entfernungen, vermehrt oder vermindert wird.

Beyſpiel. Man ſoll die Kraft finden, die der in verkehrtem Verhältnis der Quadrate der Entfernungen wirkenden Centralkraft, womit ſich der Körper in Kegelſchnitten, und insbeſondere in der Ellipſe bewegt, zugeſezt werden muß, daß der Umlauf in eben dieſen, mit einer gewiſſen Winkelbewegung (modus abſidus) um den Mittelpunkt der Kräfte verſehenen Bahnen geſchieht: hier iſt zu merken, daß in den Kegelſchnitten und der Ellipſe $\frac{dy}{dp} = \frac{y^2 \pi}{2p^3}$.

Daraus erhält man $K = \frac{4Bb^2}{v^2 y^2 \pi} + \frac{2Bb^2(v^2-1)}{v^2 y^3}$.

Achter

Achter Zuſatz.

Vom ſenkrechten Druck der Körper auf die Kanäle, worinn ſie ſich bewegen.

Inhalt.

§. 178 — 193. Senkrechter Druck ſteigender und fallender Körper auf die Kanäle, worinn ſie ſich durch die natürliche Schwere, und §. 194. aus andern Kräften bewegen. §. 195. Beſtimmung der Kurve, die überall von fallenden Körpern mit einer, dem Gewicht des Körpers gleichen Kraft gedrückt wird.

---

§. 178.

Wir haben §. 32. erwieſen, daß ſchwere Körper, indem ſie durch eine Kurve fallen oder ſteigen, mit doppelter Kraft wirken, wovon die eine ſich nach der Tangente der Kurve richtet; die andere auf die Kurve ſenkrecht, und $= \frac{gdx}{ds}$. Dieſe leztere Kraft aber haben wir dort nicht betrachtet, weil damals die Natur der Fliehkräfte noch nicht erklärt war, deren Kenntnis zum Verſtand dieſer ſenkrechten Kraft nöthig iſt. Dies wollen wir jezt thun, und eine allgemeine und kurze Auflöſung aller dieſe Kraft betreffenden Aufgaben an die Hand geben.

§. 179.

Sezt beym Steigen oder Fallen eines ſchweren Körpers die Linie ſelbſt, worinn er ſich bewegt,

wegt, der Bewegung des Körpers ein Hinderniß entgegen, ſo muß daher ein Druck auf die Elemente dieſer Kurve, und zwar von der Geſchwindigkeit, womit ſich der Körper bewegt, erzeugt werden. Denn da der auf AE (Taf. X. Fig. 1.) ſteigende oder fallende Körper in der Richtung der Tangente der Kurve EF fortzurücken ſtrebt, und die Kurve ſelbſt dieſe Bewegung nach der Tangente verhindert, vielmehr verurſacht, daß der Körper in der Kurve ſelbſt bleibt, ſo muß nothwendig in jedem Element der Kurve eine Kraft FG wirken, wodurch der Körper von der geradlinigten Bewegung nach der Tangente zur krummlinigten, die er wirklich verfolgt, abgezogen wird.

Dieſe Kraft muß einer andern gleich ſeyn, womit der Körper ſelbſt in die Kurve wirkt, und ſie drückt. Daher iſt ſie der Fliehkraft des Körpers gleich, wenn man ihre abſolute Größe, oder die Fliehkraft in dem, die Kurve, worinn ſich der Körper bewegt, im Punkt G berührenden Kreiſe betrachtet.

§. 180.

Daher wird auch der, von der bloſen Geſchwindigkeit des bewegten Körpers erzeugte Druck auf die Elemente der Kurve beſtimmt. Wir nehmen die Geſchwindigkeit als gegeben an. Denn dieſer Druck iſt gleich der Fliehkraft im Kreiſe, deſſen Halbmeſſer einerley mit dem Krümmungshalbmeſſer im Punkt G, und worinn die Geſchwindigkeit der Bewegung einerley mit der Geſchwindigkeit des in der Kurve bewegten Körpers in G.

§. 181.

§. 181.

Es ſey alſo die, dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe h, der Krümmungshalbmeſſer r, die natürliche Schwere = 1, und die geſuchte Fliehkraft = x; ſo iſt nach §. 187. Vorl. und angehängten Anmerkung, h : $\frac{1}{2}$r = x : 1. Daher die Fliehkraft, ſo wie der, von der bloſen Geſchwindigkeit erzeugte Druck auf die Elemente der Kurve $= \frac{2h}{r}$, d. i. einerley mit der Fliehkraft in der Kreisbewegung, deren Geſchwindigkeit $= \sqrt{}h$, wenn r der Krümmungshalbmeſſer. Nennt man aber die Schwere g, ſo wird die Fliehkraft $= \frac{2gh}{r}$.

§. 182.

Demnach iſt §. 178. 179. der ganze Druck T auf jedes Element der Kurve, worauf der Körper von Kräften, die in vertikalen und parallelen Richtungen wirken, bewegt wird, $= \frac{2hg}{r} \pm \frac{gdx}{ds}$; aus welcher Gleichung in beſondern Fällen die Stärke der Seitenwände eines Kanals zu beſtimmen, worinn ein Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit von gewiſſen Kräften getrieben wird.

Heißt

Heißt alſo überhaupt die aus der Wirkung der Kräfte erzeugte ſenkrechte Kraft P, ſo iſt der ganze

$$\text{Druck} = \frac{2hg}{r} \pm P.$$

§. 183.

Vorhin ſagten wir T ſey $= \frac{2hg}{r} \pm P$, und zwar aus folgendem Grunde: Der von den Kräften erzeugte Druck $\frac{gdx}{ds}$ kann mit der Fliehkraft ſowohl einerley als verſchiedene Richtung haben. Im erſtern Fall vereinigen beyde Kräfte, die Fliehkraft und die Kraft P, ihre Gewalt, und ſtreben mit gemeinſchaftlicher Gewalt, die Kurve oder den Kanal zu zerbrechen; im leztern Fall wird die Linie nur von dem Unterſchiede dieſer Kräfte gedrückt.

Sind alſo dieſe Kräfte einander entgegengeſezt und gleich, ſo iſt gar kein Druck auf die Elemente der Kurve; und alsdenn iſt die Bewegung frey und ungehindert, ob ſie gleich in einer Linie geſchieht, die die Bewegung, wäre nicht Gleichheit der Kräfte vorhanden, gewiß hindern würde.

§. 184.

Dies ſtimmt auch mit dem, was wir §. 184. Vorl. behaupteten, genau überein, daß nämlich der auf die Kurve ſenkrechte Theil der Schwerkraft überall der Fliehkraft gleich iſt, wenn dieſe auf den Mit-

telpunkt des Krümmungskreiſes bezogen wird. Auch lieſen wir, wegen dieſer Gleichheit der Centralkräfte in §. 185. ſ. f. die Fliehkraft auſer Acht.

§. 185.

Verſtehen wir durch g eine, in vertikalen Richtungen gleichförmig wirkende Kraft, wie unſere Schwere: ſo iſt der Druck des fallenden Körpers $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. §. 182. Wie aus dieſer Formel die Größe des Drucks auf die Kurve beſtimmt wird, wollen wir an einem und andern Beyſpiel zeigen. Zu dem Ende erinnern wir, daß, wenn AC (Taf. X. Fig. 7.) eine Kurve, deren Scheitel in A, das Stück Ad der Horizontallinie, $= x$, und $df = y$.

§. 186.

Dies vorausgeſezt, laßt uns den Krümmungshalbmeſſer in allen Punkten der Linie AC unendlich groß annehmen; folglich AC in AL verändert, weil $r = \infty$, $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds} = \frac{gdx.}{ds}$. Ferner ſey AK eine Vertikal- KL eine Horizontallinie, $AK = a$, $KL = b$, $AH = y$: ſo iſt $x = \frac{by}{a}$; $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)}}{b} = dx.\frac{AL}{LK}$. Daher $\frac{gdx}{ds} = g.\frac{LK}{AL}$.

Demnach

Demnach verhält ſich der Druck der Schwere in jeder ſchiefliegenden Ebene, zum Druck eben dieſer Schwere in der Vertikallinie, wie die Grundlinie der geneigten Ebene zu ihrer Länge.

§. 187.

Es ſey die Linie, wodurch der ſchwere Körper fällt, ein Kreis AEG, und die natürliche Schwere $= g$, $AD = x$, $AF = r$; ſo iſt der Druck $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds}$. Da aber in E, $b = DE = \surd(2rx - xx)$, ſo wird $\frac{2hg}{r} = \frac{2g\surd(2rx - xx)}{r}$. Weil ferner $ds = \frac{rdx}{\surd(2rx - xx)}$, ſo iſt $\frac{gdx}{dt} = \frac{g}{r} . \surd(2rx - xx)$.

Daher im Kreiſe der Druck überall $= \frac{3g}{r} . \surd(2rx - xx)$.

Dieſer Druck iſt dreymal ſo groß als der, ſo von der bloſen Beſchleunigung entſteht.

Hieraus erhellt, daß in G, wo der Bogen AG dem Quadranten gleich iſt, $\frac{3g}{r} . \surd(2rx - xx) = 3g$, weil $x = r$, d. i. der Druck iſt hier wiederum drey-

 mal

mal größer, als der von der Schwere erzeugte, wie wir auch oben §. 155. erwieſen haben.

§. 188.

Es ſey die Linie AC eine Parabel, deren Parameter $= p$, und $px = y^2$; ſo iſt $ds = \frac{dx.\sqrt{(4x+p)}}{2\sqrt{x}}$, und $\frac{gdx}{ds} = 2g.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}}$; dies iſt der Theil des Drucks, der von der Beſchleunigung hervorgebracht wird.

Der andere von der Fliehkraft erzeugte Theil, $\frac{2hg}{r}$ iſt $= \frac{2gy}{r} = \frac{2g\sqrt{px}}{r}$. Es iſt aber bekannt, daß für alle Punkte der Parabel $r = \frac{\sqrt{(4px+p^2)^3}}{2p^2}$ (§. 206. Vorl.) $= \frac{(p+4x).\sqrt{(p^2+4px)}}{2p}$.

Daher $\frac{2hg}{r} = \frac{4gp\sqrt{px}}{(p+4x).\sqrt{(p^2+4px)}}$, und der ganze Druck $= \frac{2g\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}} + \frac{4gp\sqrt{px}}{(p+4x).\sqrt{(p^2+4px)}}$.

§. 189.

Liegen die Kurven ſelbſt, wodurch ſich die ſchweren Körper bewegen, mit ihren Axen vertikal;

da

da in vorigem Beyſpiel die Axe horizontal angenommen wurde; wie AE (Taf. X. Fig. 8.) deren Axe AK; und wird die wirkende Kraft durch Ba ausgedrückt, und in zwo andere Kräfte, Bb und ba, zerlegt, wovon dieſe mit der Tangente gleichlaufend, jene auf die Kurve ſenkrecht iſt: ſo iſt klar, daß die ſenkrechte Kraft nicht gegen die Kurve, ſondern in einer von der Kurve weggekehrten Richtung wirkt, und daher der Fliehkraft entgegengeſezt iſt. Ferner erhellt auch, daß, den vorigen Werth der ſenkrechten Kraft $\frac{gdx}{ds}$ beybehalten, die Abſciſſen AG in die Axe AL fallen, folglich die Linien, die in vorigem Beyſpiel Abſciſſen waren, hier Ordinaten, und umgekehrt, die dort Ordinaten waren, hier Abſciſſen ſind.

§. 190.

Laßt uns dieſes in drr Parabel ſehen. Die Axe dieſer Kurve ſey vertikal, ſo iſt $x^2 = py$; $dy = \frac{2xdx}{p}$, und $ds = \frac{dx}{p} . \sqrt{(p^2+4x^2)}$, daher $\frac{gdx}{ds} = \frac{gp}{\sqrt{(p^2+4x^2)}}$: dies iſt der Theil des ſenkrechten Drucks, der von der Beſchleunigung g entſteht, die wir hier unſerer Schwere gleich annehmen.

Der andere von der Fliehkraft erzeugte Theil des Drucks iſt $\frac{2hg}{r}$. Aber $r = \frac{(p^2+4x^2).\sqrt{(p^2+4x^2)}}{2p^2}$. Daher $\frac{2hg}{r} = \frac{4gpx^2}{(p^2+4x^2).\sqrt{(p^2+4x^2)}}$, weil $h = y = \frac{x^2}{p}$. Dieſe Kraft iſt aber der erſtern entgegengeſezt, demnach der ganze Druck $= \frac{gp}{\sqrt{(p^2+4x^2)}} - \frac{4gpx^2}{(p^2+4x^2).\sqrt{(p^2+4x^2)}}$.

Da x hier die Ordinate vorſtellt, ſo läßt ſich px ſtatt x^2 ſetzen, wenn die Abſciſſe x heißt, und alsdenn iſt der ganze Druck $= \frac{gp}{\sqrt{(p^2+4px)}} - \frac{4gp^2x}{(p^2+4px).\sqrt{(p^2+4px)}} = \frac{gp^2}{(p+4x).\sqrt{(p^2+4px)}}$, und in dieſer Formel iſt x das Zeichen der Abſciſſe.

§. 191.

Sind aber die fallenden Körper im Anfang ihrer Bewegung bereits mit einer, der Höhe a zugehörigen Geſchwindigkeit verſehen; ſo wird zwar

zwar dadurch in dem Effekt, der von der Beſchleunigung entſteht, nichts verändert, folglich bleibt auch der durch $\frac{gdx}{ds}$ ausgedrückte Theil des ganzen Drucks einerley; aber der Theil des Drucks, den die Fliehkraft erzeugt, ändert ſich, weil dieſe Kraft im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit wächſt. §. 175. Vorl.

Da nun in der Bewegung auf der geraden Linie die Fliehkraft = o, ſo bleibt hier auch der Druck einerley, die in gerader Ebene bewegten Körper mögen im Anfange des Falles eine Geſchwindigkeit haben oder nicht.

§. 192.

In den krummlinigten Bewegungen aber iſt die Fliehkraft allemal vorhanden. Fängt alſo in obigem Beyſpiel von der Kreisbewegung §. 187. der Körper in A ſeinen Fall mit einer gewiſſen, der Höhe a zugehörigen Geſchwindigkeit an, ſo iſt die Geſchwindigkeit in E die der Höhe $\sqrt{(2rx - xx)} + a$ zugehörige, und daher der von der Fliehkraft erzeugte Druck $= \frac{2g\sqrt{(2rx-xx)}+2ga}{r}$. Folglich der ganze

$$\text{Druck in } E = \frac{g}{r}.\ \sqrt{(2rx - xx)} + \frac{2g\sqrt{(2rx-xx)}+2ga}{r} = \frac{3g}{r}.\sqrt{(2rx-xx)} + \frac{2ag}{r}.$$

§. 193.

Es ſey auch in der Parabel die der Höhe $a + \sqrt{px}$ zugehörige Geſchwindigkeit, die Axe wie §. 188. horizontal geſezt. Daher der von der Fliehkraft erzeugte Druck $= \frac{2hg}{r} = \frac{2ag + 2g\sqrt{px}}{r} = \frac{(2ag + 2g\sqrt{px})2p}{(p+4x)\sqrt{p^2+4px}}$. Und demnach der ganze

$$\text{Druck} = \frac{2g\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}} + \frac{(2ag + 2g\sqrt{px})2p}{(p+4x).\sqrt{(p^2+4px)}}.$$

§. 194.

Auch läßt ſich der Druck, bey Vorausſetzung anderer Geſetze der beſchleunigenden Kräfte beſtimmen. Z. B. ſtehen die nach einem gewiſſen Punkt ſtrebenden Kräfte in jedem Verhältnis der Entfernungen von dieſem Punkt. Alsdenn iſt die auf die Elemente der Kurve ſenkrechte Kraft $= \frac{K\sqrt{(ds^2 - dy^2)}}{ds}$, wie aus §. 48. folgt. Ueberdies iſt die Geſchwindigkeit $= \sqrt{(S. - Kdy + B)}$, woraus ſich die Fliehkraft, und daher der ganze Druck beſtimmen läßt. Da aber dieſe Aufgaben ſchwer aufzulöſen und von geringen Nutzen ſind, ſo wollen wir ſie übergehen. **Auch läßt ſich die Linie aus dem gegebenen Druck beſtimmen,** welches wir doch nur

nur in dem Fall zeigen wollen, wo unſere natürliche Schwere als die drückende Kraft angenommen wird.

§. 195.

Suchet z. B. eine Linie, wodurch ein Körper dergeſtalt fällt, daß alle Punkte der Kurve von dem ſchweren Körper mit einer Kraft, die dem Gewicht des ſchweren Körpers gleich iſt, gedrückt werden. Der ganze Druck wird ſeyn $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds}$, und heißt die natürliche Schwere g, ſo bekommen wir $\frac{2hg}{r} + \frac{gdx}{ds} = g$, welche Gleichung die Kurve CEF (Taf. XI. Fig. 1.) ausdrückt.

Um nun die Größen h und r durch die Abſciſſen und Ordinaten der Kurve zu beſtimmen, nehme man AC für die der Geſchwindigkeit im Anfange des Falles zugehörige Höhe. Ferner ſey AB dieſer Kurve Axe, cd und ef ihre Ordinaten $= y$, die Abſciſſe Ac $= x$, und ce $= dx$. So iſt die im Fall durch AC und durch die Kurve CEd erlangte Geſchwindigkeit $= \sqrt{gy} = \sqrt{h}$. §. 48. Vorl. Sezt man aber ds beſtändig, ſo iſt $r = \frac{dyds}{ddx}$; daher der ganze Druck $= \frac{2gy.ddx}{dyds} + \frac{gdx}{ds} = g$, oder $2yddx + dydx =$

 dyds,

dyds, ſo durch $2\sqrt{y}.ds$ dividirt, in $\frac{\sqrt{y}.ddx}{ds} +$ $\frac{dxdy}{2\sqrt{y}.ds} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$ übergeht, wovon das Integral $\frac{dx\sqrt{y}}{ds} = \sqrt{y} - B$, oder $dx\sqrt{y} = ds.(\sqrt{y} - B)$.

Damit der Theil der Gleichung B mit den übrigen übereinkommt, ſo nehmet $B = \sqrt{c}$. Man mag aber c größer oder kleiner annehmen, ſo wird daher auſer dem Verhältnis $dx : ds$, folglich auſer dem Winkel, den die Axe mit der erſten Tangente der Kurve macht, nichts verändert.

Demnach iſt die gefundene Gleichung $\sqrt{y}.dx = \sqrt{y}.ds - \sqrt{c}.ds$. Setzet $\sqrt{y} = z$, ſo iſt $dy = 2zdz$, und $ds^2 = dx^2 + 4z^2dz^2$; ſezt man dieſe Werthe in der Gleichung, ſo geht ſie in eine andere über, $dx = \frac{2z^2dz - 2\sqrt{c}.zdz}{\sqrt{(2\sqrt{c}.z - c)}}$. Setzet wiederum $2z - \sqrt{c} = t$, ſo iſt $dz = \frac{dt}{2}$, und $z = \frac{t + \sqrt{c}}{2}$. Daher $dx = \frac{(t^2 - c)dt}{4\sqrt{t}.\sqrt{c}} = \frac{t^{\frac{3}{2}}dt - ct^{-\frac{1}{2}}dt}{4\sqrt{c}}$. Hier-

von

von iſt das Integral $\frac{1}{4\sqrt{c}}.(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2ct^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{10\sqrt{c}}(t^{\frac{5}{2}}-5ct^{\frac{1}{2}})$, und ſtatt t deſſen Werth $2z-\sqrt{c}$ geſezt, erhält man

$$\frac{1}{10\sqrt{c}}(t^2-5c)\sqrt{t} = \frac{1}{10\sqrt{c}}(4z^2-4z\sqrt{c}-4c)\sqrt{(2z-\sqrt{c})} = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2-\sqrt{c}.z-c)\sqrt{(2z-\sqrt{c})},$$

und

$$x = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2-\sqrt{c}.z-c)\sqrt{(2z-\sqrt{c})}+B.$$

Die beſtändige Größe B wird ſo beſtimmt. Für $x=0$, wird $\sqrt{y}=z=\sqrt{a}$, und daher

$$B = -\frac{2}{5\sqrt{c}}(a-\sqrt{ac}-c)\sqrt{(2\sqrt{a}-\sqrt{c})},$$ und

$$x = \frac{2}{5\sqrt{c}}(z^2-\sqrt{c}.z-c)\sqrt{(2z-\sqrt{c})} - \frac{2}{5\sqrt{c}}(a-\sqrt{ac}-c)\sqrt{(2\sqrt{a}-\sqrt{c})}.$$

Sezt man $\sqrt{y}$ für z, ſo gelangen wir, nach Wegſchaffung der Wurzeln und gehöriger Verſetzung der Glieder, zu einer algebraiſchen Gleichung der fünften Dignität, ſo die geſuchte Linie ausdrückt.

Mehrere dergleichen Aufgaben laſſen ſich auf eben dieſem Weg auflöſen. Aber dieſe Arbeit iſt von keinem großen Nutzen.

Zwölfte

Zwölfte und dreyzehnte Vorleſung.

Von der Bewegung geworfener ſchwerer Körper.

Inhalt.

§. 214. — 220. Geworfene Körper beſchreiben durch den Trieb der Schwere bey ungehinderter Bewegung Parabeln. §. 221. — 223. Den, dem Durchmeſſer der Parabel zugehörigen Parameter, die größte Höhe des Wurfs, und den Parameter der Axe zu finden. §. 224. Bey gleichen Geſchwindigkeiten im Anfang der Bewegung verhalten ſich die Horizontalweiten wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel. Verhältnis der Parameter der Axen in dieſen Parabeln, und der größten Höhen. §. 225. Die Horizontalweite iſt am größten, wenn der Erhöhungswinkel 45°. §. 226. Aus einem gegebenen Wurfe die Horizontalweiten unter andern Erhöhungswinkeln zu finden. §. 227. Der Parameter der Parabel unter dem Winkel 45° iſt der doppelten Horizontalweite gleich. §. 228. — 230. Die Geſchwindigkeit, womit die Körper geworfen werden, iſt die, ſo im Fall durch den vierten Theil des Parameters erlangt wird. §. 231. Zeit der Bewegung geworfener Körper. §. 232. Anwendung des Kalkuls auf die über den Horizont erhöhten, nicht im Horizont ſelbſt liegenden Körper. §. 233. — 236. Eben dieſes läßt ſich auch durch geometriſche Verzeichnung finden. §. 237. Uebereinſtimmung dieſer Lehre mit der Erfahrung.

§. 214.

Zu der Lehre von den Centralkräften gehört auch die Erklärung der Bewegungen geworfener Körper, die von einem Ort geworfen, indeß

indeß ſie mit gleichförmiger Geſchwindigkeit fortrücken, zugleich von der Schwere niederwärts getrieben werden. Da nun die Schwere beſtändig gegen den nämlichen Punkt, den Mittelpunkt der Erde, wirkt, ſo muß offenbar das, was von der, von Centralkräften erzeugten Bewegung geſagt worden, auch hier ſtatt haben; und daher würden auch die, mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit geworfenen Körper um die Erde in einer elliptiſchen Bahn herumlaufen, deren Brennpunkt mit dem Mittelpunkt der Erde zuſammenfällt, wo nicht die Erdfläche die, von den geworfenen Körpern beſchriebene Linie durchſchnitte. Hieraus lieſen ſich die Regeln der Bewegung dieſer Körper finden. Wir wollen aber einen andern Weg, dieſe Bewegung und ihre Regeln zu finden, einſchlagen, der deutlich und ſo leicht iſt, daß wir, bey Vorausſetzung einiger leichten und bekannten Eigenſchaften der Kegelſchnitte, zur völligen Einſicht deſſen gelangen, was in dieſer Materie am nützlichſten und nothwendigſten iſt, und deſſen Kenntnis andern praktiſchen Theilen der Meßkunde weſentlich nützt. Da wir uns der leichteſten Methoden, wodurch Wahrheiten gefunden werden, befleißigen, ſo iſt uns nicht jede Art, ſie vorzutragen und zu erweiſen, gleichgültig.

§. 215.

Es ſey alſo AH (Taf. XI. Fig. 2.) die Linie, nach welcher ein Körper mit einer gegebenen, der Linie AC proportionalen Geſchwindigkeit geworfen worden. So erhellt, daß der geworfene Körper, wenn er ſich blos mit dieſer eingedrückten Geſchwindigkeit bewegt, in ſeiner Bewegung durch die Lnie AH dergeſtalt beharren wird, daß die in dieſer Linie zurückgelegten

Räume,

Räume, AC, CF, FN, NP ꝛc. gleich ſind. Dies muß ſich ſo verhalten, die Linie AH mag horizontal, oder auf irgend eine Art ſchief gegen den Horizont liegen.

Da aber während dieſer Bewegung, die Schwere den mit ſeiner Geſchwindigkeit fortrückenden Körper beſtändig gegen den Mittelpunkt der Erde ſtößt: ſo kann er in der Linie AH nicht beharren, ſondern muß ſich zugleich niederwärts bewegen. Da jedoch der Halbmeſſer der Erde in Vergleichung mit der Horizontallinie AO, die der Körper beſchreibt, für unendlich groß zu achten, ſo ſind alle Linien, wodurch der Körper nach der Erde Mittelpunkt fällt, nämlich CB, FK, NM, PQ ꝛc. wegen ihrer geringen Entfernung für parallel zu halten.

§. 216.

Hier iſt zu merken, daß unſere Schwere, wie oben erwieſen, eine beſtändige Kraft iſt, und in gleichen Zeiten gleiche Effekte erzeugt, die Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde, in welchen ſie wirkt, mögen etwas größer oder kleiner ſeyn. §. 122.

Dies vorausgeſezt, ſey AC proportional der Kraft, oder der Geſchwindigkeit, womit der geworfene Körper fortrückt, und CB proportional der Kraft, womit der Körper beſtändig niederwärts nach der Erde Mittelpunkt getrieben wird. Ferner ſey AO die Horizontallinie, über welche die Richtung des Wurfs unter dem Erhöhungswinkel HAO erhöht iſt. So iſt klar, daß CADB ein Parallelogramm der Kräfte, deſſen Diagonale AB ſowohl den von dem Körper zurückgelegten Bogen, der in einer unendlich kleinen Zeit ſich als eine gerade Linie anſehen läßt,

als

als auch die ganze, von den in dieſer unendlich kleinen Zeit zugleich wirkenden Kräften AC und CB erzeugte Kraft und Geſchwindigkeit ausdrückt. §. 60.

Hörte die Schwere im Punkt B auf, ſo würde der Körper ſeine Bewegung durch die Linie ABE fortſetzen, weil die Materie für ſich ihre Richtung nicht ändern kann. Der Körper würde alſo mit der Geſchwindigkeit AB, wenn keine Kraft hinderte, nach der Tangente AE fortrücken. Daher die Zeit wiederum unendlich klein geſezt, würden die in gleichen unendlich kleinen Zeiten zurückgelegten Räume gleich ſeyn, BA = EB. Wegen der Schwere kann aber der Körper die Bewegung nicht nach BE verfolgen. Dieſe drückt den Körper in der Vertikallinie EK durch EG niederwärts, und erzeugt daher in Vereinigung mit der Geſchwindigkeit des Körpers eine neue Geſchwindigkeit BG.

§. 217.

Da nun die Dreyecke ABC, AEF ähnlich, und AB = BE; §. 216. ſo iſt auch AC = CF; eben ſo, weil ACI, AFK ähnliche Dreyecke, und AC = CF, iſt AI = IK.

§. 218.

Eben dieſes ſchlieſen wir auf ähnliche Art, wenn wir zu andern Elementen der Kurve fortſchreiten. Da der Körper mit der Geſchwindigkeit BG, womit er den Bogen BG zurückgelegt, in eben der Zeit ſich nach der Tangente durch Gv = BG bewegen muß, ſo wird auch ſeyn CF : FN = BG : Gv, und daher, da BG = Gv, auch CF = FN, folglich auch AI = IK = KM, u. ſ. f. durch die ganze Linie AO.

Sezt

Sezt man alſo die Linie AO horizontal, ſo ſind die horizontalen Räume, die der Körper zurücklegt, AI, AK, AM den Zeiten der Bewegung durch AQO proportional, obgleich die Geſchwindigkeit des Körpers in der Vertikallinie von der Schwere beſtändig entweder vermehrt oder vermindert wird. Ferner ſind die den Theilen in der Horizontallinie zugehörigen Theile der Richtungslinie AH einander gleich.

§. 219.

Dieſes leztere, daß bey gleichen Zeiten die horizontalen Räume AI, IK gleich ſind, folglich auch dieſe Räume vom Anfang A an genommen, AI, AL, ſich beſtändig vechalten, wie die Zeiten der Bewegung durch die zugehörigen Bogen der Kurve, läßt ſich aus der Natur und Wirkung der Centralkräfte ſelbſt begreifen. Die Centralkraft, hier unſere Schwere, iſt die Urſache davon. Denn iſt der Mittelpunkt der Kräfte in c, ſo ſind die in gleichen Zeiten beſchriebenen Räume ABc, BGc gleich, und bey ungleichen Zeiten dieſen beſtändig proportional. Aber die Räume ABI, BGKI, mit AIc, IKc verglichen, für nichts zu achten; daher AIc = IKc. Da aber die Höhe dieſer Dreyecke AIc, IKc einerley, ſo müſſen auch ihre Grundlinien AI, IK gleich ſeyn; und allgemein die Grundlinie ſich verhalten, wie die Dreyecke ſelbſt. Demnach ſind auch die horizontalen Räume beſtändig den Zeiten, worinn die zugehörigen Bogen AB, AG zurückgelegt werden, proportional.

§. 220.

Dies vorausgeſchickt, wird die Linie, die der, mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit geworfene und

von

von der Schwere gereizte Körper beſchreibt, leicht beſtimmt. Denn fällt die Richtung des Wurfs mit der Richtung der Schwere zuſammen, ſo muß die Bewegung in gerader Linie geſchehen; machen aber die Richtungslinien des Wurfs und der Schwere einen Winkel mit einander, ſo ſtelle man die Zeiten durch die Linien AC, AF, und die unterdeſſen in der Vertikallinie zurückgelegten Räume durch die Linien CB, FG vor. Man ziehe ferner die Linie AT mit CB gleichlaufend, d. i. vertikal, und DB, GS mit AH gleichlaufend; auch betrachte man AT als die Linie der Abſciſſen AD, AS = x, und DB oder SG ſey = y. Dies vorausgeſezt, iſt x = yy, oder, die Glieder auf einerley Abmeſſung gebracht, px = yy. Dieſe Gleichung lehrt aber, daß AQo eine Parabel, und AT ein Durchmeſſer derſelben, weil y $= \pm \surd px$ auch eine verneinte, der bejahten gleiche, Ordinate giebt. Nun iſt AT die Axe der Parabel, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter, oder HAD $= 90°$, d. i. wenn der Körper in horizontaler Richtung geworfen wird. Wo alſo dieſes Statt hat, ſo iſt der Anfang der Bewegung im Scheitel der Parabel ſelbſt, oder in ihrer horizontalen Tangente: in den übrigen Fällen iſt AT ein Durchmeſſer der Parabel, mit der Axe parallel.

§. 221.

Der Sinus des Winkels OAH heiſe s, Coſinus c, AO, a, und durch AO verſtehe man den ganzen horizontalen Raum, oder die Horizontalweite, ſo daß der aus A geworfene Körper den Bogen AQO durchläuft, und in O in den Horizont fällt:

ſo wird aus den gegebenen AO, s und c der Parameter des Durchmeſſers gefunden. Denn AO : AH = c : 1 für den ganzen Sinus = 1. Daher AH $= \frac{a}{c}$; AO : HO = c : s, und HO $= \frac{as}{c}$. Aber

$AH^2 = p.HO$, daher $\frac{pas}{c} = \frac{a^2}{c^2}$, folglich $p =$

$\frac{a}{cs}$, woraus die Gleichung für die Parabel entſteht

$$\frac{1}{cs} . ax = y^2.$$

§. 222.

Hieraus findet man die größte Höhe nb, zu welcher der geworfene Körper über den Horizont ſteigen und ſich erheben kann. Denn da die Axe der Parabel nbR (Taf. XI. Fig. 3.) vertikal, ſo muß ſie auf AO ſenkrecht ſeyn, und daher AO in zwey gleiche Theile ſchneiden, ſo daß Ab $= \frac{1}{2}a$, und

$c : s = \frac{1}{2}a : \frac{\frac{1}{2}as}{c} =$ db. Aber Ad die Tangente

und dR die Axe; daher, wie aus der höhern Geometrie bekannt, dn = nb, folglich nb $= \frac{\frac{1}{4}as}{c}$, und

dies iſt die größte Höhe, wozu der geworfene Körper

per gelangen kann. Da nun $\frac{s}{c}$ die Tangente des Erhöhungswinkels EAO, ſo iſt die größte Höhe der vierte Theil der horizontalen Länge AO, durch die Tangente des Erhöhungswinkels multiplicirt.

§. 223.

Aus der gegebenen Höhe nb findet man den Parameter der Axe in n, oder der Axe nbR, denn heißt dieſer Parameter P, ſo iſt, wie aus der Lehre von den Kegelſchnitten bekannt, $p = P + 4nb = P + \frac{as}{c}$. Aber $p = \frac{a}{cs}$. §. 221. Daher der Parameter der Axe $= \frac{a}{cs} - \frac{as^2}{cs} = \frac{ac}{s}$, weil $1 - s^2 = c^2$, d. i. = der vierten Proportionallinie zu dem Sinus und Coſinus des Erhöhungswinkels und zu der Horizontalweite.

§. 224.

Da, wenn der Sinus eines Winkels $= s$, und der Coſinus $= c$, der Sinus des doppelten Winkels $= 2cs$, nach der Trigonometrie, ſo wird, weil $p = \frac{a}{cs}$ §. 221. $1 : cs = p : a$, und $2 : 2cs = p : a$, oder $1 : 2cs = \frac{1}{2}p : a$. Demnach verhält ſich der

 halbe

halbe Parameter zur Horizontalweite, wie der ganze Sinus zum Sinus des doppelten Erhöhungswinkels. Hieraus folgt

1.) Bleibt der Parameter einerley, ſo verhält ſich die Horizontalweite, wie der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels, oder $a = 2cs$, denn man nimmt das Verhältnis $1 : p$ einerley und beſtändig an.

2.) Der Parameter bleibt aber, wie man leicht ſieht, einerley, ſo lange die Geſchwindigkeit einerley bleibt, womit der Körper im Anfang der Bewegung ausgeht. Denn nimmt man in verſchiedenen Erhöhungswinkeln einerley Geſchwindigkeit an, ſo iſt AC (Taf. XI. Fig. 2.) wie auch CB unveränderlich; und daher $\frac{AC^2}{CB} = p$ eine beſtändige Größe.

3.) Bleibt alſo die Geſchwindigkeit unter verſchiedenen Erhöhungswinkeln einerley, ſo verhält ſich die in der ganzen Zeit des Wurfs zurückgelegte horizontale Länge, wie der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels.

Dies folgt auch unmittelbar aus der Gleichung §. 221., $p = \frac{a}{cs}$. Denn nimmt man p für beſtändig, ſo iſt $a = cs$, verhält ſich folglich auch wie $2cs$.

4.) Aendert ſich alſo, indem die Geſchwindigkeit einerley bleibt, der Winkel, unter welchem der

der Körper geworfen wird, ſo entſteht auch eine andere von dem geworfenen Körper beſchriebene Parabel. Denn §. 223. $P = \frac{ac}{s}$, in welchem Werthe alle Größen a, c und s beſtändig ſich ändern, wenn der Erhöhungswinkel ſich ändert.

5.) Und da a dem Produkt cs beſtändig proportional (3), ſo wird $P = c^2$. Demnach verhalten ſich bey verſchiedenen Erhöhungswinkeln die den Axen der verſchiedenen Parabeln, worinn ſich der geworfene Körper bewegt, zugehörigee Parameter, wie die Quadrate der Coſinuſſe der Erhöhungswinkel. Und dieſe verſchiedenen Parabeln durchſchneiden ſich alle in dem gemeinſchaftlichen Punkt, woraus der Körper unter verſchiedenen Erhöhungswinkeln geworfen wird, ſo wie auch ihre Axen alle parallel ſind.

6.) Die größten Höhen aller dieſer Parabeln über den Horizont ſind durchaus $= \frac{1}{4}\frac{as}{c}$. §. 222. und daher proportional ss, weil a = cs. Sie verhalten ſich alſo wie die Quadrate der Sinuſſe der Erhöhungwinkel.

Daher verhalten ſich auch die größten Höhen, wodurch geworfene Körper über den Horizont erhoben werden können, wie die Quadrate der Sinuſſe der Erhöhungswinkel.

7.) Da auch, wie ebenfalls in der Geometrie erwieſen wird, der Querſinus des doppelten Winkels $= 2s^2$, wenn der Sinus des einfachen Winkels $= s$, und der ganze Sinus $= 1$: ſo folgt, daß

die größten Höhen ſowohl verſchiedener Parabeln, als geworfener Körper, wozu ſie über den Horizont gelangen, ſich verhalten wie die Querſinus der Erhöhungswinkel.

8.) Da alſo $P = cc$, und (Taf. XI. Fig. 3.) $nb = ss$, ſo iſt die Tangente des Erhöhungswinkels

$$EAO = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{nb}}{\sqrt{P}}.$$

§. 225.

Auch iſt leicht einzuſehen,

1.) **daß die Horizontalweite, die der mit einer gegebenen Geſchwindigkeit aus A geworfene Körper zurücklegt, alsdenn am größten, wenn der Erhöhungswinkel 45°.**

Denn da ſich die Horizontalweite verhält, wie der Sinus des doppelten Erhöhungswinkels. §. 224. 3. der Sinus aber des doppelten Erhöhungswinkels 45° der größte Sinus iſt, ſo muß auch alsdenn die Horizontalweite am größten ſeyn.

2.) Auch erhellt, **daß die Horizontalweiten gleichgros ſind, wenn man die Erhöhungswinkel bald kleiner, bald größer als 45°, doch beyderſeits von dem Winkel 45° gleichweit abſtehend nimmt.** Iſt z. B. der Erhöhungswinkel 30°, ſo iſt die Horizontalweite mit der unter dem

Winkel

Winkel 60° einerley. Denn der Sinus des doppelten erſtern Winkels iſt der Sinus von 60° und der Sinus des doppelten leztern Winkels der Sinus von 120°; dieſe beyden Winkel haben, als Nebenwinkel, einerley gemeinſchaftlichen Sinus.

§. 226.

Hieraus begreift man ferner folgendes:

1.) **Iſt die horizontale Länge des Wurfs unter dem Erhöhungswinkel 45°**, oder auch unter dem Erhöhungswinkel 15° bekannt, (denn die leztere Länge iſt die Hälfte der erſtern, weil ſin. 30° = ½ ſin. tot. oder ½ ſin. 90°,) **ſo findet man leicht aus dieſer gegebenen Länge die Horizontalweite unter jeden andern Winkel, woſern nur eben die Geſchwindigkeit des geworfenen Körpers in A vorausgeſezt wird.** Denn der ganze Sinus verhält ſich zum Sinus des doppelten Erhöhungswinkels, wie die Horizontalweite unter dem Winkel 45° zur geſuchten Weite unter einem andern Winkel.

2.) Eben ſo findet man dieſe Weiten für jeden Winkel aus einem andern Fall, oder aus der gegebenen Länge unter einem andern Winkel.

Erſtes Beyſpiel.

Wird eine Kugel aus einem, mit einer beſtimmten Menge Pulver geladenen Geſchütz, unter dem Winkel 15°, oder unter dem Winkel 45° geworfen, und iſt die Horizontalweite unter dieſem Winkel gegeben 1200'; ſo läßt ſich der Winkel finden, unter welchem die Kugel nur auf eine Weite von 800' geworfen wird. Denn ſoll der Körper in dieſer Weite in den Horizont eintreffen, ſo fragt ſichs, unter was

für einem Winkel das Geſchütz zu dem Ende erhöht werden muß. Es iſt aber

1200 : Sin. tot. = 800 : Sinus des doppelten Erhöhungswinkels.

Log. 800 = 2.9030900
+ Log. ſin. 90° = 10.

12.9030900
— Log. 1200 = 3.0791812

9.8239088, gehört zum Winkel 41°. 49′. Demnach muß das Geſchütz entweder unter dem Winkel 20°, $54\frac{1}{2}$′, oder unter dem Winkel 69°, $5\frac{1}{2}$′ erhöht werden, damit die Kugel die Weite im Horizont 800′ beſchreibt.

Zweytes Beyſpiel.

Bey einer gewiſſen Ladung des Geſchützes findet man die größte Horizontalweite des Schuſſes 2000′: man ſucht den Winkel, unter welchem die Axe des Geſchützes zu erhöhen, damit die geworfene Kugel in den Horizont in der Weite 1260′ eintrift.

2000 : Sin. tot. = 1260 : Sinus des doppelten geſuchten Winkels

Log. 1260 = 3.1003705
+ Log. ſin. 90° = 10.

13.1003705
— Log. 2000 = 3.3010300

9.7993405. Hierzu gehört der

der Winkel 90°. 3′. Daher die Axe des Geſchützes unter dem Erhöhungswinkel 19°, $31\frac{1}{2}$′, oder unter dem Winkel 70°, $28\frac{1}{2}$′ zu ſtellen.

§. 227.

Hieraus ſieht man, daß aus einem einzigen gegebenen Fall der Erhöhungswinkel gefunden wird, unter welchem der geworfene Körper in einen gegebenen Punkt des Horizonts, z. B. in O (Taf. XI. Fig. 3.) eintrift, wo auch dieſer Punkt angenommen wird, wofern nur ſeine Weite vom Punkt des Wurfs A die größte Horizontalweite unter dem Winkel 45° nicht überſteigt. Soll hingegen der geworfene Körper in einen, über dem Horizont erhöhten Körper FG im Punkt G eintreffen, wenn die Linie AFO horizontal: ſo verhält es ſich anders. Zur Auflöſung dieſer Aufgaben wollen wir folgendes bemerken:

Da der ganze Sinus ſich verhält zum Sinus des doppelten Erhöhungswinkels, wie der halbe Parameter zur Weite des Wurfs, §. 224. und der Sinus des doppelten Winkels 45° = ſin. 90° = ſin. tot. ſo iſt auch die größte Horizontalweite dem halben Parameter der Parabel gleich.

§. 228.

Daher ſchließt man auch aus der gegebenen größten Horizontalweite die Geſchwindigkeit, womit der Körper nach AE geworfen worden. Denn dieſe Geſchwindigkeit iſt allemal derjenigen gleich, die im Fall durch den vierten Theil des Parameters und daher durch die halbe größte Horizontalweite erlangt wird.

Denn heißt h die der Geſchwindigkeit, womit der Körper aus A geworfen wird, zugehörige Höhe, ſo iſt', weil der Körper im Fall durch einen Raum von 15 Fuß eine Geſchwindigkeit erlangt, womit er in einer Sekunde 30' zurücklegt, (§. 49.) $15 : 30^2 = h : v^2$, wenn v die Geſchwindigkeit in A, §. 48. Daher $v = \sqrt{60h}$. Es ſey nun at der Raum, wodurch der Körper in 1 Sek. fällt, $= 15' = Ac$, ſo iſt $p. Ac = ct^2 = Aa^2 = v^2 = 60h$, oder $60h = 15p$, daher $4h = p$, und $h = \frac{1}{4}p$.

Heißt aber A die größte Horizontalweite, ſo iſt $p = 2A$. Daher $h = \frac{1}{2}A$, oder die der Geſchwindigkeit, womit der Körper geworfen wird, zugehörige Höhe iſt der halben größten Horizontalweite gleich.

§. 229.

Eben dieſe Geſchwindigkeit, womit der Körper aus dem Punkt A geworfen wird, wird auch aus der Horizontalweite unter jedem gegebenen Erhöhungswinkel erkannt. Denn weil $p = \frac{a}{cs}$ §. 221. ſo iſt die der Geſchwindigkeit in A zugehörige Höhe $= \frac{a}{4cs}$. §. 228. Demnach verhält ſich dieſe Höhe zur halben größten Horizontalweite unter jedem Winkel, wie der ganze Sinus zum Sinus des doppelten Erhöhungswinkels.

§. 230.

Daher wird auch vermittelſt dieſer, der Geſchwindigkeit des Körpers in A zugehörigen Höhe geſunden, was ſchon vorhin beſtimmt worden. Man kann überall ſtatt $\frac{1}{4}p$ die Höhe h ſetzen. Hierbey wollen wir uns aber, da es für ſich einleuchtend, länger nicht aufhalten.

§. 231.

Zerlegt man die Geſchwindigkeit An nach der Richtung AE, $= \sqrt{60h}$, §. 228. in die horizontale Kn (Taf. XI. Fig. 6.) und in die vertikale KA; ſo iſt $1 : An = c : Kn$, für den ganzen Sinus $= 1$; daher die horizontale Geſchwindigkeit $= c. \sqrt{60h}$.

Die horizontale Bewegung aber iſt gleichförmig, §. 217. daher die Zeit der Bewegung $= \dfrac{a}{c\sqrt{60h}}$.

Aber a verhält ſich wie cs, folglich die Zeit wie $\dfrac{cs}{c}$, oder wie s, d. i. bey einerley Geſchwindigkeit des Wurfs verhalten ſich die Zeiten der horizontalen Bewegung unter verſchiedenen Neigungswinkeln, wie die Sinus dieſer Winkel.

§. 232.

Dies vorausgeſezt, wollen wir zeigen, wie aus der gegebenen Geſchwindigkeit in A (Taf. XI. Fig. 3,) der Erhöhungswinkel gefunden wird, unter welchem der Körper in den Punkt G in gege=

gegebener Entfernung AF vom Punkt A, und in der Höhe GF über den Horizont eintrifft. Zuerſt wollen wir erklären, wie dieſes durch Rechnung geſchieht.

Die Weite AF ſey $= d$, $GF = a$, die Tangente des Winkels $EAO = x$, ſo iſt $AF : FH = 1 : x$, wenn der ganze Sinus $= 1$; daher $HF = dx$. Auch iſt $HG = dx - a = AS$, und $SG^2 = AH^2 = AF^2 + FH^2 = d^2 + d^2x^2$. Daher, weil $p . AS = SG^2$, $d^2 + d^2x^2 = pdx - ap$, dieſe quadratiſche Gleichung aufgelößt giebt $x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp - pa - dd)}{d}$; daraus erhellet

1.) daß die Tangente für zwey Winkel gefunden wird, unter welchen der Wurf auf gleiche Art geſchehen kann, wo nicht $pp = 4pa + 4dd$; denn hier wird $x = \frac{\frac{1}{2}p}{d}$.

2.) Kann der Wurf allemal ſo geſchehen, daß der Körper auf den Gegenſtand trift, wofern nur $\frac{1}{4}pp$ nicht kleiner als $pa + dd$.

3.) Iſt aber $\frac{1}{4}pp < pa + dd$, ſo wird die Größe unter dem Wurzelzeichen verneint, und daher ihre Wurzel ſelbſt unmöglich.

4.) Liegt der Punkt G, worauf der Körper treffen ſoll, im Horizont ſelbſt, ſo wird $GF = a = 0$, und $x = \frac{\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}pp - dd)}{d}$.

§. 233.

§. 233.

Wir können nicht umhin, hier von einer andern Methode zu handeln, nach welcher das bisher ausgeführte, vermittelſt einer ſo netten als allgemeinen geometriſchen Verzeichnung gefunden wird.

Es ſey AF (Taf. XI. Fig. 4.) die gegebene Weite, und BF des Gegenſtandes, worauf der geworfene Körper treffen ſoll, Höhe über den Horizont; der aus A geworfene Körper ſelbſt bewege ſich durch die Linie ABG, ſo daß er den Horizont in G, FB aber in B triſt. Dies vorausgeſezt, braucht man die Natur der Kurve ABG nicht zu unterſuchen; man kann auf folgende Art zum Zweck gelangen:

1.) Suchet die **Geſchwindigkeit**, womit der Körper aus A zu werfen: dieſe wird entweder nach §. 228. oder auf eine andere beliebige Art gefunden, z. B. wenn man die ganze **größte Horizontalweite** AG durch die Zeit dividirt. Hieraus ergiebt ſich die horizontale **Geſchwindigkeit**, die ſich zur Geſchwindigkeit des geworfenen Körpers in A nach der Richtung des Wurfs verhält, wie der Koſinus des Erhöhungswinkels zum ganzen Sinus. §. 231.

2.) Aus der gefundenen Geſchwindigkeit beſtimmt die **Höhe** des Falles, wodurch dieſe Geſchwindigkeit erlangt wird, die entweder nach §. 228. oder nach §. 57. gefunden wird. Dieſe auf den verjüngten Maasſtaab gebracht, ſey AE.

3.) Auf eben den Maasſtaab traget die **Weite** AF des zu treffenden **Körpers** vom **Punkt** A; wie auch die **Höhe** dieſes **Körpers** BF. Setzet BF in F ſenkrecht auf AG, und ziehet die Linie AB.

4.) Ziehet

4.) Ziehet die der Geſchwindigkeit in A gefundenermaßen zugehörige Höhe AE in A ſenkrecht auf AG, wie auch in A ſenkrecht auf AB.

5.) Ziehet ferner ED mit dem Horizont AG parallel. Halbiret DA in c, und beſchreibet aus c mit dem Halbmeſſer cD den Halbkreis DEA, dieſer geht durch E, weil DEA ein rechter Winkel.

6.) Theilet AB in vier gleiche Theile, deren einer AK; in K ziehet KIH parallel mit AE. Dieſe Linie wird, wenn der Wurf möglich iſt, den Kreis DEA in zwey Punkten, I und H, ſchneiden; wo nicht beyde Punkte in einen zuſammenfallen, ſo daß KIH eine Tangente des Kreiſes in o wird, wie oR.

7. Ziehet endlich durch die Punkte I und H die Linien AI und AH, ſo ſind IAG und HAG zwey Winkel, unter deren einem die Axe des Geſchützes, oder die Richtung des Wurfs erhöhet werden muß, damit der nach AI oder nach AH geworfene Körper den Punkt B treffen kann. Dieſe Winkel laſſen ſich mit dem Transporteur meſſen.

Dieſes wird folgendergeſtalt erwieſen:

AE iſt die Fallhöhe, wodurch die Geſchwindigkeit in A erzeugt wird; daher dieſe Geſchwindigkeit = 2AE. Da aber mit eben dieſer Geſchwindigkeit die Linie AM in eben der Zeit zurückgelegt werden muß, worinn AB zurückgelegt wird, oder der Körper durch MB fallen kann, ſo iſt die Zeit durch MB = AM, weil bey gleichen Geſchwindigkeiten die Zeiten in der gleichförmigen Bewegung ſich verhalten, wie die zurückgelegten Räume. §. 13. Heißt alſo die Zeit durch AE, T, und durch MB, t, ſo iſt T : t = 2AE : AM. Aber dieſe Zeiten verhalten ſich auch wie die

Qua-

Quadratwurzeln der durchlaufenen Räume. §. 48.

Daher $4AE^2 : AM^2 = EA : MB$, und $AE^2 : \frac{AM^2}{4}$

$= EA : MB (= 4IK)$.

Mit dieſer aus der Natur des Falles hergeleiteten Gleichung iſt die, ſo aus unſerer geometriſchen Verzeichnung gefunden wird, einerley. Denn EIA, IKA ſind ähnliche Dreyecke, weil der Winkel der Sehne IA mit der Tangente AK gleich dem Winkel am Umkreis IEA auf eben dem Bogen IA, und überdies die Wechſelswinkel bey A und I, wegen den Parallelen EA und KI gleich ſind. Daher $EA : AI = AI : IK$, und $EA : IK = EA^2 : AI^2$, folglich auch $EA : 4IK$

$(= MB) = EA^2 : 4AI^2 \left(= \frac{AM^2}{4}\right)$.

Da alſo das, was aus der phyſiſchen Natur des Wurfs geſchloſſen wird, genau mit dem, was die geometriſche Verzeichnung lehrt, übereinſtimmt; ſo ſieht man, daß die Richtung nach AI richtig beſtimmt worden. Eben dieſes wird von der Richtung AH erwieſen.

§. 234.

Soll der Wurf ſo veranſtaltet werden, daß der Körper den Punkt G im Horizont trift, ſo fallen AB und AG, wie auch AD und AE zuſammen. Theilet daher die Linie AG in 4 gleiche Theile, ziehet AE ſenkrecht auf AG, und beſchreibet aus dem Mittel der Linie AE mit dem Halbmeſſer $\frac{1}{2}$AE den Halbkreis EIA.

EIA. Nehmet nun AK = $\frac{1}{4}$AG, und richtet das Loth KI im Punkt K auf. Schneidet dieſes Loth den Kreis in 2 Punkten I und H, oder berührt ihn; ſo ſind die Linien AI und AH die Richtungen des Wurfs.

§. 235.

Die Linie oR ſey vorhin beſtimmtermaßen gezogen, AR = $\frac{1}{4}$AB, und Ro berühre den Kreis in o, ohne ihn zu ſchneiden, ſo iſt der Winkel oAK = 45°, wie leicht erhellt. Denn coK = 90°, daher der Winkel, den die Sehne Qco (hier der Durchmeſſer) mit der Tangente macht, = $\frac{1}{2}$QAo = Ao = 90°. Folglich der Winkel oAK = 45°.

236.

Aus dem vorigen iſt bekannt, daß im Punkt I, wo der Kreis DIA den Schenkel AIM des Erhöhungswinkels MAG ſchneidet, IK = $\frac{1}{4}$MB, und AK = $\frac{1}{4}$AB; daher, wenn AB mit AG zuſammenfällt, IK = $\frac{1}{4}$MF, und AK = $\frac{1}{4}$AG. Hieraus folgt, daß aus dem gegebenen Erhöhungswinkel IAF nebſt der, der Geſchwindigkeit in A zugehörigen Höhe EA, ſich auch mittelſt geometriſcher Verzeichnung die Horizontalweite AG, und die größte Höhe des Wurfs, nebſt dem Parameter der Parabel finden, folglich die Parabel ABG beſchreiben läßt, wodurch ſich der geworfene Körper bewegt.

In der unbeſtimmten Linie AG (Taf. XI. Fig. 5.) die den Horizont andeutet, richtet im Punkt A, woraus der Körper zu werfen, die ſenkrechte Linie AB auf, gleich der, der Geſchwindigkeit in A zugehörigen Höhe. Beſchreibet über AB als Durchmeſſer

den

den Halbkreis BDA, und verzeichnet den Erhöhungswinkel HAG.

Hierauf fället aus dem Punkt D, wo der Kreis den Schenkel AH des Erhöhungswinkels ſchneidet, das Loth DL auf den Horizont AG; und nehmet ferner

1.) 4AL = AG, ſo iſt AG die ganze Horizontalweite.

2.) Fället aus D das Loth DI auf AB, verlängert ID in E, bis DE = DI, aus E fället wieder das Loth EF auf AG, ſo iſt EF die gröſste Höhe des Wurfs über den Horizont. Denn dieſe Höhe EF kömmt dem Punkt F zu, und fällt in die Mitte AG, und EF iſt = $\frac{1}{4}$HG.

3.) Da ferner E die horizontale Axe der Parabel beſtimmt, ſo iſt der Punkt E die Scheitel der Parabel, und EF ihre Axe. Daher läſst ſich aus E die Parabel beſchreiben, wenn nur der Parameter gegeben.

4.) Endlich da der Parameter der Axe EF gleich dem um 4EF verminderten Parameter p in A, und BA = $\frac{1}{4}$p. §. 228. ſo iſt der Parameter der Axe = 4(BI + IA) — 4IA = 4BI. Daher läſst ſich die Parabel beſchreiben.

§. 237.

Alles bisher vorgetragene hätte wirklich in der Natur Statt, wäre der Widerſtand der Luft nicht. Dieſe hindert und vermindert die Bewegung der geworfenen Körper, und zwar am meiſten, wenn die Geſchwindigkeit der Bewegung ſehr groſs iſt. In der Folge werden wir das Hauptſächlichſte bey dieſem

ſem Widerſtand der Luft betrachten. Doch lehren ſowohl Verſuche, als auf Beobachtungen gebaute Rechnung, daß in den Fällen, wo die Geſchwindigkeit der Kugeln nicht ſehr groß iſt, die Kugeln ſelbſt aber ſehr ſchwer ſind, wie bey Mörſern, die Bewegung von der Luft nicht ſo ſehr vermindert wird, daß die Verſuche von den bisher vorgetragenen Regeln merklich abweichen. Daher ſind ſie auch als die erſten Grundlehren zu betrachten, nach welchen die Richtung zu werfender Körper auch beym Widerſtand der Luft beſtimmt wird, obgleich noch andere hinzuzuſetzen, und der Widerſtand des Flüßigen überall, bey großer Geſchwindigkeit des Wurfs mit in Betracht gezogen werden muß.

Neunter Zuſatz.

Fortſetzung von der Bewegung geworfener Körper.

Inhalt.

Was in der vorhergehenden Vorleſung abgehandelt worden, wird hier weiter und allgemeiner entwickelt, und einige Anmerkungen beygefügt. §. 196 — 205.

---

§. 196.

Die Bewegung geworfener Körper läßt ſich aus der Lehre von den Centralkräften erläutern, und aus ihren Geſetzen berechnen. Vorzüglich wollen wir folgendes bemerken: Es ſey A (Taf. XI. Fig. 6.) der

der Punkt, von welchem der Körper nach der Richtung AE, der Tangente der Wurflinie (linea trajectoria) ABC im Punkt A, geworfen wird. Ferner ſey DAE der Winkel, den die Richtung des Wurfs mit der vertikalen DA macht, ſein Sinus heiſe s, Coſinus c. Setzet endlich die der Geſchwindigkeit in A zugehörige Höhe DA $= h$, die Linien AG nehmet für Abſciſſen, Gg für Ordinaten. Dies alſo vorausgeſezt, iſt die Geſchwindigkeit in jedem Punkt über AL, z. B. in I, $= \sqrt{(h-x)}$, und in jedem Punkt unter AL, wie g, $= \sqrt{(h+x)}$, wenn die Abſciſſen ſelbſt x heiſen. Und da der Punkt, gegen welchen die Centralkräfte drücken, d. i. der Mittelpunkt der Kräfte, unendlich weit entfernt angenommen wird, ſo ſind auch die in gleicher Zeit beſchriebenen Linien ga gleich, und zwar aus eben dem Grunde, wie §. 219. Vorl. Iſt alſo $Gg = y$, ſo iſt dy eine beſtändige Größe, und $ddy = o$: man nimmt aber die Zeitelemente oder dt beſtändig, und daher $ddt = o$.

§. 197.

Da alſo ſowohl dy als dt beſtändig, ſo bekommen wir, f unveränderlich geſezt, dieſe einfache Differentialgleichung, $dy = fdt$. Sezt man aber $gg = dS$, ſo iſt $dt = \frac{dS}{\sqrt{(x+h)}}$ für den Punkt g, und $dy = \frac{fdS}{\sqrt{(x+h)}}$.

In dieſer Gleichung muß aber die Größe f beſtimmt werden, die hernach in allen Punkten der

Kurve einerley und unveränderlich iſt. Man findet ſie ſehr leicht für den Punkt A, wo $x = 0$. Denn da in A, $dy = \frac{fds}{\sqrt{h}}$, und überdies $dS : dy = 1 : s$, wenn der ganze Sinus $= 1$ und das Element der Kurve $= dS$, ſo wird in A, $dy = s.dS$, daher $\frac{fdS}{\sqrt{h}} = sdS$, folglich $f = s\sqrt{h}$.

Da dieſe Größe beſtimmt, ſo geht die Gleichung $dy = \frac{fdS}{\sqrt{(x+h)}}$ in $\frac{s\sqrt{h}.dS}{\sqrt{(x+h)}} = dy$ über, daher $\frac{hs^2dS^2}{x+h} = dy^2$. Aber $dS^2 = dx^2 + dy^2$. Demnach

$$xdy^2 + hdy^2 = hs^2dx^2 + hs^2dy^2$$

———————————, u. daher

$$dy^2 = \frac{hs^2dx^2}{x+h(1-s^2)}.$$ Aber $1 - s^2 = c^2$,

daher $dy = \frac{s\sqrt{h}.dx}{\sqrt{(x+c^2h)}}$, folglich $y = 2s\sqrt{h}.\sqrt{(x+c^2h)} + B$.

Das Conſtans B wird aus der Gleichung in A für $x = 0$ beſtimmt. Hier iſt aber $y = 2sch$, und da y über AL beſtändig abnimmt, $B = + 2sch$. Daher allgemein $y = 2s\sqrt{h}.\sqrt{(x+c^2h)} + 2sch$, oder $y^2 - 4schy = 4s^2hx$.

§. 198.

§. 198.

Dieſe Gleichung drückt die Parabel aus, aber ſo, daß die Abſciſſen und Ordinaten nicht zu einander in der nämlichen Axe gehören. Um alſo dieſe Gleichung in eine andere gewöhnliche Form für die Axe zu verwandeln, iſt zu merken, daß für $x = o$, $y = 4sch = 2AL$; folglich $AL = 2sch$, und gM die Ordinate zur Axe $= y - 2sch$.

Ferner iſt die Linie BL zu beſtimmen. Nennt man alſo den Parameter p, ſo wird, weil $LM = x$, $p.BL + px = Mg^2 = y^2 - 4schy + 4s^2c^2h^2$; und da $y^2 - 4schy = 4s^2hx$. §. 197. ſo iſt $p.BL + px = 4s^2hx + 4s^2c^2h^2$. Vergleicht man die Glieder dieſer Gleichung mit einander, ſo folgt

1.) $px = 4s^2hx$, daher der Parameter zur Axe der Parabel $p = 4s^2h$.

2.) $p.BL = 4s^2c^2h^2 = pc^2h$, daraus erhellt, daß dies die größte Höhe, die der Wurf über den Horizont erreichen kann, oder $BL = c^2h$.

3.) Sezt man den Anfang der veränderlichen Größen in die Scheitel der Parabel, oder in die horizontale Tangente in B; ſo iſt die Gleichung für die Parabel $pz = vv$, wenn $z = x + c^2h$, und $v = y - 2sch$. Iſt aber der Anfang der Größen x und y in der vorigen Stelle, ſo iſt auch $4s^2hx = y^2 - 4schy$: denn der Anfang der Abſciſſen x war dort in der Weite c^2h von der Scheitel der Parabel.

§. 199.

Hieraus ſchließt man auch, daß bey beſtändigem h der Parameter der Axe der Parabel $p = 4s^2h$

im Verhältnis des quadrirten Coſinus des Erhöhungswinkels veränderlich iſt.

§. 200.

Auch iſt $BL = c^2h$. Demnach ſind bey einerley Geſchwindigkeit unter verſchiedenen Erhöhungswinkeln die größten Höhen den quadrirten Sinuſſen der Erhöhungswinkel proportional. Bey veränderlicher Geſchwindigkeit aber und gleichen Erhöhungswinkeln verhalten ſich dieſe Höhen wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten.

§. 201.

Was aber die Zeit betrift, ſo haben wir $dy = s\sqrt{h}.dt$, daher $y = ts\sqrt{h}$, folglich die ganze Zeit t

$$= \frac{4sch}{s\sqrt{h}} = 4c\sqrt{h}.$$

§. 198. Demnach verhält ſich bey einerley Geſchwindigkeit die Zeit, worinn die Bewegung über den Horizont geſchieht, wie die Sinus der Erhöhungswinkel.

§. 202.

Und da dt ſich verhält wie dy, §. 197. ſo erhellt, daß gleiche horizontale Räume in gleichen Zeiten zurückgelegt werden, folglich iſt die horizontale Bewegung gleichförmig.

§. 203.

$2AL = 4sch$. Daraus folgt

1.) Bey einerley Geſchwindigkeiten verhalten ſich die Horizontalweiten unter verſchiedenen

Erhö-

Erhöhungswinkeln wie die Sinus der doppelten Erhöhungswinkel, d. i. wie 2sc.

2.) **Bey einerley Erhöhungswinkeln verhalten ſich die mit verſchiedenen Geſchwindigkeiten beſchriebenen Horizontalweiten, wie die Quadrate dieſer Geſchwindigkeiten.**

3.) Sind ſowohl die Erhöhungswinkel, als die Geſchwindigkeiten verſchieden, ſo ſtehen die Horizontalweiten im zuſammengeſezten Verhältnis aus dem Verhältnis des Sinus des doppelten Erhöhungswinkels, und aus dem Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeiten.

§. 204.

Es ſey in o der Brennpunkt der Parabel, ſo iſt aus der höhern Geometrie bekannt, daß $oB = \frac{1}{4}p = s^2h$; und überdies jede Linie wie $op = Bq + Bo = s^2h + c^2h - x = h - x = DK$. Hieraus erhellet, **daß die vom Brennpunkt der Parabel nach jedem Punkt der Kurve gezogenen Linien die Fallhöhen ſind, wodurch die Geſchwindigkeit in dieſem Punkt erlangt werden kann.**

§. 205.

Hieraus ſieht man auch, wie aus dem gegebenen Parameter die Parabel zu beſchreiben, und noch mehreres daraus herzuleiten. Da aber das bisher Vorgetragene für unſern gegenwärtigen Zweck hinreichend iſt, ſo wollen wir uns dabey länger nicht aufhalten.

Vierzehnte Vorleſung.

Von der
Bewegung in widerſtehenden Mitteln.

Inhalt.

§. 238. 239. Der von der Materie des Flüßigen abhängende Widerſtand verhält ſich wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten. §. 240. Hingegen der von der Zähigkeit der Theile, wie die Geſchwindigkeit des bewegten Körpers ſelbſt. §. 241. 242. Erſterer Satz ſtimmt mehr mit der Erfahrung bey großer Geſchwindigkeit des bewegten Körpers; lezterer bey geringer Bewegung; keiner aber genau mit den Beobachtungen überein. §. 243 — 253. Hauptregeln der Bewegung in Flüßigkeiten bey erſterer Vorausſetzung, und zwar 1.) wenn Körper ſich blos mit ihrer Geſchwindigkeit fortbewegen, und keine andere Kraft wie die Schwere vorhanden. 2.) Wenn Körper zugleich von der Schwere getrieben ſteigen. 3.) Wenn Körper fallen. §. 254. 255. Verſchiedene Größe des Widerſtands in dichtern oder dünnern Flüßigkeiten, und deſſen Wirkungen auf größere und kleinere Maſſen. Ueberall iſt dieſe Bewegung von der freyen ungehinderten Bewegung verſchieden, welches auch beym Fall durch krumme Linien Statt findet. Die Gleichzeitigkeit in der Radlinie iſt bey gehinderter Bewegung nicht anzutreffen.

§. 238.

Wir wollen hier nicht jeden Widerſtand flüßiger Körper abhandeln. Dies gehört in die Hydraulik. Doch müſſen wir etwas von den Kräften und Urſa-

chen

chen vortragen, wodurch Flüßigkeiten die Bewegung und Geſchwindigkeit der Körper hindern und vermindern. Denn alle Bewegungen, die wir hier in unſern Gegenden wahrnehmen, geſchehen in ſolchen flüſſigen Weſen; und es liegt alſo viel daran, zu wiſſen, wie weit ſich das, was von der freyen ungehinderten Bewegung bisher vorgetragen und erwieſen worden, in der Ausübung anwenden läßt. Zu dem Ende bemerken wir, daß ſich bey Flüßigkeiten verſchiedene und nach ihrer verſchiedenen Beſchaffenheit mehrere Urſachen angeben laſſen, wovon jede der Bewegung zu widerſtehen, und ſie zu hindern vermag. Hiervon wollen wir in gegenwärtigem nur zwo betrachten: Die eine entſteht von der bloßen Trägheit flüßiger Körper; die andere vom Zuſammenhang ihrer Theile, die man mit dem Namen der Zähigkeit zu unterſcheiden pflegt. Auch ſind uns ſonſt keine dergleichen Urſachen hinlänglich bekannt.

§. 239.

Was die Trägheit flüßiger Körper betrift, ſo iſt leicht einzuſehen, daß ſelbige, wenn nicht zugleich eine andere widerſtehende Kraft vorhanden, einen Widerſtand erzeugt, der ſich verhält wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, womit die bewegten Körper auf die Theile der flüßigen Materie ſtoßen. Denn es iſt einerley, ob der Körper gegen das Flüßige, oder das Flüßige gegen den Körper ſich bewegt; man nehme alſo an, das Flüßige ſtoße auf den ruhenden Körper mit doppelter Geſchwindigkeit, ſo iſt auch die Menge der in gleicher Zeit anſtoßenden flüßigen Theilchen doppelt ſo groß.

Daher muß die in einer unendlich kleinen Zeit wirkende Kraft des Stoßens, oder der ganze Druck, der ſich verhält wie die Maſſe in die Geſchwindigkeit multiplicirt, §. 26. ſich verhalten, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, weil auch die anſtoßende Maſſe der Geſchwindigkeit proportional. Demnach verhält ſich der von der bloſen Trägheit flüßiger Körper erzeugte Widerſtand der Bewegung, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit.

§. 240.

Betrachten wir den andern Widerſtand, der von der Zähigkeit, oder von der Kraft, womit die Theile des Flüßigen zuſammenhängen, entſteht, ſo bleibt dieſer gewiß einerley, ſo lange die Geſchwindigkeit des Körpers einerley bleibt, folglich iſt er der Zeit proportional. Bey ungleicher Geſchwindigkeit aber wird er mit der Geſchwindigkeit in gleichem Verhältnis ſtehen. Denn bey doppelter Geſchwindigkeit iſt die Menge der in eben der Zeit von dem bewegten Körper zu trennenden flüßigen Theilchen doppelt ſo groß, bey dreyfacher Geſchwindigkeit dreymal ſo groß u. ſ. f.

§. 241.

Die zur Beſtätigung angeſtellten Verſuche lehren, daß bey großer Geſchwindigkeit und großer Maſſe des bewegten Körpers der Widerſtand flüßiger Körper ſich nach einem Verhältnis richtet, das von dem Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten ſehr wenig abweicht. Denn iſt die Kraft, womit die Theilchen flüßiger Körper zuſammenhängen, ſehr gering, ſo iſt der daher ent-

entſtehende Widerſtand in Vergleichung mit dem, bey ſehr groſer Geſchwindigkeit von der Trägheit erzeugten, faſt für nichts zu achten. **Bey langſamern Bewegungen hingegen ſcheint ſich der Widerſtand nach dem Verhältnis der Geſchwindigkeiten zu richten.** Denn hier iſt der erſtere, von der Trägheit entſpringende Widerſtand unmerklich, und bey ſehr langſamen Bewegungen beynahe ganz auſer Acht zu laſſen.

§. 242.

Ob ſich dies gleich ſo verhält, ſo **iſt doch das wahre Geſetz des Widerſtands der Luft, und überhaupt der Flüßigkeiten in der Natur, ſehr ſchwer zu beſtimmen.** Auſer Zweifel iſt es zwar, daß die vorgetragenen Geſetze der Wahrheit nahe kommen; doch ſtimmen die daraus hergeleiteten Folgen mit den Beobachtungen nicht ſo überein, als wenn die Vorausſetzungen völlig richtig wären. Aus dieſem Grunde muß man geſtehen, daß das Geſetz des Widerſtands flüßiger Körper noch nicht genau genug beſtimmt iſt. Dieſe Schwierigkeit iſt noch größer, wenn die Dichtigkeit der flüßigen Materie nicht überall gleich, ſondern in verſchiedenen Schichten derſelben verſchieden iſt, wie wir an der Luft wahrnehmen. Hier iſt es nicht genug, daß das Verhältnis des Widerſtands zur Geſchwindigkeit bekannt iſt; man muß auch wiſſen, in welchem Verhältnis der Widerſtand in den verſchiedenen Schichten nach der verſchiedenen Dichtigkeit der Materie ab- oder zunimmt. Sind aber gleich dieſe Geſetze bisher noch nicht bekannt genug, ſo lehren doch Verſuche, daß in geringen Entfernungen und bey großer Geſchwin-

Geſchwindigkeit des bewegten Körpers, der im Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten angenommene Widerſtand dem wahren Widerſtande der Luft nahe kommt.

§. 243.

Setzet alſo, die widerſtehende flüßige Materie ſey überall gleich dicht, erzeuge folglich bey gleicher Geſchwindigkeit des bewegten Körpers überall gleichen Widerſtand; ſo kommen hier verſchiedene beſonders zu betrachtende Fälle vor. Nehmet zuerſt den einfachſten, wo der im Flüßigen bewegte Körper ſich blos mit ſeiner Geſchwindigkeit fortbewegt, und nicht von andern Kräften getrieben wird. So erhellt unter dieſer Vorausſetzung, daß die Bewegung des Körpers vom Widerſtand des Flüßigen beſtändig vermindert wird; und nimmt man ihn unveränderlich und überall der natürlichen Schwere gleich an, ſo muß wegen dem Widerſtand des Flüßigen die Geſchwindigkeit des Körpers auf eben die Art und in eben dem Verhältnis verlohren gehen, wie dieſes bey der Bewegung mit einer gegebenen Geſchwindigkeit ſteigender Körper geſchieht. Und alsdenn kann der Raum, den der Körper im Flüßigen mit ſeiner Geſchwindigkeit zurücklegt, nicht größer ſeyn, als der Raum des Falles, wodurch die Geſchwindigkeit, womit er ſeine Bewegung begann, zu erlangen iſt.

§. 244.

Nimmt man aber den Widerſtand dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportional, ſo kann die Bewegung im widerſtehenden Flüßigen, welches wirklich widerſinnig, nur in einem unendli-

endlichen Zeitraum, und nach zurückgelegten unendlichen Weg gänzlich aufhören, Dies lehrt die Rechnung. *) Gleiches hat auch überhaupt Statt, wenn der Widerſtand ſich verhält wie eine Dignität der Geſchwindigkeit, die größer, als die zweyte: ja was noch mehr, auch in dem Fall, wo der Widerſtand in gleichem Verhältnis mit der Geſchwindigkeit ſteht, wird die Geſchwindigkeit nur in unendlicher Zeit ganz zerſtört, obgleich der Weg endlich ſeyn kann. Die Zeit, worinn die ganze Geſchwindigkeit verlohren geht, iſt niemals endlich, als nur, wenn der Widerſtand ſich nach einer Potenz der Geſchwindigkeit richtet, die kleiner iſt als ihre Quadratwurzel. **)

§. 245.

Dies ſtimmt zwar mit den Verſuchen nicht allerdings überein: doch ſind deswegen jene Hypotheſen nicht als ſchlechterdings unnütz zu verwerfen; auch weichen ſie von dem wahren Naturgeſetz nicht ſo ſehr ab, daß ſich nichts aus ihnen ſchlieſen und anwenden läßt. Die Urſache, warum die Geſchwindigkeit in obigen Fällen nicht ganz verlohren geht, iſt, weil der Widerſtand bey ſehr verminderter Geſchwindigkeit verſchwindet. Aber in der Luft iſt es auch ſchwer zu beſtimmen, was erfolgen würde, wenn ein mit der Luft gleich ſchwerer Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit durch dieſes Flüßige ſich bewegte, und nicht zugleich von andern Kräften getrieben würde; ob dieſer Körper mit ſeiner Geſchwindigkeit durch

*) S. Zuſ. §. 208. 209.

**) Wird alles Zuſ. §. 209—220. erwieſen.

durch einen unendlichen Raum ſich bewegen würde, oder nicht? Im Waſſer hingegen und andern dichtern Flüßigkeiten dauert, vermöge der Erfahrung, die Bewegung bewegter Körper, die mit den Flüßigkeiten einerley eigenthümliche Schwere haben, nicht durch einen unendlichen Raum fort, ſondern verliert ſich vielmehr gänzlich in kleinen Räumen. Stimmt dieſes gleich mit der Theorie §. 244. nicht überein, ſo lehrt doch eben die Rechnung, *) nach welcher die Bewegung ins Unendliche dauert, ſo lange die Dichtigkeit des Flüßigen und der zurückgelegte Raum endlich ſind, daß in ſehr dichten Materien die Geſchwindigkeit nicht blos in endlichen, ſondern in ſehr kleinen Räumen vernichtet wird.

§. 246.

Bey ſolchen Rechnungen muß man, welches auch bey andern mit großem Vortheil geſchieht, die Kräfte der Widerſtände auf eine beſtimmte Einheit bringen. Da uns keine Kraft bekannter als die Schwere, ſo läßt ſich der Widerſtand durch dieſe am beſten beſtimmen. Es heiſe $\sqrt{c}$ die Geſchwindigkeit, womit, wenn ſich der Körper in dem überall gleichförmigen und gleichdichten Flüßigen bewegt, der Widerſtand der Schwere gleich iſt; jede andere unbeſtimmte Geſchwindigkeit heiſe $\sqrt{z}$. Ferner verhalte ſich der Widerſtand des Flüßigen wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten. So iſt der, jerder andern Geſchwindigkeit zukommende Widerſtand $\frac{gz}{c}$, weil $c : g = z$ zu dieſem unbeſtimmten Widerſtand.

*) S. Zuſ. *. 210.

§. 247.

Hieraus erhellt, daß die Größe c deſto kleiner, je größer die Dichtigkeit der Materie, was für ein Geſetz des Widerſtands wir auch annehmen; deſto größer hingegen, je dünner das widerſtehende Flüßige. Daher verſchwindet in unendlich dünnen Flüßigen $\frac{gz}{c}$, oder der Widerſtand, da hier c gegen g und z unendlich groß. Hieraus iſt auch klar, daß in der Luft, wo c gewiß ſehr groß, $\frac{gz}{c}$ beynahe $= 0$, wenn die Bewegung langſam, oder z ſehr klein. Daher iſt auch der von der Trägheit erzeugte Widerſtand dort für nichts zu achten. Ganz anders verhält es ſich aber, wenn z ſehr groß; denn alsdenn iſt das Verhältnis $z : c$ endlich.

§. 248.

Iſt hingegen die Dichtigkeit der flüßigen Materie ſehr groß, ſo verſchwindet c beynahe, folglich wird $\frac{gz}{c} = \frac{1}{0} = \infty$. Daher der Widerſtand unendlich groß, die Bewegung des Körpers hört in einem kleinen Raum auf, und in kurzer Zeit iſt die ganze Geſchwindigkeit verloren; wo ſie nicht vielleicht ſchon vom Anfang der Bewegung an unendlich groß war. Demnach muß in ſehr dichten Flüßigkeiten bey endlicher

licher Geſchwindigkeit des bewegten Körpers, die geradlinigte Bewegung in kurzer Zeit aufhören.

Ueberhaupt wird die Bewegung deſto weniger vermindert, je dünner das Flüßige, wodurch ſich der Körper bewegt, wenn das übrige gleich, und je dichter dieſes, deſto mehr. Dies iſt aus dem geſagten klar.

§. 249.

Ferner kommen auch bey der durch den Widerſtand des Flüßigen gehinderten geradlinigten Bewegung zwey andere ſehr wohl in Acht zu nehmende Stücke vor. Das eine, wenn ſchwere Körper ſich niederwärts bewegen, und die Schwere die Bewegung vermehrt, der Widerſtand des Flüßigen hingegen ſie hindert und verringert. Die Schwere heiſe hier wie vorhin g, ſo iſt die ganze niederwärts beſchleunigende Kraft $= g - \frac{gz}{c}$. Da aber z vom Anfang der Bewegung an beſtändig wächſt, ſo wird $\frac{gz}{c}$ beſtändig vermehrt, und daher die beſchleunigende Kraft $g - \frac{gz}{c}$ nach und nach immer kleiner. Hieraus erhellt, daß die Geſchwindigkeit hier beym gehinderten Fall nie ſo groß werden kann, als beym freyen. Denn iſt $z = c$, ſo iſt die Geſchwindigkeit am größten, und die beſchleunigende Kraft

ver-

verſchwindet; von dieſem Augenblick an iſt die Bewegung gleichförmig, wie ſie ſeyn würde, wenn weder die Schwere ſtößt, noch das Flüßige widerſteht. Denn die widerſtehende Kraft und die Schwere, die, wenn $z = c$, einander gleich, zerſtören ſich gegenſeitig.

§. 250.

Demnach iſt im Fall durch eine widerſtehende flüßige Materie nicht jede Geſchwindigkeit, die auch größer, als eine beſtimmte, zu erlangen; wenn gleich der Fall durch unendliche Zeiten fortdauert, und die Höhe, wodurch der bewegte Körper fällt, unendlich groß iſt. Die daraus hergeleiteten Folgen *) ſind nicht minder widerſinnig, als die, deren oben §. 244. Meldung geſchehen. Denn die Rechnung lehrt, daß, wenn der Widerſtand ſich verhält wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, der durch das Flüßige fallende Körper jene größte, obgleich endliche Geſchwindigkeit nur nach zurückgelegten unendlichen Weg und in unendlicher Zeit erlangt. Daher wird auch dieſe Bewegung nur nach unendlicher Zeit gleichförmig; und vor dieſer Zeit der Widerſtand der Schwere nicht gleich. Hiervon iſt die Urſache, weil, wenn der Widerſtand der Gleichheit mit der Schwere ſehr nahe kommt, die Zunahme der Bewegung durch einen, obgleich ſehr großen Raum, ſehr klein werden.

§. 251.

Auch ſieht man, daß der Anfangs mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit im Flüßigen fallende Kör-

*) S. Zuſ. §. 221 — 230.

per, ſogleich im erſten Augenblick einen merklichen Theil ſeiner Geſchwindigkeit verlieren kann. Dieſes geſchieht, wenn die anfängliche Geſchwindigkeit des Körpers ſehr groß iſt, ſo daß der Widerſtand gleich Anfangs größer als die, die Bewegung vermehrende Schwere; welches allemal Statt findet, wenn die Geſchwindigkeit, womit der Körper anfängt zu fallen, größer als die größte Geſchwindigkeit, die durch den Fall im Flüßigen erlangt werden kann. Denn alsdenn iſt der, dieſer Geſchwindigkeit entſprechende Widerſtand größer, als die Schwere, wodurch der Körper niederwärts getrieben wird.

§. 252.

Daher iſt der **Fall der Körper in widerſtehenden Flüßigkeiten vom freyen ungehinderten Fall**, den wir in vorigem betrachtet haben, **weit verſchieden**. Auch iſt hier die Geſchwindigkeit den Quadratwurzeln der zurückgelegten Höhen nicht proportional, wo man nicht vielleicht den einzigen Fall ausnimmt, da die Dichtigkeit der widerſtehenden Materie ſehr gering, und zugleich die Höhe, wodurch der im Anfang der Bewegung keine Geſchwindigkeit habende Körper fällt, ſehr klein und in Vergleichung mit der, der Geſchwindigkeit, welcher in der Bewegung durch die Luft ein der Schwere gleicher Widerſtand entſpricht, zugehörigen Höhe ganz auſer Acht zu laſſen. Dies iſt auch der Grund, warum die von der freyen Bewegung in vorigem erwieſenen Regeln, in der Ausübung ſich noch einigermaßen beybehalten, und in der Maſchinenlehre befolgen laſſen, obgleich die Luft den Bewegungen der Maſchinen überall und allemal Widerſtand entgegenſezt. Denn

hier

hier finden ſich faſt überall jene Bedingungen. Ganz anders verhält es ſich aber beym Fall und Bewegung durch größere Höhen: hier hinken die Regeln der freyen Bewegung.

§. 253.

Das zweyte, was bey der gehinderten geradlinigten Bewegung zu betrachten, kommt vor, wenn Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit aufwärts ſteigen. Denn hier wird ihre Bewegung nicht nur von der widerſtehenden Kraft des Flüßigen, ſondern auch von der Schwere vermindert, die niederwärts, folglich in einer, der Bewegung des Körpers entgegengeſetzten Richtung wirkt, wenn, wie man annimmt, das Steigen in der Vertikallinie geſchieht. Hier iſt alſo die ganze hindernde Kraft

$$= g + \frac{gz}{c}.$$

Hieraus erhellt, daß das gehinderte Steigen durch ein widerſtehendes Flüßiges nicht gleich dem Fall, wodurch die Geſchwindigkeit, womit der Körper zu ſteigen anfängt, erlangt wird, wie beym freyen Fall und Steigen. Denn bey gehinderter Bewegung muß ſowohl die Zeit des Steigens, als die Höhe, wozu der ſteigende Körper gelangt, kleiner ſeyn, als die Zeit des Falles, und die im Fall zurückgelegte Höhe. Man nimmt aber, wie geſagt, die Geſchwindigkeit des Körpers am Ende des Falles und im Anfange des Steigens gleichgros an.

§. 254.

Dieſer Unterſchied aber iſt deſto größer, je dichter, und deſto kleiner, je dünner die widerſtehende Materie. Im' leztern Fall iſt die Größe $\frac{gz}{c}$ kleiner, im erſtern größer.

§. 255.

Ferner wird auch die Geſchwindigkeit des Körpers von der widerſtehenden Kraft des Mittels weniger vermindert, wenn der Körper ſchwerer, als wenn er bey gleicher Oberfläche leichter, das übrige aber gleich iſt. Denn hat der Körper eine größere Maſſe, ſo iſt die Größe ſeiner Bewegung, oder das Produkt aus der Geſchwindigkeit in die Maſſe §. 27. größer. Haben auch die Körper einerley eigenthümliche Schwere, d. i. unter gleichem Umfang gleiches Gewicht, und ungleiche Größe, ſo müſſen die kleinern ihre Bewegung eher verlieren, als die größern. Denn der Widerſtand verhält ſich wie die Oberflächen, d. i. wie die Quadrate der Durchmeſſer: die ganze Kraft des Körpers aber, ſo weit ſie von der Maſſe abhängt, wie ihre körperlichen Räume, oder wie die Würfel der Durchmeſſer.

§. 256.

Nicht minder iſt der durch des Flüßigen Widerſtand gehinderte **Fall durch krumme Linien, vom freyen Fall im leeren Raum verſchieden.** Hier iſt vorzüglich folgendes, das beym Fall vorkommt, zu merken: **Fällt der Körper durch die krumme Linie**

nie AB, (Taf. XII. Fig. 1.) deren horizontale Tangente in B; ſo wächſt die Geſchwindigkeit des Körpers nicht durch die ganze Linie AB bis zum Punkt B; ſondern nur bis zu einem Punkt L, wo der Widerſtand ſich zur Schwere verhält, wie der Coſinus des Winkels, den die Tangente in dieſem Punkte mit der Vertikallinie macht, zum ganzen Sinus. (Zuſ. §. 280.)

257.

Es erhellt alſo, wie man auch aus dem, was wir vom Fall in geraden Linien §. 247. ſ. f. geſagt haben, abnimmt, daß die Bewegung durch ſchiefe Linien in widerſtehenden Mitteln von der freyen Bewegung weit verſchieden, wo nicht vielleicht die Dichtigkeit des Mittels unendlich klein, und zugleich die Länge des Falles in Vergleichung mit der, der Geſchwindigkeit, der ein der Schwere gleicher Widerſtand entgegengeſezt iſt, zugehörigen Höhe beynahe nichts iſt. *) Unter den hier vorkommenden Fällen, iſt keiner größerer Aufmerkſamkeit würdig, als der, wo der Fall in der Radlinie geſchieht. Denn in Flüßigkeiten, die im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit widerſtehen, geht die Gleichzeitigkeit dieſer Kurve völlig verloren; **) und die Zeiten hängen hier von der Länge der Bogen ab, ſo daß der Fall durch mehrere ungleiche Bogen nie in gleicher Zeit geſchieht, als nur in dem einzigen Fall, da dieſe Bogen ſehr klein ſind. Doch laßt uns daher nicht auf Unrichtigkeit der eben vorgetragenen, in der Radlinie angeſtellten Verſuche, und der daraus hergeleiteten Beweisgründe für die

*) Zuſ. §. 289 — 299.
**) Zuſ. §. 305 — 308.

Geſetze der Schwere ſchlieſen. Denn in dieſen Verſuchen iſt die Geſchwindigkeit ſehr gering, daß alſo der von der Trägheitskraft entſtehende Widerſtand der Luft, der ſich verhält wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, hier nichts hindern kann. §. 247. Auch macht der von der Zähigkeit des Flüßigen erzeugte Widerſtand dieſe Verſuche nicht zweifelhaft. Geht gleich durch den Widerſtand im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit die Gleichzeitigkeit der Radlinie verloren, ſo erhält ſie ſich doch, wenn der Widerſtand der Geſchwindigkeit ſelbſt proportional iſt, nach welchem Geſetz ſich der Widerſtand von der Zähigkeit der Theile richtet; ſo wie auch in den Fällen, wo der Widerſtand für unveränderlich zu halten. *)

§. 258.

Auch die krummlinigte Bewegung iſt im widerſtehenden Flüßigen ganz anders, als im leeren Raume. Werden z. B. Körper von Kräften, die nach Art der Schwere in gleichlaufenden vertikalen Richtungen drücken, niederwärts getrieben, ſo iſt die Kurve, die die geworfenen Körper beſchreiben, eine von der Parabel weit verſchiedene Linie. Denn dieſe Linie iſt in ſehr dünner, im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit wiederſtehender Luft, eine Kurve der dritten Ordnung: und dieſe nähert ſich nur der wahren Linie geworfener Körper; ſoll ihre Bahn genauer beſtimmt werden, ſo muß man eine Linie der vierten Ordnung annehmen. Auch giebt

*) Newton's Princ. Phil. nat. math. Lib. 2. Sect. VI. Prop. 26.

giebt es unter Linien von allen Ordnungen einige algebraiſche Kurven, die wenigſtens der Wurflinie, ſo die im widerſtehenden Mittel geworfenen Körper beſchreiben, ſehr nahe kommen: und dieſe Linien ſind immer höherer Ordnungen, je größer die Dichtigkeit des Mittels angenommen wird. Es iſt nicht zu läugnen, daß, was von der Bewegung geworfener Körper in der Parabel geſagt werden, mit den Verſuchen nicht übereinſtimmt, wo nicht vielleicht die geworfenen Körper ſehr ſchwer, und ihre Geſchwindigkeit gering iſt. Bey dieſer Annahme kommt die Parabel der wahren Bahn geworfener Körper näher; doch, müſſen wir geſtehen, iſt ſie von der wahren Wurflinie noch weit entfernt; durch eine Kurve der vierten Ordnung läßt ſie ſich näher und genauer beſtimmen.

§. 259.

Was andere von andern Centralkräften erzeugte krummlinigte Bewegungen betrift, ſo kommt hier viel merkwürdiges vor, das zum Theil von neuern Geometern ausgeführt und erwieſen worden; vieles aber, das noch in dieſer Materie zu ſagen, haben die gelehrteſten Männer nicht einmal berührt. Auch iſt dies nicht unnütz. Muß man gleich bey Entwicklung der Geſetze dieſer gehinderten Bewegungen Hypotheſen brauchen; ſo hindert dies doch nicht, daß die Sache ſelbſt nicht von der größten Wichtigkeit in der Naturlehre und in allen Theorien, die zur Kenntnis der wahren Naturgeſetze gehören. Z. B. iſt zu folge des vorhergehenden auſer Zweifel, daß die Planeten, wenn ſie ſich im leeren Raum bewegen, von Centralkräften, mit den oben angegebenen Ei-

genſchaften verſehen, gereizt werden müſſen; folglich muß es eine allgemeine Schwere in der Welt, wenigſtens in unſerm Sonnenſyſtem geben. Doch folgt daraus nicht, daß eben die Bahnen, die die Planeten am Himmel beſchreiben, nicht auch Statt haben können, wenn ſich dieſe Körper in einem widerſtehenden Flüßigen bewegen, wofern nur andere Kräfte in der Welt zu finden. *) Demnach iſt die Kenntnis des Widerſtands von der größten Wichtigkeit bey Erforſchung der natürlichen Kräfte, und leitet zu eben ſo ſchweren, als nützlichen und fruchtbaren Unterſuchungen in der Naturwiſſenſchaft.

**) S. Zuſ. §. 283 — 285.

Zehnter Zuſatz.

Vom Widerſtand der Mittel, wodurch ſich Körper bewegen.

Erſter Theil.

Von der geradlinigten Bewegung in widerſtehenden Mitteln.

Inhalt.

§. 207 — 220. Regeln der geradlinigten Bewegung im überall gleichdichten Mittel, wenn der Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit bewegt, und von keiner andern Kraft gereizt wird. §. 208. Die Geſchwindigkeit geht hier nur in unendlicher Zeit, und nach zurückgelegten unendlichen Weg verloren. §. 209 — 213. Vom Widerſtand in größern Verhältnis als des Quadrats

drats der Geſchwindigkeit, §. 214. 215. Die Geſchwindigkeit des Körpers verliert ſich ganz durch einen endlichen Raum, wenn der Widerſtand ſich verhält wie die Geſchwindigkeit, oder wie eine Dignität der Geſchwindigkeit, die kleiner als 1. §. 216 — 220. Zeit der Bewegung überhaupt bey jeglichen Geſetzen des Widerſtands; wo ſie unendlich, wo endlich? §. 221. bis 231. Natur des Falles im Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit, das im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit widerſteht. §. 223. 224. Gröſte Geſchwindigkeit, die durch den Fall zu erlangen. §. 228. Fall, wenn die Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit anfangen, ſich zu bewegen. §. 229 — 231. Zeit des Falles, der Körper mag im Anfang eine Geſchwindigkeit beſitzen, oder nicht. §. 232 — 244. Steigen im widerſtehenden Mittel. §. 234. ff. Geſchwindigkeit. §. 237 — 239. Zeit. §. 244 — 248. Geradlinigte Bewegung im Mittel, das nicht überall gleichdicht. §. 249 — 256. Geradlinigte Bewegung im widerſtehenden Mittel, wenn die Körper zugleich von Centralkräften getrieben werden.

---

§. 206.

Aus dem, was in vorhergehender Vorleſung abgehandelt worden, erhellt, daß hier drey, beſonders zu erwägende Stücke bey der geradlinigten Bewegung durch widerſtehende Mittel vorkommen.

a) Bewegen ſich die Körper im widerſtehenden Mittel blos mit ihrer Geſchwindigkeit in gerader Linie, und werden ſonſt von keinen andern Kräften getrieben.

b) Fallen die Körper im widerſtehenden Mittel, von gewiſſen Kräften getrieben. Auch können die Körper bereits mit einer Geſchwindigkeit verſehen, oder ruhend den Fall beginnen.

c) Steigen die Körper mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit im widerſtehenden Mittel, indeß ſie von beſchleunigenden Kräften niederwärts getrieben werden.

Laßt uns das merkwürdigſte in allen dieſen Fällen kürzlich aus einander ſetzen, und zwar ſowohl, wenn Dichtigkeit und Widerſtand der Mittel in verſchiedenen Stellen ungleich, als wenn ſie überall einerley.

§. 207.

Erſter Fall.

Die Körper bewegen ſich im widerſtehenden überall gleichförmigen Flüßigen, und werden blos von ihren Geſchwindigkeiten getrieben.

Es ſey alſo die Geſchwindigkeit, womit ſie die Bewegung anfangen $= \sqrt{A}$, und die Linie, worinn ſich der Körper bewegt, AB. (Taf. XI. Fig. 7.) Nehmet den Anfang der Bewegung im Punkt A, daß $Ab = x$, ſo iſt $ab = dx$, und alles läßt ſich hier aus den allgemeinen Geſetzen der Bewegung beſtimmen. Es ſey nämlich der Widerſtand im Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten, (welche Hypotheſe allein mit der Natur übereinſtimmt); ſo iſt $\frac{np}{m} dt = dv$, §. 5. aber $\frac{np}{m} = \frac{gz}{c}$ nach §. 246. Vorl. folglich $-\frac{gz}{c} dt = dv$, wo das Zeichen (—) zu ſetzen, weil die Geſchwindigkeit ſich beſtändig

dig vermindert, indem die Zeit wächſt. Aber $v^2 = z$, weil z die der Geſchwindigkeit in b zugehörige Höhe; daher $v = \sqrt{z}$, und $dv = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$. Daher $\frac{2g}{c}$

$dt = -dz.z^{-\frac{3}{2}}$ und $\frac{g}{c}t = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + B$. B wird aber aus dem Integral beſtimmt, wenn $t = 0$; als-

denn iſt $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}$. Demnach iſt die ganze Glei-

chung $\frac{g}{c} t.\sqrt{z}\sqrt{A} = \sqrt{A} - \sqrt{z}$, oder $t =$

$\frac{c.(\sqrt{A}-\sqrt{z})}{g\sqrt{z}.\sqrt{A}}$.

§. 208.

Demnach läßt ſich aus der gegebenen Geſchwindigkeit die Zeit beſtimmen, worinn ſich die Geſchwindigkeit $\sqrt{A}$ in die geſuchte $\sqrt{z}$ verwandelt. Hier findet man den beſondern Satz, daß **zum gänzlichen Verluſt der Geſchwindigkeit eine unendlich große Zeit erfordert wird.** Denn iſt $\sqrt{z} = 0$,

ſo wird $t = \frac{1}{0}$, folglich unendlich groß.

§. 209.

§. 209.

Eben dieſes findet man aus der Gleichung zwiſchen Zeit und Raum. Denn §. 7. $-\frac{gz}{c}dx = dz$, uud $-\frac{g}{c}dx = \frac{dz}{z}$, davon das Integral log. z $= -\frac{g}{c}x + B$. B wird daraus beſtimmt, daß für $x = 0$, $z = A$ wird. Daher das vollſtändige Integral $\text{Log.}\,z - \text{Log.}\,A = -\frac{g}{c}x$, oder $\text{Log.}\,\frac{A}{z} = \frac{gx}{c}$. Verſtehen wir durch e die Zahl, deren Logarithme im hyperboliſchen Logarithmenſyſtem 1; ſo wird $z = \frac{A}{e^{\frac{x}{c}}}$, wenn $g = 1$. Daher die Geſchwindigkeit oder $\sqrt{z} = \frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}}$.

§. 210.

Soll alſo die ganze Geſchwindigkeit verloren gehen, daß $\sqrt{z} = o$, ſo muß ſeyn $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}} = o$. Dies kann aber, wenn A und c endliche Größen, nicht geſchehen, als wenn $x = \infty$. Demnach geht die Geſchwindigkeit, womit der Körper geworfen wird, nur in unendlicher Zeit und nach zurückgelegten unendlichen Weg gänzlich verloren.

Iſt hingegen c unendlich klein, welches Statt findet, wenn das Mittel von unendlich großer Dichtigkeit, ſo wird auch $\frac{A^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{x}{2c}}} = o$; wenn gleich x eine endliche und ſehr kleine Größe. Hier geht alſo die Geſchwindigkeit nicht nur durch einen endlichen, ſondern auch durch einen ſehr kleinen Raum verloren.

§. 211.

Die Zeit der Bewegung läßt ſich auch aus dem Raum beſtimmen. Denn da $dt = \frac{dx}{v} = \frac{e^{\frac{x}{2c}} . dx}{A^{\frac{1}{2}}}$, ſo

ſo iſt, weil Log. $e = 1$, $t = \frac{2c.e^{\frac{x}{2c}} - 2c}{A^{\frac{1}{2}}}$.

§. 212.

Wie die im widerſtehenden Mittel geworfenen Körper in dem Fall, da der Widerſtand des Mittels ſich verhält, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, ihre ganze Geſchwindigkeit nicht verlieren können, wo ſie nicht in unendlicher Zeit einen unendlichen Raum zurückgelegt haben: ſo geſchieht dieſes auch unter andern Umſtänden. Laßt uns ſehen, was erfolgen muß, wenn der Widerſtand des Flüßigen überhaupt ſich verhält wie die Dignität 2m der Geſchwindigkeit. Hier iſt $c^m : g = z^m : \frac{z^m}{c^m} g$, und iſt $g = 1$, ſo iſt die abſolute Größe des Widerſtands $= \frac{z^m}{c^m}$.

Aber $-\frac{np}{m} dx = vdv$; und $\frac{np}{m} = \frac{z^m}{c^m}$, $vdv = dz$.

$= dz$. Dies, wie vorhin §. 207. in die Gleichung geſezt, wird $-\frac{z^m}{c^m}dx = dz$, und $-\frac{dx}{c^m} = z^{-m}dz$. Hiervon iſt das Integral $-\frac{x}{c^m} = \frac{1}{1-m}z^{-m+1} = \frac{z^{1-m}}{1-m} + B$, und man bekommt $-\frac{x}{c^m} = \frac{z^{1-m} - A^{1-m}}{1-m}$ und

$$z^{1-m} = \frac{c^m A^{1-m} - x(1-m)}{c^m}.$$ Daher $z =$

$$\frac{\sqrt[1-m]{(c^m A^{1-m} - (1-m)x)}}{\sqrt[1-m]{c^m}}.$$

§. 213.

§. 213.

Hieraus ſieht man, daß dieſe Gleichung, wenn $m > 1$, in folgende übergeht $z =$

$$\frac{\left(\sqrt[m]{c}\right)^{1-m}}{\left(\sqrt[m]{c^{\ } . A^{1-m} + (m-1)x}\right)^{m-1}}$$

, oder die Größen unter dem Wurzelzeichen im Nenner und Zähler durch A^{1-m} dividirt, bekommt man in voriger Gleichung

$$z = \frac{\left(\sqrt[m]{c + (m-1)x : A^{1-m}}\right)^{1-m}}{\left(\sqrt[m]{c : A^{1-m}}\right)^{1-m}}, \text{ oder}$$

$$z = \frac{Ac^{\frac{m}{m-1}}}{\left(\sqrt[m]{c + (m-1)x . A^{m-1}}\right)^{m-1}}$$

, und dieſer Werth von z läßt ſich bequemer brauchen, wie wir ſogleich zeigen werden.

Verhält ſich alſo der Widerſtand entweder wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, oder wie eine Dignität derſelben, die größer als die zweyte; ſo wird die Geſchwindigkeit des Körpers nie ganz vernichtet, als nur, wenn er einen unendlichen Weg zurückgelegt hat. Denn iſt $z = 0$,

$$\text{ſo wird auch } \frac{Ac^{\frac{m}{m-1}}}{(m-1)\,\sqrt[m-1]{(c^m+(m-1)x.A)}} = 0, \text{ und}$$

daher $x = \infty$.

§. 214.

Demnach muß ſich der Widerſtand nach einem Verhältnis der Geſchwindigkeit richten, das kleiner als das quadrirte, wenn die ganze Geſchwindigkeit durch einen endlichen Raum verloren gehen ſoll. Nehmet alſo $m < 1$, ſo iſt

$$\text{nach §. 212. } z = \frac{\sqrt[1-m]{(c^m.A^{1-m}-(1-m)x)}}{\sqrt[1-m]{c^m}}, \text{ in}$$

welcher Gleichung $1-m$ eine beſtändige Größe. Setzt man $z = 0$, ſo wird $c^m A^{1-m} = (1-m)x$,

und $x = \frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$. Dies iſt der gröſte Raum, den der geworfene Körper zurücklegen kann, und der allemal endlich und beſtimmt iſt.

§. 215.

Nehmet hier $m = \frac{1}{2}$, oder den Widerſtand im einfachen Verhältnis der Geſchwindigkeit, welches Geſetz des Widerſtands bey ſehr geringer Geſchwindigkeit des Körpers in der Natur Statt zu haben ſcheint; ſo iſt nach §. 213. $\sqrt{z} = \frac{2\sqrt{cA} - x}{2\sqrt{c}}$, und die ganze Geſchwindigkeit geht durch den Raum $x = 2\sqrt{cA}$ verloren. Daher kann der Raum, wodurch die ganze Geſchwindigkeit zerſtört wird, ſehr klein ſeyn, wenn das Flüßige von groſſer Dichtigkeit, folglich c eine kleine Gröſſe; vorzüglich, wenn die Geſchwindigkeit $\sqrt{A}$, womit der Körper geworfen wird, ſehr gering iſt. Sonderbar iſt es aber, daß die Zeit, worinn die ganze Geſchwindigkeit verloren geht, unendlich groß iſt.

§. 216.

Um dieſes leichter einzuſehen, laßt uns die Zeit in Beziehung auf den Raum in der allgemeinen Gleichung betrachten. Wir bekommen; $dt =$

$$\frac{dx\sqrt{.}\left(\sqrt[1-m]{c^m}\right)}{\sqrt[1-m]{\left(\sqrt{}\left(c^m A^{1-m} - (1-m)x\right)\right.}} =$$

$$\frac{dx\sqrt[2m-2]{(c^m A^{1-m} - (1-m)x)}}{\sqrt[2m-2]{c^m}}$$

$$= \frac{dx(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt[2m-2]{c^m}}$$, und dieſe Größe iſt $\frac{1}{m-1}$ des ganzen Differentials. Daher bekommt man $t =$

$$\frac{\frac{1}{m-1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} (c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$

$+ B$, oder $t = \dfrac{2(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{m}{2m-2}}}$

$+ B$. Die beſtändige Größe B wird daraus beſtimmt, daß für $x = 0$ das Integral wird

$$\frac{2(c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{m}{2m-2}}}$$, und daher die ganze Gleichung für die Zeit $t = \frac{2}{2m-1}$.

$$\frac{(c^m A^{1-m} + (m-1)x)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - (c^m A^{1-m})^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$

§. 217.

Iſt alſo $m > 1$, ſo muß der zurückgelegte Raum x mit der Zeit t wachſen, und iſt $t = \infty$. Daher iſt die Zeit, worinn die ganze Geſchwindigkeit verloren geht, hier allemal unendlich, weil $x = \infty$. §. 213. Alsdenn verhält ſich aber der Widerſtand, wie das Quadrat, oder wie eine höhere Dignität der Geſchwindigkeit.

§. 218.

§. 218.

Iſt m < 1, ſo wird x oder der Raum nicht überall unendlich, §. 214. und überhaupt $x = \frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$. Da aber 2m—1 bejaht bleibt, ſo lange $m > \frac{1}{2}$, ſo iſt die Zeit nichtsdeſto weniger unendlich. Denn ſezt man $\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}$ ſtatt x, ſo erhält man die Gleichung

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1}\left(c^m A^{1-m} + (m-1)\frac{c^m A^{1-m}}{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}} - \left(c^m A^{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}},$$

die, weil 2m—2 verneint, übergeht in

$$t = \frac{\frac{2}{2m-1} \cdot c^{\frac{m}{2-2m}}}{\left(c^m A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m} \cdot c^m A^{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}$$

$$\frac{-\frac{2}{2m-1}\left(c^{m}A^{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}.$$ Der erſte Theil des leztern Gliedes zeigt an, daß die Zeit unendlich ſeyn muß: denn da der Exponent $\frac{2m-1}{2-2m}$ bejaht iſt, wenn $m > \frac{1}{2}$, und $c^{m}A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m}.c^{m}A^{1-m} = 0$, ſo wird $t = \frac{1}{0} = \infty$.

§. 219.

Iſt hingegen $m = \frac{1}{2}$, ſo wird $t = \frac{0}{0}$, weil $2m-1 = 0$, und $c^{m}A^{1-m} + \frac{m-1}{1-m}c^{m}A^{1-m} = 0$. Es iſt aber bekannt, daß $\frac{0}{0}$ jedes Verhältnis andeutet, und daher das hier Statt habende aus der Differentialgleichung $dt = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\sqrt{cA}-x}$ §. 215.

zu

zu ſuchen, woraus $t = 2\sqrt{c}.\text{Log.}\left(\frac{1}{2\sqrt{c}A - x}\right) + B.$

Aber $B = -2\sqrt{c}.\text{Log.}\frac{1}{2\sqrt{c}A}$. Daher das voll-ſtändige Integral $t = 2\sqrt{c}.\text{Log.}\left(\frac{2\sqrt{c}A}{2\sqrt{c}A - x}\right)$.

Iſt $x = 2\sqrt{c}A$, ſo iſt der ganze Raum zurückgelegt, und daher die Zeit der Bewegung geendigt. Demnach iſt die ganze Zeit der Bewegung $t = \text{Log.}\frac{0}{0} = \text{Log.}\,\infty$, zum Zeichen, daß die Zeit, worinn ſich der Körper durch den Raum $2\sqrt{c}A$ bewegt, unendlich iſt. Es iſt aber Log. ∞ das kleinſte Unendlich große.

§. 220.

Iſt hingegen $m < \frac{1}{2}$, ſo iſt die Zeit allemal endlich. Denn da nach §. 218. $t =$

$$\frac{\frac{2}{2m-1}\left(c^m A^{1-m} + \frac{(m-1)c^m A^{1-m}}{1-m}\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$

$$-\frac{\frac{2}{2m-1}\left(cA^{m}\,1-m\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}$$, und das erſte Glied verſchwindet, ſo wird die Zeit =

$$\frac{\frac{2}{1-2m}\left(cA^{m}\,1-m\right)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{c^{\frac{m}{2m-2}}}=\frac{2A^{\frac{1-2m}{2}}c^{m}}{1-2m},$$

welche Größe allemal endlich.

Zweyter Fall.

Die Körper werden von beſchleunigenden Kräften in ſtets widerſtehenden Mitteln niederwärts getrieben; vorzüglich wird der Fall der Körper in Mitteln, deren Widerſtand ſich verhält wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, betrachtet.

§. 221.

Laßt uns hier zwey Fälle unterſcheiden: den einen, wenn die Körper ihren Fall von der Ruhe anfangen; den andern, wenn ſie mit einer gewiſſen

wiſſen Geſchwindigkeit in der Vertikallinie niederfallen, oder überhaupt in der Richtung der beſchleunigenden Kräfte geworfen werden. Jenen wollen wir zuerſt betrachten. Es heiſe alſo die durch die Linie BA (Taf. XI. Fig. 7.) drückende Kraft K, und die widerſtehende Kraft, ſo die Bewegung hindert, M; ſo iſt die ganze beſchleunigende Kraft $K - M$. Es ſey der Anfang des Falles in B, $Ba = x$, $ab = dx$, und die der Geſchwindigkeit in a zugehörige Höhe $= z$. Dies vorausgeſezt, iſt überhaupt $(K - M)\, dx = dz$. §. 7. welche Gleichung ſich nur in einigen Fällen, nicht aber in allen, integriren läßt.

§. 222.

Laßt uns insbeſondere die Fälle betrachten, wo die beſchleunigende Kraft beſtändig, und daher auch K eine beſtändige Größe $= G$, und M eine Function der in gewiſſer Dignität genommenen Geſchwindigkeit. Es ſey dieſe Dignität der Geſchwindigkeit 2m, ſo iſt $M = \frac{z^m}{c^m} g$, wie vorhin §. 212. wo durch g unſere natürliche Schwere verſtanden wird, die $= 1$ geſezt $M = \frac{z^m}{c^m}$. Daher wird die allgemeine Gleichung $(K - M)\, dx = dz$ in eine andere ver-

wandelt, $\left(G - \frac{z^m}{c^m}\right) dx = dz$, oder $(Gc^m - z^m) dx$ $= c^m dz$. Alſo $dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$, und $x =$ $S. \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$. Ueberdies auch $dt = \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$, und $t = S. \frac{c^m dz}{(Gc^m - z^m)\sqrt{z}}$. Da aber dieſe Gleichungen ſich nicht durchgängig integriren laſſen, ſo wollen wir ſie in beſtimmten und vorzüglich in den Fällen betrachten, wo der Widerſtand ſich verhält, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit.

§. 223.

Laßt uns alſo die Fälle annehmen, wo der Widerſtand ſich verhält, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit. Sie ſind in der That die nützlichſten und wichtigſten. Hier geht aber die Gleichung

chung $dx = \frac{c^m dz}{Gc^m - z^m}$ über in $dx = \frac{cdz}{Gc - z}$, und es iſt $x = c. \text{Log.} \frac{1}{cG - z} + B$. Aber $B = c.$ Log. cG. Daher $x = c. \text{Log.} \frac{cG}{cG - z}$. Um die Geſchwindigkeit ſelbſt zu finden, iſt $e^{\frac{x}{c}} = \frac{cG}{cG - z}$, oder $cGe^{\frac{x}{c}} - ze^{\frac{x}{c}} = cG$, daher $z = \frac{cGe^{\frac{x}{c}} - cG}{e^{\frac{x}{c}}}$

$= cG\left(e^{\frac{x}{c}} - 1\right)e^{\frac{-x}{c}} = cG\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)$, weil $e^0 = 1$.

§. 224.

§. 224.

Hieraus folgt, daß z deſto größer, je kleiner $e^{-\frac{x}{c}}$, oder $\frac{1}{e^{\frac{x}{c}}}$; folglich wird die größte Geſchwindigkeit, die durch den Fall der Körper in widerſtehenden Mitteln zu erlangen, in dem bewegten Körper nie erzeugt, wo er nicht einen unendlich großen Raum zurücklegt. Iſt hingegen $x = \infty$, ſo geſchieht keine Aenderung der Geſchwindigkeit; denn alsdenn iſt $cG(1 - e^{-\frac{x}{c}}) = cG$, und die Geſchwindigkeit ſelbſt $= \sqrt{cG}$, und dies iſt die größte Geſchwindigkeit, die beym Fall ſchwerer Körper erlangt werden kann, wenn das Flüßige der Bewegung mit ſeiner Trägheit widerſteht, und überall, wie man hier annimmt, gleichartig und gleichdicht iſt.

§. 225.

Demnach iſt die größte Geſchwindigkeit ſo beſchaffen, daß, wenn der in der widerſtehenden, überall gleichdichten Materie geworfene Körper damit verſehen iſt, der Widerſtand der Kraft der Schwere völlig gleich iſt. Dies iſt aber auch ohne Rechnung leicht einzuſehen. Neh-

Nehmen wir aber die beſchleunigenden Kräfte in verſchiedenen Flüßigkeiten einerley an, ſo iſt die durch den Fall zu erlangende größte Geſchwindigkeit beſtändig $\sqrt{c}$ proportional, folglich deſto größer, je dünner, und deſto kleiner, je dichter das widerſtehende Mittel. Demnach muß im vollen oder im allerdichteſten Raume, wo $\sqrt{c}$ entweder ſehr klein, oder $= 0$, auch die Geſchwindigkeit, ſo wie der zurückgelegte Raum $= 0$ ſeyn. Daher kann im ganz vollen Raume kein Fall Statt haben, wo nicht die Körper ſchon im Anfang deſſelben mit einer Geſchwindigkeit verſehen ſind.

§. 226.

Iſt aber die Dichtigkeit des Mittels 0, ſo iſt $\sqrt{c}$ unendlich groß. Laßt uns nicht nur die größte Geſchwindigkeit in dieſem Fall, ſondern auch das durchgängige Verhältnis derſelben unterſuchen. Iſt aber $c = \infty$, ſo läßt ſich die Größe $e^{\frac{-x}{c}}$ in eine Reihe auflöſen, deren erſte Glieder ſind $1 - \frac{x}{c}$, und die übrigen auſer Acht zu laſſen, da ſie durch höhere Dignitäten der Größe c zu dividiren.

Man bekommt alſo

$$z = cG\left(1 + \frac{x}{c} - 1\right) = cG\,\frac{x}{c} = xG,$$ und

iſt

iſt G = g = 1, ſo wird x = z, oder die Höhe des Falles einerley mit der Höhe, die der durch den Fall erlangten Geſchwindigkeit zugehört. Welches ſich auch, wie ſonſt bekannt, ſo verhält.

§. 227.

Iſt zwar c nicht unendlich, doch aber ſehr groß, ſo ſind mehrere Glieder der Reihe, worinn $e^{\frac{-x}{c}}$ aufgelößt wird, zu nehmen. Es iſt aber dieſe Reihe:

$$1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + \frac{x^4}{24c^4} + + +$$

$$\text{Daher } z = G\left(x - \frac{x^2}{2c} + \frac{x^3}{6c^1} + + +\right)$$

Die Luft iſt als ein Flüßiges von ſehr geringer Dichtigkeit anzuſehen; daher wird, mittelſt dieſer Gleichung, der Fall der Körper in dieſem Flüßigen ſehr nahe beſtimmt, vorzüglich, wenn die Körper ſehr ſchwer ſind.

Hier ſehen wir auch, daß, wenn c ſehr groß, und x ſehr klein, z = xG, wie bey der freyen Bewegung.

§. 228.

Eben ſo wird aus der obigen Gleichung §. 223. die Bewegung beſtimmt, wenn ſchwere Körper ihren Fall mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit beginnen. Zu dem Ende braucht man nur in der Gleichung x = — c. Log. (cG — z) + B, B gehörigermaßen zu be-

ſtimmen.

ſtimmen. Denn iſt die der Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung zugehörige Höhe $= A$, ſo muß, wenn $x = o$, ſeyn $z = A$, und es wird $B = c.\ \mathrm{Log.}\ (cG - A)$, und $x = c.\ \mathrm{Log.}\ \frac{cG - A}{cG - x}$. Daher $z = e^{-\frac{x}{c}}(A - Gc) + Gc$.

Hieraus ſehen wir aber

1.) wenn $A = Gc$; ſo iſt auch $z = Gc$, d. i. beſtändig. Demnach kann hier die Geſchwindigkeit des Körpers ſich weder vermehren, noch vermindern; ſie bleibt vielmehr beym Fall des Körpers immer einerley, wie leicht erhellt. Und da $z = Gc$, ſo iſt der Widerſtand der Beſchleunigung der Schwere gleich. §. 228. 229. welches auch die Urſache, warum die Geſchwindigkeit ſich nicht ändert.

2.) Nehmet aber $A > Gc$, ſo vermindert ſich die bejahte Größe $\frac{A - cG}{e^{\frac{x}{c}}}$ beſtändig bey zunehmenden x.

Daher nimmt die Bewegung immer ab, bis nach zurückgelegten unendlichen Weg $\frac{A - Gc}{e^{\frac{x}{c}}} = o$, und $z = Gc$,

$z = Gc$, welches die kleinſte Geſchwindigkeit, womit der fallende Körper ſich fortbewegen kann.

3.) Iſt hingegen $A < Gc$, ſo nimmt die verneinte Größe $\frac{A-Gc}{e^{\frac{x}{c}}}$ bey zunehmenden x immer ab. Daher wird $e^{\frac{-x}{c}}(A-Gc) + Gc$ bey zunehmenden x größer. Die Geſchwindigkeit nimmt alſo beſtändig zu, wird aber nie vor zurückgelegten unendlichen Weg, oder ehe $\frac{A-Gc}{e^{\frac{x}{c}}} = 0$, die größte.

4.) Demnach iſt in allen Fällen $\sqrt{Gc}$ die größte Geſchwindigkeit, nach deren Erlangung der Körper ohne einige Aenderung derſelben ſich gleichförmig fortbewegt.

§. 229.

Eben ſo wird die Zeit der Bewegung beſtimmt, die fallenden Körper mögen ſich Anfangs mit einer Geſchwindigkeit bewegen oder nicht. Im leztern Fall wird

wird $dt = \frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{cG(G(1-e^{\frac{-x}{c}}))}}$. Sezt man $e^{\frac{-x}{c}} = v$, ſo wird $-\,dx = \frac{cdv}{v}$, und $dt = \frac{-cdv}{v\sqrt{cG(1-v)}} = \frac{-c}{\sqrt{cG}} . \frac{dv}{v\sqrt{(1-v)}}$, welche Gröſse ſich offenbar in eine rationale verwandeln läßt, wenn man ſezt $\sqrt{(1-v)} = y$. Alsdenn wird $1 - y^2 = v$, $dv = -\,2ydy$, und $\frac{dv}{v\sqrt{(1-v)}} = \frac{-2ydy}{(1-y^2)y} = \frac{-2dy}{1-y^2}$. Aber die Gröſse $1-y^2$ hat die Theiler $1+y$ und $1-y$; daher $\frac{-2dy}{1-y^2} = \frac{2dy}{y^2-1} = \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}$, davon das Integral $\text{Log.}\, \frac{y-1}{y+1} + B$, und daher $S.\, \frac{-c}{\sqrt{cG}} . \frac{dv}{v\sqrt{(1-v)}}$

$$= \frac{-c}{\sqrt{cG}} . \text{ Log. } \frac{y-1}{y+1} + \text{B}.$$

Setzet ſtatt y deſſen Werth $\sqrt{(1-v)}$, ſo wird

$$\frac{-c}{\sqrt{cG}} . \text{ Log. } \frac{y-1}{y+1} + \text{B} = \frac{c}{\sqrt{cG}} . \text{ Log. } \frac{\sqrt{(1-v)}+1}{\sqrt{(1-v)}-1}$$

$+$ B, und ſezt man ferner ſtatt v deſſen Werth $e^{\frac{-x}{c}}$, ſo erhält man

$$t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} . \left(\text{Log. } \frac{\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})}+1}{\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})}-1} - \text{Log. } \frac{+1}{-1}\right),$$

wo B aus dem Integral für $x = 0$ beſtimmt worden.

Dieſe Gleichung läßt ſich auf eine einfachere Form bringen. Multiplicirt man nämlich ſowohl den Nenner, als den Zähler der Gleichung, durch $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})}$ $+1$, ſo erhält man

t =

$$t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} . \left(2 \text{Log.} \frac{\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{c}})} + 1}{-e^{\frac{-x}{2c}}} - \text{Log.} -1\right) =$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} . \left(2 \text{Log.} \left(\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{c}})} + 1\right) + \text{Log.} e^{\frac{x}{c}}\right), \text{ weil}$$

$$\text{Log.} - e^{\frac{x}{c}} - \text{Log.} - 1 = \text{Log.} e^{\frac{x}{c}}.$$

Alſo $t = 2\sqrt{\frac{c}{G}} . \left(\text{Log.} \left(\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{c}})} + 1\right) + \text{Log.} e^{\frac{x}{2c}}\right) = 2\sqrt{\frac{c}{G}} . \text{Log.} \left(\sqrt{(e^{\frac{x}{c}} - 1)} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}\right).$

§. 230.

Da nun x unendlich ſeyn muß, ehe die Geſchwindigkeit am größten ſeyn wird, ſo wird auch dieſe nur in unendlicher Zeit erlangt.

§. 231.

Auf eben die Art wird die Zeit beſtimmt, wenn die Körper ihren Fall mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit beginnen. Denn man erhält hier

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{}(e^{\frac{-x}{c}}(A-Gc+Gc)}.$$

§. 228. welches, $A - Gc = f$, und $e^{\frac{-x}{c}} = v$, wie vorhin, geſezt, in $dt = \frac{-cdv}{v\sqrt{}(vf+Gc)}$ übergeht, und ſezt man wiederum $\sqrt{}(vf+Gc) = y$, ſo wird $dt \frac{-2cdy}{y^2-Gc}$. Aber $y^2 - Gc$ hat die beyden Theiler $y + \sqrt{}Gc$, und $y - \sqrt{}Gc$; daher

$$dt = \frac{\sqrt{}\frac{c}{G}.dy}{y+\sqrt{}Gc} - \frac{\sqrt{}\frac{c}{G}.dy}{y-\sqrt{}Gc},$$

und $t = \sqrt{}\frac{c}{G}.$ $(Log. y + \sqrt{}Gc - Log. y - \sqrt{}Gc) + B$. Setzet nun ſtatt y deſſen Werth $\sqrt{}(vf+Gc)$, ſo iſt

t =

$$t = \sqrt{\frac{c}{G}} \,.\, \text{Log.} \frac{\sqrt{(vf+Gc)}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{(vf+Gc)}-\sqrt{Gc}} + B,$$ und endlich $e^{\frac{-x}{c}}$ anſtatt v geſezt, iſt $t = \sqrt{\frac{c}{G}}$.

$$\text{L.} \frac{\sqrt{(fe^{\frac{-x}{c}}+Gc)}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{(fe^{\frac{-x}{c}}+Gc)}-\sqrt{Gc}} + B.$$ Aber $B = -\sqrt{\frac{c}{G}}$.

$$\text{Log.} \frac{\sqrt{(f}\sqrt{Gc(}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{(f+Gc)}-\sqrt{Gc}} = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \,.\, \text{Log.} \frac{\sqrt{A}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{A}-\sqrt{Gc}}.$$

Daher endlich $t = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \,.\, \Big(\text{Log.} \frac{\sqrt{(fe^{\frac{-x}{c}}+Gc)}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{(fe^{\frac{-x}{c}}+Gc)}-\sqrt{Gc}}$

$- \text{Log.} \frac{\sqrt{A}+\sqrt{Gc}}{\sqrt{A}-\sqrt{Gc}}\Big)$ oder auch $t = 2\sqrt{\frac{c}{G}}$.

$$\text{Log.}\,\frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{c}}Gc)}+\sqrt{(e^{\frac{x}{c}}Gc+A-Gc)}}{\sqrt{A}+\sqrt{Gc}}.$$

Dritter Fall.

Die Körper ſteigen mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, und zugleich werden ſie von Kräften niederwärts getrieben, insbeſondere werden die Fälle betrachtet, wo der Widerſtand ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, mit der ſie ſteigen.

§. 232.

Steigen die Körper mit einer beſtimmten Geſchwindigkeit vom Punkt A nach B und werden zugleich von Kräften niederwärts getrieben, ſo treten dieſe Kräfte mit dem Widerſtand des Mittels, worinn ſich die Körper bewegen, zuſammen. Demnach iſt mit Beybehaltung der oben §. 221. gebrauchten Zeichen, nur daß hier $Ab = x$, und $ba = dx$, $(K+M) dx = - dz$. Vergleicht man dieſe Gleichung mit der dortigen $(K-M) dx = dz$; ſo erhellt, daß Geſchwindigkeit und Zeit der Bewegung in gleichhohen Punkten, und in ähnlichen Linien hier nicht, wie oben erwieſenermaßen bey freyer Bewegung, gleich ſind.

§. 233.

Auch dieſe allgemeine Gleichung $(K+M) dx = - dz$ läßt ſich nicht integriren. Laßt uns daher beſtimm-

ſtimmtere, in der Ausübung nützlichere Fälle anneh-men. Es ſey K eine beſtändige Kraft, wie G, und auch hier der Widerſtand im Verhältnis einer Di-gnität der Geſchwindigkeit $= \frac{z^m}{c^m} g = \frac{z^m}{c^m}$, wenn $g = 1$; ſo geht die allgemeine Gleichung $(K + M) dx = - dz$ in eine andere $\left(G + \frac{z^m}{c^m}\right) dx = - dz$ über, daß alſo $dx = \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$, und $x = S. \frac{-c^m dz}{Gc^m + z^m}$, und die Zeit $t = S. \frac{-c^m dz}{(Gc^m + z^m)\sqrt{z}}$.

§. 234.

Da aber nicht einmal dieſe Gleichungen durch-gängig integrabel ſind, ſo laſſet uns den vorzüglich betrachtungswürdigen Fall annehmen, wo der Wi-derſtand ſich verhält, wie das Quadrat der Ge-ſchwindigkeit; und die vorige Gleichung $dx =$

$\frac{-c^m\,dz}{Gc^m+z^m}$ geht in $dx = \frac{-cdx}{Gc+z}$ über, davon das Integral $x = c.\,\mathrm{Log.}\,\frac{1}{cG+z} + B$. Nun iſt $B = -c\,\mathrm{Log.}\,\frac{1}{cG+A}$, wenn die der Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung zugehörige Höhe A heißt. Daher $x = c\,\mathrm{Log.}\,\frac{cG+A}{cG+z}$, und $z = (A+cG)\,e^{\frac{-x}{c}} - cG$.

§. 235.

Geht die ganze Geſchwindigkeit verloren, ſo wird $z = o$, und $x = c\,\mathrm{Log.}\,\frac{cG+A}{cG}$. Erreicht alſo der Körper dieſe Höhe, ſo hört die ganze Geſchwindigkeit auf.

§. 236.

Sezt man den Widerſtand des Mittels ſehr gering, ſo daß c eine ſehr große Zahl bedeutet, und iſt

iſt x in Vergleichung mit c ebenfalls ſehr klein, ſo findet man die Geſchwindigkeit ſehr nahe, wenn man die erſten Glieder der unendlichen Reihe nimmt, worinn $e^{\frac{-x}{c}}$ aufgelößt wird, und die übrigen, da ſie verſchwinden, wegläßt. Daher, weil $e^{\frac{-x}{c}} = 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - + \text{rc.}$ iſt $z = - cG + (A + cG (1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2})$. In andern Fällen aber iſt die Größe z aus der unendlichen Reihe nach den bekannten Methoden zu entwickeln.

§. 237.

Auch iſt die Zeit der Bewegung $\frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{dx}{\sqrt{(A + cG)e^{\frac{-x}{c}} - cG)}}$, welche Gleichung eben ſo, wie oben §. 231, integrabel wird, wenn man nämlich

 ſezt

ſezt $e^{-\frac{x}{c}} = v$, und $-dx = \frac{cdv}{v}$. So iſt $\frac{dx}{\sqrt{z}}$ $= \frac{-cdv}{v\sqrt{(av-cG)}}$, wenn $A + cG = a$. Man ſetze ferner $\sqrt{(av-cG)} = y$, ſo wird $\frac{dx}{\sqrt{z}} = \frac{-2cdy}{y^2+cG}$, welches, wie oben §. 231. in zwey logarithmiſche Integrale aufgelößt wird, um endlich zu erhalten $-\frac{dt}{c}$

$$= \frac{-dy.\frac{1}{\sqrt{-cG}}}{y+\sqrt{-cG}} \; \frac{+dy.\frac{1}{\sqrt{-cG}}}{y-\sqrt{-cG}},$$

und $-\frac{t}{c} = \frac{1}{\sqrt{-cG}}$ Log. $\frac{y-\sqrt{-cG}}{y+\sqrt{-cG}}$, welche Größe, weil c und G bejaht ſind, unmöglich iſt.

§. 238.

Da man aber unmögliche logarithmiſche Integrale auf den Kreis bringen, und einen möglichen Werth erhalten kann: ſo muß man auch vermittelſt des Kreiſes voriger Gleichung Integral ſuchen. Es ſey alſo BA (Taf. XI. Fig. 8.) ein Kreisbogen, deſſen Element

Element ab = ds, der Tangente Element cd = dx, und Ad = x. Sezt man nun den Halbmeſſer CA = r, ſo wird $ab = ds = \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$, wie auch $S. \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2}$ = dem Bogen Ab. Iſt r = 1, ſo iſt $ds = \frac{dx}{1 + x^2}$. Um aber $\frac{dy}{y^2 + cG}$ auf eben dieſe Form zu bringen, iſt zu merken, daß $\frac{dy}{y^2 + cG} = \frac{1}{cG}$. $\frac{dy}{\frac{1 + y^2}{cG}}$. Sezt man daher $x^2 = \frac{y^2}{cG}$, und $x = \frac{y}{\sqrt{cG}}$, ſo wird das Element des Bogens, deſſen Halbmeſſer = 1, $\frac{dy \sqrt{cG}}{y^2 + cG}$, und $S. \frac{dy \sqrt{cG}}{y^2 + cG}$ iſt der Bogen Ab, deſſen Tangente Ad. Daher iſt auch $\frac{1}{\sqrt{cG}} . S. \frac{dy \sqrt{cG}}{y^2 + cG} = \frac{1}{\sqrt{cG}}$. Atang. Ad, folglich

$$\frac{-2c}{\sqrt{cG}} \text{ Atang. } Ad + B = S. \frac{-2cdy}{y^2 + cG} = t.$$

Sezt man ſtatt y deſſen Weth $\sqrt{(av - cG)}$, und ſtatt v deſſen Werth $e^{\frac{-x}{c}}$, daher ſtatt y, $\sqrt{(ae^{\frac{-x}{c}} - cG)}$, ſo wird $\text{tang.} \frac{y}{\sqrt{cG}} = \text{tang.} \frac{\sqrt{(ae^{\frac{-x}{c}} - cG)}}{\sqrt{cG}}$, und t

$$= -\frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} \text{ Atang. } \frac{\sqrt{(ae^{\frac{-x}{c}} - cG)}}{\sqrt{cG}} + B.$$ Aber B

$$= \text{Atang.} \frac{\sqrt{(a - cG)}}{\sqrt{cG}} . \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}} = \text{Atang.} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{cG}} . \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}},$$

weil $a = A + cG$, §. 237. Daher die ganze Zeit, worinn der Körper zur Höhe x ſteigt, $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}$.

$$\text{Atang.} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{cG}} - 2\sqrt{\frac{c}{G}} . \text{ Atang.} \frac{\sqrt{(ae^{\frac{-x}{c}} - cG)}}{\sqrt{cG}}.$$

§. 239.

§. 239.

Die größte Höhe, die der ſteigende Körper erreichen kann, iſt $c.\ \text{Log.}\frac{A+cG}{cG}$. §. 235. Daher

$$ae^{-\frac{x}{c}-\text{Log.}\frac{A+cG}{cG}} = ae^{-\text{Log.}\frac{A+cG}{cG}}.$$

Aber $\text{Log.}\,e$

$$= -\ \text{Log.}\ \frac{A+cG}{cG} = \text{Log.}\ \frac{cG}{A+cG},$$ daher

$$e^{-\text{Log.}\frac{A+cG}{cG}} = \frac{cG}{A+cG}.$$

Hieraus erhält man die ganze Zeit des Steigens, worinn die ganze Geſchwindigkeit verloren geht, $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}$.

$$\text{Atang.}\sqrt{\frac{A}{cG}} - 2\sqrt{\frac{c}{G}}.\ \text{Atang.}\frac{\sqrt{\left(\frac{acG}{A+cG} - cG\right)}}{\sqrt{cG}}$$

Da aber $a = A + cG$, ſo iſt $\frac{acG}{A+cG} - cG = 0$.

Daher

Daher die ganze Zeit, worinn der Körper ſteigt,

$$= 2\sqrt{\frac{c}{G}} \cdot \text{Atang.} \sqrt{\frac{A}{cG}}.$$

§. 240.

Demnach iſt die Zeit des Steigens allemal endlich, auch wenn die Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung unendlich groß war. Denn $2\sqrt{\frac{c}{G}}$. Atang. $\sqrt{\infty} = 2\sqrt{\frac{c}{G}}$. Atang. 90°.

§. 241.

Demnach läßt ſich allemal die Zeit beſtimmen, worinn geworfene Körper mit einer gegebenen Geſchwindigkeit ſteigen und fallen. Aber auch der zurückgelegte Raum wird aus dieſen Gleichungen beſtimmt, den Widerſtand im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit genommen, und ferner aus dem Raum wiederum die Geſchwindigkeit. Doch wird hier die Zeit des Steigens und Fallens weit leichter gefunden, als die Geſchwindigkeit, womit die Körper die Bewegung beginnen. Daher wird es weder unnütz, noch unerheblich ſeyn, wenn wir zeigen, wie aus der gegebenen ganzen Zeit der Bewegung ſowohl die Zeit des Steigens, als die Zeit des Falles beſonders, nebſt der Geſchwindigkeit, womit die Körper geworfen werden, und der Höhe, die ſie im Steigen erreichen können, gefunden werden.

Die

Die ganze Zeit der Bewegung heiſe T, und die geſuchte Höhe Ab = x; ſo iſt die Zeit des Steigens vermöge des vorigen $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}$. Atang. $\sqrt{\frac{A}{cG}}$, §.239. und die Zeit des Falles $= 2\sqrt{\frac{c}{G}}$. Log. $(\sqrt{(e^{\frac{-x}{c}} - 1)} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}})$. §. 229. Daher, $T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$. (Atang. $\sqrt{\frac{A}{cG}}$ + Log. $(\sqrt{(e^{\frac{x}{c}} - 1)} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}})$). Aber $x = c$, L. $\frac{A+cG}{cG}$. §.235. Daher $e^{\frac{x}{c}} = e^{\text{Log.}\frac{A+cG}{cG}}$ $= \frac{A+cG}{cG}$, folglich $e^{\frac{x}{c}} - 1 = \frac{A}{cG}$, ſo wie tang. $\sqrt{\frac{A}{cG}}$

= tang.

$= \text{tang.}\sqrt{(e^{\frac{x}{c}}-1)}$. Daher wiederum $T = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{G}}$

$(\text{Atang.}\sqrt{(e^{\frac{x}{c}}-1)} + \text{Log.}(\sqrt{(e^{\frac{x}{c}}-1)} + \sqrt{e^{\frac{x}{c}}}))$.

Aus dieſer Gleichung läßt ſich x nach einer Methode beſtimmen, nach welcher der unbekannte Werth durch eine zuſammenrückende Reihe (ſeries convergens) gegeben wird. Denn c und G ſind beſtändige Größen; die Bogen aber und die Exponential- und logarithmiſche Größen laſſen ſich in unendliche Reihen auflöſen. Iſt nun x gegeben, ſo iſt zugleich die Geſchwindigkeit beſtimmt, und vermittelſt dieſer findet man wieder beſonders die Zeiten des Steigens und Fallens.

§. 242.

Dieſe Rechnung wird aber weit kürzer, wenn c im Verhältnis gegen x ſehr groß zu achten, welches ſich einigermaßen bey der Bewegung in der Luft annehmen läßt. Alsdenn darf man nur die Zeit des Steigens, wie auch die Zeit des Falles beſtimmen, um ſie mit der gegebenen ganzen Zeit zu vergleichen.

Die Zeit des Falles aber wird auf folgende Art beſtimmt. Nach §. 229. iſt ſie $= \sqrt{\frac{c}{G}}$

(Log.

$$\text{Log. } e^{\frac{x}{c}} + 2\,\text{Log. } \left(\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)} + 1\right) = \sqrt{\frac{c}{G}}$$

$$\left(\frac{x}{c} + 2\,\text{Log. } \left(\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)} + 1\right),$$ weil $\text{Log. } e^{\frac{x}{c}} = \frac{x}{c}$.

Da $\text{Log. } 1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + -$ ꝛc.

ſo iſt auch $\text{Log. } \left(\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)} + 1\right) = \sqrt{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)} -$

$$\frac{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)}{2} + \frac{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - +$$ ꝛc. Ferner iſt $e^{\frac{-x}{c}}$

$$= 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{6c^3} + -$$ ꝛc. Daher

$$1 - e^{\frac{-x}{c}} = \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^{\varepsilon}} - +$$ ꝛc. und

$$\sqrt{\left(1 - e^{\frac{-x}{c}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} - +\right)};$$

Nn diese

dieſe Wurzel gewöhnlichermaßen ausgezogen, erhält

man $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{12c^2\sqrt{c}}$

$- \frac{x^2\sqrt{x}}{32c^2\sqrt{c}} + -$ ꝛc. $= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x\sqrt{x}}{4c\sqrt{c}} + \frac{5}{96}$

$\frac{x^2\sqrt{x}}{c^2\sqrt{c}} - +$ ꝛc. Dies im erſten Gliede von

$\text{Log.}(\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})}+1) = \sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})} - \frac{(1-e^{\frac{-x}{c}})}{2}$

$+ -$ ꝛc. geſezt, und die Glieder genommen, worinn die Dignität der Größe x eine gegebene Digni-

tät z. B. $\frac{5}{2}$ nicht überſteigt, wird $\text{Log.}(\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{c}})}+1)$

$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{c}} - \frac{x}{2c} + \frac{x\sqrt{x}}{12c\sqrt{c}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480.c^2\sqrt{c}}$. Daher

die Zeit des Falles $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}$.

Hieraus

Hieraus findet man ohne Umſchweife die Zeit des Steigens, wenn man, wie bey der Bewegung ſchwerer Körper in der Luft, c in Vergleichung mit x ſehr groß annimmt. Denn die Zeit des Steigens iſt der Zeit des Falles gleich, wenn in beyden Bewegungen die Kräfte in eben der Richtung auf eben die Art wirken. Denn es iſt klar, daß der Körper, der von der Schwere und dem Widerſtand des Flüßigen zugleich getrieben, im Steigen zu einer gewiſſen Höhe ſeine Geſchwindigkeit verliert, auch in eben der Zeit und durch eben die Höhe die nämliche Geſchwindigkeit wieder erlangen muß, wenn er fällt, und im Fallen von eben den Kräften getrieben wird, die ihm im Steigen die Geſchwindigkeiten raubten. Demnach iſt die Zeit des Steigens und Fallens einerley, wenn man annimmt, daß in beyden Bewegungen der Widerſtand des Mittels in eben der Richtung mit der Schwere zur Bewegung des Körpers wirkt. Nimmt man aber den Widerſtand des Mittels als eine Kraft an, wodurch der Körper getrieben wird, ſo iſt c als eine verneinte Größe anzuſehen. Denn ſtoßen beyde Kräfte niederwärts, ſo iſt die allgemeine Gleichung $\left(G + \frac{z^m}{c^m}\right) dx = dz$. Aber die §. 222.

$\left(G - \frac{z^m}{c^m}\right) dx = dz$ geht in erſtere über, wenn c verneint, oder $= - c$ geſezt wird.

Daher läßt ſich auch der gefundene Werth der Zeit $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}}$ anwenden, wenn man $-c$ ſtatt c ſezt. Alsdenn iſt die Zeit, worinn beym Steigen der Körper die Geſchwindigkeit den Raum x durch verloren geht, einerley mit der Zeit, worinn ſie im Fall erlangt wird. Daher die Zeit des Steigens $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{G}} - \frac{x\sqrt{x}}{6c\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240c^2\sqrt{G}} - +$ ꝛc. Aber dieſe Zeit des Steigens zur Zeit des Falles hinzugethan, iſt gleich der ganzen Zeit der Bewegung $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120c^2\sqrt{G}} + +$ ꝛc.

§. 243.

Dieſer Weg, Aufgaben aufzulöſen, wozu längere und ſchwerere Rechnung nöthig wäre, iſt der leichteſte und kürzeſte. Auch iſt zu merken, daß die Höhe x, die der ſteigende Körper zurück legt, deſto kleiner als die wahre Höhe, je weniger man Glieder der unendlichen Reihe in der Gleichung $T = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{G}}$ ꝛc. nimmt. Ferner erhellt, daß wenn x gefunden, auch zugleich die x durch verlorne Geſchwindigkeit, oder die Geſchwindigkeit, womit der Körper im Anfang geworfen worden, gefunden iſt. Und aus dieſer Ge-

ſchwin-

ſchwindigkeit laſſen ſich wiederum die einzelnen Zeiten finden, §. 229. 239.

Vierter Fall.

Von der geradlinigten Bewegung durch widerſtehende, nicht überall gleichdichte Mittel.

§. 244.

Wir nahmen im vorigen die widerſtehenden Mittel, worinn ſich die Körper bewegen, überall gleichdicht an. Daß dieſes aber in unſerer Luft nicht Statt hat, iſt ausgemacht: Dieſes Flüßige iſt aus unzähligen Urſachen in einerley horizontalen Schichten bald dichter, bald dünner, und in verſchiedenen verſchieden. Dieſer Aenderung Geſetze ſind weder leicht zu finden, noch würden ſie gefunden genau zeigen, wie weit dieſe Rechnung für ihren Widerſtand in der Ausübung anwendbar iſt. Daher wollen wir hier auch nur einen allgemeinen Weg, die Rechnung in dieſen Fällen zu führen, erklären. Nehmet alſo an, die Dichtigkeit des Flüßigen und der daher entſtehende Widerſtand nehme im Verhältnis der Entfernung von einem gegebenen Punkt A zu und ab, und verhalte ſich überdies wie die Dignität $2m$ der Geſchwindigkeit. Um nun den der Geſchwindigkeit, womit, wenn ſich der Körper bewegt, die widerſtehende Kraft unſerer Schwere gleich iſt, entgegengeſezten abſoluten Widerſtand zu beſtimmen, ſo ſey die dieſer Geſchwindigkeit zugehörige Höhe $= c$, $Ab = x$, und die der Geſchwindigkeit in b zugehörige Höhe $= z$. So iſt die natürliche Schwere $= 1$, und die Dichtigkeit des Mittels überall einerley geſezt, der Wider-

ſtand $= \frac{z^m}{c^m}$. Da aber in dieſem Fall die Größe c ſelbſt veränderlich iſt, hier im Verhältnis der Entfernungen vom Punkt A, ſo muß c^m zu x^m in einem gegebenem Verhältnis 1 : a ſtehen. Daher $c^m = ax^m$, und der Widerſtand $= \frac{z^m}{ax^m}$.

Dies vorausgeſezt, werden die allgemeinen Gleichungen auf eben die Art, wie in den obigen Fällen, beſtimmt. Denn es iſt

1.) beym **Fall der Körper**, $(G - \frac{z^m}{ax^m})\,dx = -\,dz$, weil x beſtändig abnimmt.

2.) **Beym Steigen hat man** $(G + \frac{z^m}{ax^m})\,dx = -\,dz$.

§. 245.

Setzet m = 1, d. i. **den Widerſtand im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit; ſo** iſt

iſt beym Fall der Körper $(G - \frac{z}{ax})\, dx = - dz$

Nimmt man auch G als eine beſtändige Kraft an, ſo laſſen ſich die veränderlichen Größen ſowohl in dieſer, als in der allgemeinen Gleichung $(G - \frac{z^m}{ax^m})$ $dx = - dz$ abſondern, wenn man ſezt $z = xy$. Alsdenn wird die Gleichung $(G - \frac{z}{ax})\, dx = - dz$ verwandelt in $-(aG - y)\, dx = axdy + aydx$, oder

$$\frac{dx}{x} = \frac{-ady}{aG + (a-1)y},$$ wovon das Integral $\text{Log.}\, x = \frac{a}{1-a} . \text{Log.}\,(y(1-a) - aG) + B$. B wird aber daraus beſtimmt, daß im Anfang der Bewegung, wenn $x = C$, $z = 0$, folglich auch $y = 0$, woraus man bekommt $B = \text{Log.}\, C - \frac{a}{1-a} . \text{Log.} - aG$.

Sezt man daher $\frac{z}{x} = y$ in der Gleichung $\text{Log.}\, x = \frac{a}{1-a} . \text{Log.}\,(y\,(1-a) - aG) + B$, ſo erhält

man $\text{Log. } x = \frac{a}{1-a} . \text{ Log. } \left(\frac{z}{x}(1-a) - aG\right) + \text{Log. } C - \frac{a}{1-a} . \text{ Log. } - aG$, oder $\text{Log. } \frac{x}{C} = \frac{a}{1-a} . \text{ Log. } \left(\frac{(a-1)z + aGx}{aGx}\right)$, und $\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{1-a}{a}} = \frac{(a-1)z + aGx}{aGx}$, oder $z = \frac{aGx}{a-1}\left(\left(\frac{x}{C}\right)^{\frac{1-a}{a}} - 1\right)$

$$= \frac{aG}{a-1} . \frac{\left(C^{\frac{a-1}{a}} - x^{\frac{a-1}{a}}\right)}{x^{\frac{-1}{a}}} = \frac{aG}{a-1}\left(C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}} - x\right)$$

§. 246.

Aus der gefundenen Geſchwindigkeit findet man auch die Zeit, oder $S. \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{aG}{a-1} . \left(C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}} - x\right)\right)}}$.

Die

Die Geſchwindigkeit aber wird = 0, wenn x = 0, und dann iſt ſie nicht nur in B, ſondern auch in A = 0. Denn der Widerſtand iſt unendlich, wenn

$$x = 0, \text{ weil } \frac{z^m}{ax^m} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Hieraus erhellt, daß im Anfang der Bewegung eine unendlich große Geſchwindigkeit erfordert wird, ſo oft Körper vom Punkt A nach B ſteigen. Ferner läßt ſich auch das Steigen der Körper auf den Fall bringen, wenn man — a ſtatt a ſezt. Denn dadurch geht die zwote Gleichung §. 244. in die erſte über.

247.

Der Punkt, wo die Geſchwindigkeit am größten, muß zwiſchen A und B liegen. Man erkennt ihn daraus, daß die Geſchwindigkeit in ihm ſich, weder vermehrt, noch vermindert, oder daß

$dz = 0$. Da aber $\left(G - \frac{z}{ax}\right) dx = - dz$; ſo wird

$$Gax = z, \text{ folglich } Gax = \frac{aG}{a-1}\left(C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}} - x\right),$$

oder $ax = C^{\frac{a-1}{a}} x^{\frac{1}{a}}$, oder $a^a x^{a-1} = C^{a-1}$, und

daher $x = \frac{C}{a^{\frac{a}{a-1}}}$.

§. 247.

Mehrere zu gegenwärtigem, wie auch zu andern Fällen, gehörige Bemerkungen und Rechnungen ließen ſich hinzufügen, nähmen wir andere Hypotheſen an; da aber dieſe von geringen oder keinem Nutzen, indem die wahren Geſetze des Widerſtandes flüßiger Weſen noch nicht entdeckt ſind: ſo wollen wir uns hierbey länger nicht aufhalten. Laßt uns nur das einzige bemerken, daß in den vorhergehenden Gleichungen, deren Intregale wir angegeben, kein Fall enthalten, wo $a = 1$. Denn ſezt man $a = 1$, ſo erhält man einen Werth, der weiter nichts anzeigt, als daß der wahre Werth aus der Differentialgleichung ſelbſt zu ſuchen. Nun wird in der Gleichung

§. 245. $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{G}$, oder $G \text{ Log. } \frac{1}{x} + B = y$.

Aber $B = G. \text{ Log. } C$, daher $y = G. \text{ Log. } \frac{C}{x}$, und

$z = Gx \text{ Log. } \frac{C}{x}$, weil $y = \frac{z}{x}$.

Sucht man in dieſem Fall die Entfernung Ab, wo die Geſchwindigkeit am größten, ſo bekommt man,

man, weil $a = 1$, $Gx = z$. §. 245. wenn $dz = 0$.

Folglich $Gx = Gx. \text{Log.} \frac{C}{x}$, oder $1 = \text{Log.} \frac{C}{x}$,

oder $e = \frac{C}{x}$. Daher $x = \frac{C}{e}$.

Fünfter Fall.

Von der geradlinigten Bewegung im widerſtehenden Flüßigen, insbeſondere im gleichförmig widerſtehenden, wenn die Körper von Kräften, die nach einem Punkt drücken, gereizt werden.

§. 249.

Nimmt man hier auch, wie im nächſtvorhergehenden, an, daß die Dichtigkeit des Mittels in verſchiedenen horizontalen Schichten verſchieden, in einem gewiſſen Verhältnis der Entfernungen von dem beſtimmten Punkt A zu- und abnimmt, und $Ab = x$; ſo muß auch die Geſchwindigkeit, der das Mittel mit einer der Schwere gleichen Kraft widerſteht, in verſchiedenen Theilen des Flüßigen verſchieden ſeyn, und von der Entfernung abhängen, folglich eine Function von x und beſtändigen Größen ſeyn, was für eine Hypotheſe man auch nimmt. Es ſey alſo dieſe Function überhaupt $\sqrt{Fx}$, und der Widerſtand im Verhältnis der Geſchwindigkeit in der Dignität $2m$; ſo iſt der

der Widerſtand in b $= \frac{z^m}{(Fx)^m}$, wenn die der Geſchwindigkeit in b zugehörige Höhe $= z$.

Die Centralkraft heiſe überhaut K; ſo hat man

1.) beym Fall der Körper nach A, $dz = (P - \frac{z^m}{(Fx)^m}) - dx$.

2.) Beym Steigen aber von A nach B, wird $dz = (- P - \frac{z^m}{(Fx^m}) dx$, welche leztere Gleichung aus der erſtern entſteht, wenn man ſezt $- (Fx)^m$ ſtatt $(Fx)^m$.

§. 250.

Es ſey $m = 1$, ſo wird $(- P + \frac{z}{Fx}) dx = dz$, und wenn $Fx = F$, ſo iſt $(\frac{z}{F} - P) dx = dz$, und

Pdx

$Pdx = -dz + z\frac{dx}{F}$. Um nun die veränderlichen Größen zu trennen, muß $(-dz + z\frac{dx}{F})$ durch eine angenommene Größe M multiplicirt werden, ſo daß M. Pdx doch eine bloſe Function von x, und $S.(-dz + z\frac{dx}{F})M$, welches eine Function der Größen x und z, integrabel iſt. Soll aber $-dz + z\frac{dx}{F}$ integrabel werden, ſo muß $-dz$ in eine Größe M multiplicirt werden, deren Differential $\frac{dx}{F}$. M; denn geſchieht dies nicht, ſo läßt ſich die Gleichung $M.Pdx = -Mdz + Mz\frac{dx}{F}$ nicht beybehalten. Eine ſolche Größe iſt $-e^{S.-\frac{dx}{F}}$, wenn e die Zahl andeutet, deren hyperboliſcher Logarithme = 1. Nimmt man alſo dieſe, ſo entſteht aus $M.Pdx = -Mdz + Mz\frac{dx}{F}$ die Gleichung $-e^{S.-\frac{dx}{F}}.Pdx$ = e

$= e^{S\frac{dx}{F}} dz - e^{S\frac{dx}{F}} \frac{zdx}{F}$; und die Integrale genommen $S\,Pdx.\,e^{S\frac{dx}{F}} = e^{S\frac{dx}{F}}.z$, und

$$z = \frac{S\,Pdx.\,e^{S\frac{dx}{F}} + B}{e^{S\frac{dx}{F}}},$$

in welcher Gleichung die veränderlichen Größen getrennt ſind, und das leztere Glied eine bloſe Function von x und dx. B wird aus der Gleichung beſtimmt, wenn man $z = 0$, und $x = C$ ſezt, wie oben §. 245.

§. 251.

Können gleich dieſe Gleichungen, auch noch ſo genau beſtimmt, in der Ausübung wegbleiben; ſo wollen wir doch die Methode nicht übergehen, nach welcher die Rechnung zu führen, wenn die Centralkraft im Verhältnis einer gegebenen Dignität der Entfernungen vom Mittelpunkt genommen wird, der Widerſtand des Mittels ſich nach dem Verhältnis des

des Quadrats der Geſchwindigkeit richtet, und die Dichtigkeit des Mittels ſelbſt für gleichförmig und in allen Theilen des Mittels für einerley zu achten. Es heiſe alſo die natürliche Schwere 1, die Entfernung, worinn die Centralkraft der Schwere gleich iſt, r, und die Dignität der Entfernung n, ſo wird, wenn $Ab = x$, $r^n : 1 = x^n : \frac{x^n}{r^n}$, welches die wahre Größe der Centralkraft im Punkt b. Dies vorausgeſezt, gehen vorige Gleichungen in folgende über.

1.) Fällt der Körper nach dem Mittelpunkt, ſo wird $dz = - dx \left(\frac{x^n}{r^n} - \frac{z}{c}\right)$, wo c, wie vorhin, die der Geſchwindigkeit, der ein der Schwere gleicher Widerſtand des Mittels entgegengeſezt iſt, zugehörige Höhe bedeutet.

2.) Steigt hingegen der Körper, ſo wird $\left(\frac{x^n}{r^n} + \frac{z}{c}\right) dx = - dz$, weil hier die Geſchwindigkeit beſtändig abnimmt. Dieſe beyden Gleichungen

gen gehen in einander über, wenn man ſtatt + c, — c, und umgekehrt ſezt, wie bereits oben bemerkt worden.

§. 252.

Die allgemeine Gleichung §. 250. war $e^{S\frac{dx}{F}} z = S\, P dx\, e^{S\frac{dx}{F}} + B$. Daraus wird hier beym Fall des Körpers

$$z = \frac{S\, x^n dx . e^{-\frac{x}{c}} + B}{r^n e^{-\frac{x}{c}}} = e^{\frac{x}{c}} \left(S \frac{x^n}{r^n} e^{-\frac{x}{c}} dx + B\right).$$

Und beym Steigen iſt

$$z = e^{-\frac{x}{c}} \left(S \frac{x^n}{r^n} . e^{\frac{x}{c}} dx + B\right).$$

Aber $\int x^n . e^{gx} . dx$, wenn es durch eine Reihe integrirt wird, $= e^{gx} . (\frac{x^n}{g} - \frac{nx^{n-1}}{gg} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{g^3} - \frac{n.n-1.n-2.x^{n-3}}{g^4} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.x^{n-4}}{g^5} - + \text{ꝛc.}) + B$, wo das Fortſchreitungsgeſetz in die Augen fällt. Dieſe Reihe wird aber endlich, ſo oft n eine bejahte ganze Zahl, und dann beſteht die Reihe aus ſo viel Gliedern, als in n Einheiten ſind, + 1. Daher läßt ſich auch z oder $e^{\frac{x}{c}}\ S\frac{x^n}{r^n} . e^{\frac{x}{c}} dx$ integriren. Denn man bekommt $z = e^{-\frac{x}{c}}$

$$(S\frac{x^n}{r^n} . e^{\frac{x}{c}} dx + B) = \frac{1}{r^n} (x^n c - nx^{n-1} c^2 + n.n-1.x^{n-2} c^3 - n.n-1.n-2.x^{n-3} c^4 + - \text{ꝛc.}) + B.$$

Do

$+B.e^{\frac{-x}{c}}$, wenn man nämlich $\frac{1}{c}$ ſtatt g ſezt, wie gegenwärtiger Fall erheiſcht.

§. 253.

Mehrere Fälle laſſen ſich hieraus herleiten, die alle integrabel ſind. Den einzigen wollen wir betrachten, wo $n=1$, und $z=\frac{1}{r}-(xc-c^2)+B.e^{\frac{-x}{c}}$. Hieraus ſchließt man $dt=\frac{dx}{\surd(Be^{\frac{-x}{c}}-\frac{1}{r}(xc-c^2)}$

Daher hängt auch die Zeit von der Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte ab, und dieſem Fall mangelt jene nette Eigenſchaft der Zeit, die wir bey der freyen Bewegung §. 22. erwieſen, daß nämlich die Zeit beſtändig und gleichgroß iſt, die Bewegung mag in größerer oder kleinerer Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte beginnen.

§. 254.

Hier iſt aber zu merken, daß eben dieſe Eigenſchaft der Zeit, nach welcher ſie beſtändig, ob ſie gleich in gegenwärtiger Hypotheſe wegfällt, doch bey

bey einem andern Geſetz der Kräfte Statt findet: ungeachtet des dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportionalen Widerſtandes des Mittels. Laßt uns kürzlich unterſuchen, was für ein Geſetz der Kräfte zu dem Ende erfordert wird, und zu der allgemeinen Gleichung §. 250. zurückgehen, $z =$

$$\frac{\int -Pdx . e^{\int -\frac{dx}{F}} + B}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}.$$

Laßt uns der Kürze wegen ſetzen $\int - Pdx . e^{\int -\frac{dx}{F}} = X$, und wir haben $z = \frac{B-X}{e^{\int -\frac{dx}{F}}}$, oder $z = e^{\int . \frac{dx}{F}} (B-X)$.

§. 255.

Demnach wird die Zeit $dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$$\frac{dx}{\sqrt{(e^{S.\frac{dx}{F}}(B-X)}} = a,$$ wenn durch a eine beſtändige Größe verſtanden wird; denn die vorliegende Aufgabe erfordert, daß die Zeit des Falles überall einerley iſt. Es kömmt alſo darauf an, daß

$$\frac{dx}{\sqrt{(e^{S.\frac{dx}{F}}(B-X)}}$$ eine ſolche Function wird, deren Integral, was auch B und X für Veränderung leiden, beſtändig iſt. Dies erhalten wir, wenn wir ſetzen $\frac{dx}{\sqrt{e^{S.\frac{dx}{F}}}} = \frac{bdx}{\sqrt{X}}$: alsdenn bekommt man

$$\frac{dx}{\sqrt{(e^{S.\frac{dx}{F}}(B-X)}} = \frac{bdX}{\sqrt{(BX-XX)}},$$ und t = $S.\frac{bdX}{\sqrt{(BX-XX)}}$. Aber $S.\frac{\frac{1}{2}BdX}{\sqrt{(BX-XX)}}$ ein Kreisbogen,

bogen, deſſen Abſciſſe X oder $S.\,Pdx.\,e^{S - \frac{dx}{F}}$, und der Durchmeſſer B. Dieſer Bogen geht für die ganze Bewegung, wenn $B = X$, in den Halbkreis über, daß alſo die ganze Zeit des Falles wird $\frac{b}{2B}$

$$S.\,\frac{\frac{1}{2}BdX}{\sqrt{(BX - XX)}} = \frac{bp}{2},$$

das Verhältnis des Durchmeſſers zum Umkreis $= 1 : p$ geſezt.

Dies alſo beſtimmt, wird die Centralkraft ohne Schwierigkeit gefunden. Denn da $\frac{dx}{\sqrt{e^{S. - \frac{dx}{F}}}} = \frac{bdX}{\sqrt{X}}$, ſo wird $S.\,\frac{dx}{\sqrt{e^{S. - \frac{dx}{F}}}} = 2b\sqrt{X} =$

$$2b\sqrt{S.\,Pdx.\,e^{S - \frac{dx}{F}}},$$

folglich $\left(S.\,\frac{dx}{\sqrt{e^{S. - \frac{dx}{F}}}}\right)^2 =$

 $4b^2$.

$4b^2 . S. Pdx. e^{-S.\frac{dx}{F}}$. Daher die Differentiale genommen, erhält man $\frac{2dx}{e^{S.\frac{dx}{2F}}} . S. \frac{dx}{e^{S.\frac{dx}{2F}}} = 4b^2 . Pdx. e^{-S.\frac{dx}{F}}$, daraus man endlich bekommt $P = \frac{e^{S.\frac{dx}{2F}}}{2b^2} . S. \frac{dx}{e^{S.\frac{dx}{2F}}}$.

§. 256.

Setzet nun F beſtändig = c, welches Statt findet, wenn die Dichtigkeit des Mittels überall einerley; ſo wird $S. \frac{dx}{2F}$ integrabel und $= \frac{x}{2F}$, und $P = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2} . S. \frac{dx}{e^{\frac{x}{2F}}} = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2} (-2F. e^{\frac{-x}{2F}} + B)$ oder

P =

$$P = \frac{e^{\frac{x}{2F}}}{2b^2}\left(2F - 2F.\,e^{\frac{-x}{2F}}\right), \text{ oder } P = \frac{F}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2F}} - 1\right) = \frac{e}{b^2}\left(e^{\frac{x}{2F}} - 1\right).$$

Hieraus ſieht man, daß für den ganzen Fall, wo $x = 0$, auch $P = 0$, folglich die Kraft ſelbſt im Mittelpunkt verſchwindet, welche Hypotheſe aber der Natur zuwider.

Zweyter Theil.

Von der krummlinigten Bewegung in widerſtehenden gleichförmigen Flüßigkeiten.

Inhalt.

1.) Bey parallelen Richtungen der Kräfte.

§. 257. 258. Allgemeine Regeln. §. 259. — 274. Kalkul überhaupt, wenn die Kräfte beſtändig, und der Widerſtand ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit. Wurflinie, die geworfene Körper in der Luft beſchreiben. §. 275. Bey beſtändigen Kräften aus der bekannten Natur der Wurflinien das Geſetz des Widerſtands zu finden. §. 277. Eben dieſes allgemeiner. §. 278. Aus den widerſtehenden Kräften und der Wurflinie das Geſetz der beſchleunigenden Kräfte zu finden.

2.) Bey nicht parallelen Richtungen der Kräfte.

§. 279. — 286. Geſchwindigkeit, Zeit und Wurflinie überhaupt. §. 283. Das Geſetz der Kräfte zu beſtimmen, um

um eine Wurflinie zu beſchreiben, die frey ſich bewegende Körper beſchreiben würden. §. 284. Aus dem gegebenen Widerſtand und der Wurflinie die Kräfte, und §. 285. aus den gegebenen Kräften und der Kurve, das Geſetz des Widerſtands zu beſtimmen.

§. 257.

Eben die Gründe und Gleichungen, worauf das, was wir von den Centralkräften überhaupt §. 158. ꝛc. abgehandelt haben, beruht, ſind auch hier anzuwenden. Denn ſo oft eine krummlinigte Bewegung angetroffen wird, werden allemal zwo Kräfte erfordert, wovon die eine in der Richtung der Tangente, die andere in einer andern Richtung wirkt. Dieſe leztere Kraft wollen wir in gegenwärtigem allein betrachten, und ſie als nach einem Mittelpunkt wirkende Centralkraft annehmen; denn andere Richtungen derſelben anzunehmen, iſt unnöthig. Unter den Centralkräften wählen wir die beſtändigen, wie die Schwere. Bey Vorausſetzung anderer gelangt man ſelten zu Differentialgleichungen, die ſich integriren laſſen, ſondern entweder in Reihen aufgelöſt, oder durch Beſchreibungen von Kurven verzeichnet werden müſſen; die alſo von keinem großen Nutzen ſind.

§. 258.

Betreten wir eben den Weg, wie §. 158. f.f. ſo erhellt, daß die ganze Centralkraft K in zwo andere Kräfte zerlegt zu betrachten, wovon die eine nach der Tangente wirkt, die andere auf die Kurve, oder auf die Tangente im Berührungspunkt ſenkrecht iſt. Demnach iſt mit Beybehaltung der oben gebrauchten Zeichen §. 158.

1.) Die

1.) Die Tangentialkraft $= \frac{Kdy}{ds}$.

2.) Die Normalkraft $= \frac{Kdx}{ds}$.

§. 259.

Nur die erſte Kraft wird vom Widerſtand des Mittels verändert, denn nach der Tangente rückt der Körper mit ſeiner Geſchwindigkeit fort. Heißt alſo der Widerſtand des Mittels R, ſo iſt die Tangentialkraft $= \frac{Kdy}{ds} - R$. Aus welcher Gleichung, hier auch, wie §. 158. geſchloſſen wird:

1.) daß die Gleichung für die Tangentialkraft überhaupt $\left(\frac{Kdy}{ds} - R\right) ds = vdv = dz$, wenn durch z die der unbeſtimmten Geſchwindigkeit v zugehörige Höhe verſtanden wird.

2.) Die Gleichung aber für die Normalkraft iſt hier völlig wie §. 158. $Krdx = 2zds$, oder $K\frac{dx}{ds} = \frac{2z}{r}$. Aus dieſen beyden Gleichungen iſt die Differentialgleichung für die Kurve faſt auf eben die Art, wie oben §. 159. 162. zu ſuchen.

§. 260.

Dies wollen wir mit Beyſpielen erläutern, wo die Centralkraft beſtändig, des Mittels Dichtigkeit überall einerley, und der Widerſtand ſich verhält, wie das Quadrat der Geſchwindigkeit; auch der Mittelpunkt der Kräfte unendlich weit entfernt iſt, oder kürzer zu reden; wo die in beſagtermaßen widerſtehenden Mitteln geworfenen Körper von beſtändigen Kräften, wie unſere Schwere getrieben werden: Dieſe Fälle ſind die nützlichſten.

Es ſey ALB (Taf. XI. Fig. 9.) die Kurve, die der geworfene Körper, während der Bewegung zurücklegt, die geraden Linien cD, EF ſtellen x, die ſenkrechten cG, EH, y vor. Ferner iſt $K = G$, und der Widerſtand des Mittels $= \frac{z}{c}$, wenn man durch z die der Geſchwindigkeit in E zugehörige Höhe verſteht, und durch c die Höhe, die der Geſchwindigkeit zukommt, wodurch wenn der Körper damit verſehen, des Mittels Widerſtand unſerer Schwere gleich iſt.

Dies vorausgeſezt, gehen die §. 259. gegebenen Gleichungen in zwo andere über.

1.) Für die Tangentialkraft $- Gdy - \frac{z}{c} ds = dz$.

2.) Für die Normalkraft $G \frac{dx}{ds} = \frac{2z}{r}$. Sezt

man

man dx beſtändig, ſo iſt $r = \frac{-ds^3}{dxddy}$, folglich $\frac{Grdx}{ds} = 2z = -\frac{Gds^2}{ddy}$, und $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$.

§. 261.

Um aber die Geſchwindigkeit zu beſtimmen, muß G aus der Gleichung der Tangentialkraft gefunden werden: nun iſt $G = -\frac{dz - \frac{z}{c} ds}{dy} = \frac{2zddy}{ds^2}$, daraus wieder $cdz = \frac{2czddydy - zds^3}{dy^2}$, oder $\frac{cdz}{z} = \frac{2cddydy - ds^3}{ds^2}$.

Da aber dx beſtändig, und $dy^2 + dx^2 = dx^2$, ſo wird $dsdds = dyddy$, und $\frac{dz}{z} = \frac{2dds - \frac{ds^2}{c}}{ds}$.

Daher $\text{Log. } z = S. \frac{2dds}{ds} - \frac{s}{c}$, oder Log. z

2 Log.

$2 \, Log. \, ds - \frac{s}{c}$. Aber Log. z eine endliche Größe, und man bekommt $Log. \, z = 2 \, Log. \, ds - 2 \, Log. \frac{dx}{\sqrt{n}} - \frac{s}{c}$, oder $Log. \, z. \frac{dx^2}{nds^2} = -\frac{s}{c}$; daher

$$\frac{z}{n} . \frac{dx^2}{ds^2} = e^{\frac{-s}{c}}, \text{ und } \frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2} . e^{\frac{-s}{c}}.$$

§. 262.

Aus der gefundenen Geſchwindigkeit ſucht man gewöhnlichermaßen die Zeit. Denn man hat

$$dt = S. \frac{ds}{\sqrt{z}} = S. \frac{dx . e^{\frac{s}{2c}}}{\sqrt{n}}.$$

§. 263.

Auch die Kurve wird beſtimmt. Denn $z = \frac{nds^2}{\quad}$. §. 261. und da $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$, ſo iſt z

$$dx^2 . e^{\frac{s}{c}}$$

$= -$

$= - \frac{Gds^2}{2ddy}$, folglich $\frac{n}{dx^2 . e^{\frac{s}{c}}} = - \frac{G}{2ddy}$, und

daher wieder $2nddy = - G . e^{\frac{s}{c}} . dx^2$, welches die Gleichung für die Kurve. Denn da G beſtändig geſezt, welches auch, wenn man will, eine Function von y ſeyn kann, ſo enthält dieſe Gleichung keine Linien, als die zur Kurve gehören.

§. 264.

Verwandelt man dieſe Gleichung in eine Reihe, ſo erhellt, von was für einer Form dieſe Reihe ſeyn muß, damit wenn $c = \infty$, $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - -$ ꝛc. Demnach muß ſeyn $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - -$ ꝛc. Daher $dy = \alpha dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx - 4\delta x^2 dx - -$ ꝛc. Und da dx für beſtändig gehalten wird, ſo iſt $ddy = - 2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2 - 12\delta x^2 dx^2 - -$ ꝛc.

Ferner iſt $ds^2 = dx^2 + dy^2$, daher $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \alpha^2 dx^2 - 4\alpha\beta x dx^2 + 4\beta^2 x^2 dx^2 - +}$ ꝛc.) folglich $ds = dx\sqrt{(1 + \alpha^2)} - \frac{2\alpha\beta x dx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + -$ ꝛc. Daher auch $e^{\frac{s}{c}} = e^{\frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}}$

$-\frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}}$ ꝛc. weil $s = x\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{\alpha\beta x^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + -$ ꝛc.

Da aber $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^4} + +$ ꝛc. ſo wird, den Werth von s in eine unendliche Reihe aufgelößt, $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c} - \frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{x^2(1+\alpha^2)}{2c^2} - +$ ꝛc.

Wendet dieſen Werth in der Gleichung $2nddy = -Ge^{\frac{s}{c}}dx^2$ an. Setzet x gegen c ſehr klein, und werfet alle Glieder der Reihe weg, worinn eine Dignität von x, die die zweyte überſteigt, und ihr bekommt $2n(2\beta + 6\gamma x + 12\delta x^2 = G\,1 + \frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}$

$$-\frac{\alpha\beta x^2}{c\Gamma(1+\alpha^2)}+\frac{x^2(1+\alpha^2)}{2c^2}$$; welche Gleichung algebraiſch iſt, wo aber die Coefficienten beſtimmt werden müſſen.

§. 265.

Dies Geſchäft zu erleichtern, können die durch c^2 dividirte Glieder weggelaſſen werden: denn da x ſehr klein, ſo ſind dieſe Glieder für nichts zu achten, wenn c ſehr groß; was man in der Luft zum Theil annehmen kann. Alsdenn aber wird $4n\beta+12n\gamma x$

$$+24n\delta x^2-G-\frac{G\Gamma(1+\alpha^2)}{c}+\frac{G\alpha\beta x^2}{c\Gamma(1+\alpha^2)}=0;$$

und da G beſtändig, ſo hat man

$$0=\begin{matrix}4n\beta\\-G\end{matrix}\;\begin{matrix}+12n\gamma x\\-\frac{G\Gamma(1+\alpha^2)x}{c}\end{matrix}\;\begin{matrix}+24n\delta x^2\\+\frac{G\alpha\beta x^2}{c\Gamma(1+\alpha^2}\end{matrix}$$

Hieraus ſchließt man

1.) $4n\beta-G=0$, und $\beta=\frac{G}{4n}$.

2.) $12n\gamma-\frac{G\Gamma(1+\alpha^2)}{c}=0$, u. $\gamma=\frac{G\Gamma(1+\alpha^2)}{12nc}$

3.) $24n\delta + \frac{G\alpha\beta}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}} = 0$, und $\delta = -$ $\frac{G\alpha\beta}{24nc\sqrt{(1+\alpha^2)}} = - \frac{\alpha G^2}{96n^2c\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, weil β $= \frac{G}{4n}$.

§. 266.

In dieſen Werthen von β, γ, δ aber iſt die Größe noch unbekannt. Sie wird daraus beſtimmt, daß, wenn man in der für die Kurve angenommenen Gleichung $y = \alpha x - \beta x^2 - -$ ꝛc. daraus $dy = \alpha dx - 2\beta x dx -$ ꝛc. $x = 0$ ſezt, $dy = \alpha dx$, und $\frac{dy}{dx} = \alpha$. Aber $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels hAG, den der geworfene Körper mit dem Horizont im Punkte des Wurfs A macht; der folglich als bekannt anzuſehen.

Auch findet man n aus der Geſchwindigkeit, womit der Körper im Punkt A geworfen worden. Denn $z = \frac{nds^2}{dx^2} . e^{\frac{-s}{c}}$, und $s = 0$ geſezt,

z =

$z = \frac{nds^2}{dx^2} = \frac{n(\alpha^2+1)dx^2}{dx^2} = n(\alpha^2+1)$. Demnach iſt in A, $z = C = n(\alpha^2+1)$, und $n = \frac{C}{\alpha^2+1}$.

§. 267.

Hieraus erhellt, daß dieſe Wurflinie eine algebraiſche Linie höhern Grads iſt, nachdem wir c im Verhältnis zu x größer oder kleiner, und mehr oder weniger Glieder der obigen unendlichen Reihen nehmen. Die hier beſtimmte iſt von der vierten Ordnung. Denn aus dem, was wir §. 264. and 265. angenommen, folgt, daß in der Gleichung $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 - -$ ꝛc. alle Glieder bis auf das, deſſen Coefficient δ, verſchwinden. Da aber ſtatt n deſſen Werth geſezt, $\delta = -\frac{\alpha G^2(\alpha^2+1)^2}{96cC^2\sqrt{(\alpha^2+1)}}$, ſo iſt offenbar δ ſehr klein, ſo oft die Geſchwindigkeit, womit der Körper in A geworfen worden, ſehr groß iſt: denn alsdenn iſt die Größe cC^2 im Verhältnis gegen die übrigen ſehr groß. Hierdurch wird die Gleichung einfacher: denn $y = \alpha x - \frac{G(1+\alpha^2)x^2}{4C}$

$$-\frac{G(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}.x^3}{12cC}.$$

§. 268.

Sezt man endlich $c = \infty$, ſo wird $y = \alpha x - \frac{G(1+\alpha^2)x^2}{4C}$. Dies iſt aber die Gleichung für die Parabel, wie ſie es auch nach dem, was wir im vorigen ausführlicher vorgetragen, im nicht widerſtehenden Mittel ſeyn muß.

§. 269.

Was für eine von dieſen Linien, die alle zur Beſtimmung der Bewegung im widerſtehenden Mittel dienen, wir auch annehmen, ſo wird doch die **größte Horizontalweite** des Wurfs AB in allen auf einerley Art gefunden; wenn nämlich in der algebraiſchen Gleichung $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - -$ ꝛc. $y = 0$ geſezt wird, und der Neigungswinkel in der Richtung des Wurfs gegeben iſt. Nimmt man die Linie aus der dritten Ordnung, ſo wird $\alpha = \beta x + \gamma x^2$, folglich $x = \pm \frac{\sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2} - \beta}{2\gamma}$, welche Größe, vermöge des §. 266. 267. erwieſenen, von der Tangente des Neigungswinkels, und von der Geſchwindigkeit im Punkt A abhängt.

§. 270.

Iſt α veränderlich, aber die Geſchwindigkeit in A beſtändig: ſo findet man doch x. §. 269. Und auf eben die Art findet man die Wurfslänge für alle Neigungswinkel, wenn die Geſchwindigkeit einerley iſt.

§. 271.

Man ſoll die größte **Wurfslänge** bey einerley Geſchwindigkeit finden. Zu dem Ende muß man dx, oder das Differential der Größe

$$\frac{\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}-\beta}{2\gamma}, = 0,$$

und ſtatt der Größen β und γ ihre vorhin gefundenen Werthe ſetzen. Alsdenn wird

$$x = \frac{1}{2(1+\alpha^2)}.\frac{\sqrt{(9c^2G(1+\alpha^2)+48\alpha Cc\sqrt{(1+\alpha^2)})}}{\sqrt{G}} - \frac{\frac{3}{2}c}{\sqrt{(1+\alpha^2)}},$$

und iſt $1+\alpha^2 = q$, ſo wird $0 = dx = -9c^2G\sqrt{q}.\alpha d\alpha - 48Cc\alpha^2 d\alpha + 24Ccd\alpha + 3c\sqrt{G}.\alpha d\alpha.\sqrt{(9c^2Gq+48\alpha Cc\sqrt{q})}$.

Daher $3cG\alpha\sqrt{q}+16C\alpha^2-8C = \alpha.\sqrt{G}.\sqrt{(9c^2Gq+48\alpha Cc\sqrt{q})}$, oder $4C(1-2\alpha^2)^2 = 3\alpha cG(1-\alpha^2).\sqrt{(1+\alpha^2)}$, aus welcher Gleichung die Tangente des zur größten Länge erforderlichen Erhöhungswinkels zu finden.

§. 272.

Iſt c im Verhältnis zu C unendlich groß, welches bey freyer ungehinderter Bewegung Statt findet; ſo wird $1-\alpha^2 = 0$, und $\alpha = 1$. Demnach erfordert die größte Wurfslänge den Winkel 45°, wie wir oben auch gefunden. Iſt aber C in Vergleichung mit c nicht auſer Acht zu laſſen, ſo wird $3\alpha Gc(1-\alpha^2).\sqrt{(1+\alpha^2)}-4C(1-2\alpha^2)^2=0$, woraus

raus erhellt, daß $\quad < 1$. Demnach muß im wi-derſtehenden Mittel der Winkel, unter wel-chem die horizontale Wurfslänge am größten, kleiner als 45° ſeyn, und 45° immer näher kommen, je kleiner das Verhältnis C : c wird.

§. 273.

Der Punkt L aber, wo die größte Höhe des Wurfs, wird gefunden, wenn man ſezt $dy = 0$, weil die Tangente in L horizontal liegen muß. Man bekommt alſo in gegenwärtigem Fall $\frac{\alpha}{3\gamma} = x^2 + \frac{2\beta}{3\gamma}x$, oder $x = \frac{\sqrt{(3\alpha\gamma+\beta^2)}-\beta}{3\gamma}$.

§. 274.

Da überhaupt $x = \frac{\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}-\beta}{2\gamma}$. §. 269. $= \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \cdot \frac{\sqrt{(9c^2G(1+\alpha^2)+48\alpha Cc\sqrt{(1+\alpha^2)})}}{\sqrt{G}} - \frac{\frac{3}{2}c}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, ſo ſehen wir, daß ſich die Größe c, aus der gegebenen Länge eines Wurfs, nebſt dem Neigungswinkel und der Geſchwindigkeit in A beſtimmen läßt. Daher läßt ſich wiederum die Geſchwindigkeit finden, womit, wenn ſich der Körper bewegt, der Widerſtand der Schwere gleich iſt.

§. 275.

§. 275.

Aus der gegebenen Kurve, wodurch ſich der Körper im widerſtehenden Mittel bewegt, findet man c bey jeglichem Widerſtand des Mittels. Denn man hat $G = -\frac{2zddy}{ds^2}$, §. 260. Daher $z = -\frac{Gds^2}{2ddy}$, und $dz = \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$. Aber $dz = -Gdy - Rds$, §. 259. Daher $-Gdy - Rds = \frac{-2Gdyddy^2 + Gds^2d^3y}{2ddy^2}$, und $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$. Dieſe leztere Gleichung giebt auch c, wenn der Widerſtand gegeben iſt.

Denn iſt z. B. $R = \frac{z}{c}$, wie in der Luft, ſehr nahe, ſo wird, weil $z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$, $R = \frac{-Gds^2}{2cddy} = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$, und $c = \frac{dsddy}{d^3y}$. In dieſem Werthe aber ſind keine andere Größen, als die, ſo vermöge der Natur der Kurve gegeben ſind.

§. 276.

Hieraus ſieht man auch, wie aus der gegebenen Wurfslinie, worinn ſich der Körper bewegt, der zur Bewegung in dieſer Kurve erforderliche Widerſtand bey beſtändiger beſchleunigenden Kraft beſtimmt wird. Denn $R = \frac{-Gdsd^3y}{2ddy^2}$.

Doch wollen wir uns hierbey länger nicht aufhalten, noch alles vortragen, was von andern hierüber geſagt worden,*) da der Nutzen davon geringer iſt, als wir wünſchten. Dies wollen wir nur bemerken, daß im widerſtehenden Mittel nie eine Parabel beſchrieben werden kann, weil in dieſer Kurve ſeyn muß $d^3y = R = 0$, daß ſie aber bey freyer Bewegung und beſtändiger beſchleunigenden Kraft beſchrieben wird, iſt zugleich offenbar.

§. 277.

Auch läßt ſich die beſchleunigende Kraft als veränderlich anſehen, nach was für einem Geſetz ſie ſich auch richtet; und man findet R eben ſo leicht, wie vorhin, wenn das Geſetz der Kräfte gegeben iſt, und die Richtungen der Kraft unveränderlich und parallel ſind. Man darf nur in der Gleichung §. 275.

$z = \frac{-Gds^2}{2ddy}$ die Größe G veränderlich annehmen, und die Gleichung eben ſo, wie vorhin §. 275. behandeln.

*) S. Eulers Mechanic. Tom. I. C. 6. und Newton's Princip. Phil. Nat. Lib. 2. Sect. 6.

handeln. Es wird nämlich $R = \frac{dGdsddy - Gdsd^3y}{2ddy^2}$.

Hieraus läßt ſich der zur Hervorbringung der Bewegung in einer Kurve erforderliche Widerſtand beſtimmen, was für ein Geſetz der beſchleunigenden Kräfte man auch annimmt.

§. 278.

Aus dem gegebenen Widerſtand des Mittels aber und der Kurve, worinn ſich der Körper bewegt, findet man die Kräfte, die in vertikalen Richtungen wirkend zuwege bringen können, daß die Bewegung in der gegebenen Kurve geſchieht und beybehalten wird. Denn da §. 261. $G = \frac{-2zddy}{ds^2}$,

und $\frac{z}{n} = \frac{ds^2}{dx^2} . e^{\frac{-s}{e}}$, ſo wird hier $G = \frac{-2ddy}{dx^2}$.

$$ne^{\frac{-s}{c}}.$$

2.) Von der krummlinigten Bewegung im gleichförmig widerſtehenden Mittel, wenn die Richtungen der Kräfte nicht parallel ſind.

§. 279.

Stoßen die Kräfte nach einem feſten Mittelpunkt, ſo dienet die im vorhergehenden §. 158. gebrauchte

brauchte Methode auch hier. Wir wanden dort die Gleichung an, $\frac{Kdy}{2z} = \frac{dp}{p}$, wodurch die Normalkraft aus dem auf die Tangente gefällten Loth gegeben wird; zugleich haben wir für die Bewegung in der Tangente eben die Gleichung, wie §. 259. nämlich $dz = -Kdy - Rds$.

§. 280.

Iſt alſo der doppelte Werth der Kraft K aus dieſen beyden Gleichungen gefunden, ſo läßt ſich auch die Geſchwindigkeit beſtimmen. Denn man bekommt $K = \frac{2zdp}{pdy} = \frac{dz+Rds}{-dy}$, folglich $\frac{-pdz-2zdp}{Rp} = ds$, und aus dieſer Gleichung iſt die Geſchwindigkeit zu ſuchen.

Es ſey nun $R = \frac{z}{c}$, welches, wie ſchon oft geſagt, in der Luft Statt findet, ſo wird $-\frac{cdz}{z} - \frac{2cdp}{p} = ds$: daher $-c\,\text{Log.}\,z - c\,\text{Log.}\,p^2 = s$, oder $\text{Log.}\,zp^2 + B = -\frac{s}{c}$. Die beſtändige

Größe

Größe B findet man daraus, daß, $s = 0$ geſezt, $z = C$, und $p = h$ wird; daraus folgt $\mathrm{Log.}\ \frac{zp^2}{Ch^2} = -\frac{s}{c}$, und $\frac{zp^2}{Ch^2} = e^{-\frac{s}{c}}$, alſo $z = \frac{e^{-\frac{s}{c}}.Ch^2}{p^2}$.

Vergleicht man dieſe Geſchwindigkeit mit der Geſchwindigkeit der freyen Bewegung, ſo ſieht man, daß ſie ſich, da ſie bey ungehinderter Bewegung ſich verkehrt verhält, wie das Loth auf die Tangente, hier auch umgekehrt verhält, wie ein Theil dieſes Loths, der durch $\frac{e^{\frac{s}{2c}}}{Ch^2}$ ausgedrückt wird. Dieſe Geſchwindigkeit aber beruht zugleich auf der Länge des von dem bewegten Körper bereits zurückgelegten Raums.

§. 281.

Aus der Geſchwindigkeit findet man die Zeit. Denn man bekommt die Geſchwindigkeit aus der Gleichung $-\frac{(pdz+2zdp)}{Rp} = ds$, oder $-p^2dz - 2zpdp = Rp^2ds$, davon das Integral $p^2z =$

$S.—Rp^2ds$. Daher $\sqrt{z} = \frac{\sqrt{S.—Rp^2ds}}{p}$, wo wir

ſetzen $\frac{e^{-\frac{s}{c}}}{p^2} . Ch^2 = z$. Aber $t = S. \frac{ds}{\sqrt{z}}$.

Iſt $R = \frac{z}{c}$, ſo wird $t = S. \frac{ds.\, e^{\frac{s}{2c}}\, p}{h\sqrt{C}} + B.$

§. 282.

Auch die Kurve ſelbſt wird mit leichter Mühe beſtimmt. Denn iſt z gefunden, und K eine Function der Größe y, ſo iſt ihr Werth in der Gleichung für die Normalkraft, $\frac{Kdy}{2z} = \frac{dp}{p}$ zu ſetzen. Dann gelangen wir zu einer neuen Gleichung, die blos die zur Kurve gehörigen Größen enthält.

Verhält ſich der Widerſtand wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, ſo erhalten wir $\frac{Kdy.\, e^{\frac{s}{c}}}{2Ch^2} =$

$\frac{dp}{p^3}$. Man ſetze $K = y^n$, ſo wird $\frac{y^n dy.\, e^{\frac{s}{c}}}{2Ch^2} = \frac{dp}{p^3}$.
Dieſe Gleichung deutet überhaupt die Centralkräfte an, wenn ſie ſich nach einer Potenz der Entfernungen richten. Die Größe s kann ausfallen. Denn $ds = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$, und wir haben folgende Gleichung

$$\frac{y^n dy.\, e^{\frac{S.\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}}{c}}}{2Ch^2} = \frac{dp}{p^3}$$

§. 283.

Vergleicht man die Gleichung des vorigen §. $Kdy.\, e^{\frac{s}{c}} = \frac{2Ch^2dp}{p^3}$, mit der oben §. 163. gefundenen, $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$, wo B und b eben das bedeuten, was in erſterer C und h, ſo ſieht man, daß die

die Kraft $K.\,dy.\,e^{\frac{s}{c}}$ im widerſtehenden Mittel zuwege bringen kann, daß eben die Kurve beſchrieben wird, die bey freyer Bewegung, wenn die Kraft K iſt, beſchrieben wird. Denn ſezt man dort die Kraft $Kdy.\,e^{\frac{s}{c}}$, und hier K, ſo entſteht eben die Kurve $Kdy = \frac{2Bb^2dp}{p^3}$.

§. 284.

Aus der gegebenen Kurve und dem Geſetz des Widerſtands findet man nach dem vorhergehenden die Kraft, wodurch im widerſtehenden Mittel die gegebene Kurve beſchrieben wird. Denn nach §. 280. iſt die Centralkraft $K = \frac{2zdp}{pdy}$, und nach §. 281. iſt $z = \frac{S. - Rp^2ds}{p^2}$, daher überhaupt $K = \frac{2S. - Rp^2ds.\,dp}{p^3dy}$.

§. 285.

Eben ſo findet man das Geſetz des Widerſtandes, der erfordert wird, wenn der Körper, von einer gegebenen Centralkraft getrieben, eine gegebene Kurve

Kurve im widerſtehenden Mittel beſchreiben ſoll. Hierzu iſt die Methode §. 276. 277. hinreichend. Denn $\frac{Kpdy}{2dp} = z$. §. 279. Iſt alſo K durch y, oder durch die Größen, die zur Kurve gehören, gegeben; ſo iſt auch z und dz eine Function der Größen, die die Kurve beſtimmen, und enthält keine andere. Sezt man dieſe Werthe der Größen z und dz in der Gleichung §. 280. $\frac{-(pdz+2zdp)}{Rp} = ds$, ſo wird $R = \frac{-pdz-2zdp}{pds}$, wo die Werthe z und dz, wie geſagt, Functionen ſind, die blos zur Kurve gehörige Größen enthalten.

§. 286.

Aus dieſen allgemeinen Gleichungen laſſen ſich mancherley Folgen in beſondern Fällen herleiten, *) wobey wir uns doch nicht aufhalten wollen: in den meiſten kommt man nicht über die Differentialgleichungen hinaus; folglich wird der Zweck dieſer Betrachtungen, die Gründe der Naturlehre und Sternkunde zu entwickeln, nicht erreicht; ſind ſie gleich aus andern Urſachen nicht unnütz. Auch wird das, was ſich von der Bewegung, dem Widerſtande und dem Geſetz der Kräfte daraus folgern läßt, denen nicht ſchwer fallen, die gern mit Gleichungen umgehen, wofern ihnen nur die Rechnungsarten der Analyſis geläufig ſind.

Dritter

*) Vergl. Eulers Mechanic. a. a. O.

Dritter Theil.

Vom Fall und Steigen, ſowohl durch krumme als gerade Linien in widerſtehenden Mitteln, wo die beſchleunigenden Kräfte beſtändig, und ihre Richtungen parallel ſind.

Inhalt.

§. 287. — 289. Fall und Steigen bey jedwedem Widerſtand, insbeſondere dem im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit. §. 290. — 300. Fall und Steigen durch geneigte Ebenen. §. 300. Allgemeine Eigenſchaft der Bewegung in Kurven. §. 301. Die größte Geſchwindigkeit des fallenden Körpers iſt hier nicht im Punkt der Linie, wo die Tangente horizontal, ſondern in einem andern. §. 302. Zeit der Bewegung. §. 303. 304. Steigen im widerſtehenden Mittel überhaupt. §. 305. Die Bewegung in der Radlinie im widerſtehenden Mittel iſt nicht gleichzeitig, wo nicht die Geſchwindigkeit des Körpers ſehr klein.

§. 287.

Was wir oben im Zuſatz zur dritten Vorleſung abgehandelt haben, iſt von dem, was im gegenwärtigen zu bemerken, nur darinn unterſchieden, daß hier auch auf den Widerſtand Rückſicht zu nehmen, der von der Geſchwindigkeit des Körpers entſteht, womit er ſich gegen das widerſtehende Mittel bewegt; da dort kein anderer Widerſtand in Betracht gezogen wurde, als der, den die Linie ſelbſt verurſacht, worinn ſich der Körper fortbewegt. Daher haben die §. 32. 33. angegebenen Werthe der Kräfte auch hier Statt; nur iſt folgendes zu merken: Die ſenkrecht auf die Kurve wirkende Normal-

kraft wird durch des flüßigen Mittels Widerſtand nicht verändert. Dieſe iſt nichts als Druck, der nicht mit einer endlichen und beſtimmten Geſchwindigkeit wirkt; was man hingegen bey der Tangentialkraft wahrnimmt, die alſo auch allein von der Kraft des widerſtehenden Mittels verändert werden muß. **Die Aenderung der Tangentialkraft aber geht hernach in die Normalkraft über.** Denn mit der Geſchwindigkeit in der Richtung der Tangente vermindert ſich zugleich der Theil der Normalkraft, der die Fliehkraft iſt, wie aus dem, was wir §. 178. f. f. geſagt haben, bekannt iſt.

§. 288.

Es ſey nun AB (Taf. XI. Fig. 1.) die Kurve, worinn der Körper fällt, ſo wird hier alles auf ähnliche Art, wie §. 32. 33. beſtimmt, wenn man nur in Acht nimmt, daß hier x mit dortigem y einerley iſt, und umgekehrt. Denn leztere Bezeichnungsart iſt bequemer. Sezt man alſo AD = x, DE = y, und die ganze Kraft = G, ſo iſt der Theil derſelben, der in der Richtung der Tangente wirkt, $= \frac{gdx}{ds}$, wenn der Körper von A nach B fällt; und $= -\frac{gdx}{ds}$, wenn er von B nach A aufwärts ſteigt. Dieſe Kraft wird aber vom Widerſtand des Mittels R vermindert oder vermehrt, nachdem die Bewegung nieder- oder aufwärts gerichtet iſt, daß alſo die ganze Kraft nach der Tangente $\frac{\pm gdx}{ds} - R$.

Ferner

Ferner heiſe $\sqrt{z}$ die Geſchwindigkeit in einem Punkt der Kurve, z. B. in E, und z die ihr zugehörige Höhe, ſo iſt überhaupt $\left(\frac{\pm gdx}{ds} - R\right) ds = dz$.

§. 289.

Hier wäre es überflüßige und, wenige Fälle ausgenommen, unnütze Arbeit, wenn wir auch andere Gattungen des Widerſtandes, auſer dem, der dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportional iſt, betrachten wollten. Setzet alſo $R = \frac{z}{c}$, und es wird beym Fall $gdx - \frac{z}{c} ds = dz$.

§. 290.

Das einfachſte Beyſpiel iſt, wenn der Fall in ſchiefliegenden geraden Linien geſchieht. Die Linie ſey AB (Taf. XII. Fig. 2.), der Coſinus des Winkels $BAC = \frac{1}{\alpha}$, der ganze Sinus $= 1$, ſo iſt in der geraden Linie $\alpha dx = ds$. Daher $dz = gdx - \frac{\alpha z}{c} dx$, und $\frac{cdz}{gc - \alpha z} = dx$, davon das Integral $x = -\frac{c}{\alpha} \text{Log.} (gc - \alpha z) + B$.

Bey

Bey Beſtimmung der beſtändigen Größe B ſind hier zwo Arten der Bewegung zu unterſcheiden: 1.) wenn der Körper die Bewegung in A von der Ruhe ohne einige Geſchwindigkeit beginnt. Denn muß $x = 0$ geſezt, $z = 0$ ſeyn; daher wird $B = \frac{c}{\alpha}$ Log. gc,

und $x = \frac{c}{\alpha}$ Log. gc $- \frac{c}{\alpha}$ Log. (gc $- \alpha z$, oder

$$x = \frac{c}{\alpha} \text{ Log. } \frac{gc}{gc - \alpha z}.$$

2.) Wenn der Körper in A, ſo der Anfang des Falles, mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit verſehen iſt, ſie ſey z. B. die, der die Höhe C zugehört. Hier wird $x = 0$ geſezt, $z = C$, folglich $B = \frac{c}{\alpha}$ Log. $(gc - \alpha C)$, daher $x = \frac{c}{\alpha} \text{ Log. } \frac{gc - \alpha C}{gc - \alpha z}$.

§. 291.

Aus dieſen Gleichungen findet man die Geſchwindigkeit. Im erſten Fall wird $e^{\frac{\alpha x}{c}} = \frac{gc}{gc - \alpha z}$,

 und

und $z = \frac{gc}{\alpha} - \frac{gc}{\alpha e^{\frac{\alpha x}{c}}} = \frac{gc}{\alpha}\left(1 - e^{\frac{-\alpha x}{c}}\right)$.

Im zweyten haben wir $e^{\frac{\alpha x}{c}} = \frac{gc - \alpha C}{gz - \alpha z}$, folglich

$$z = \frac{gc . e^{\frac{\alpha x}{e}} - gc + \alpha C}{ae^{\frac{\alpha x}{c}}} = \frac{gc}{\alpha} - \frac{(gc - \alpha C)e^{\frac{-\alpha}{c}}}{\alpha}.$$

§. 292.

Ferner ſchließt man, wenn der Fall ohne Geſchwindigkeit anfängt, 1.) daß $x = \infty$ geſezt, $\text{Log.}\frac{gc}{gc - \alpha z} = \infty$. Daher $gc - \alpha z = 0$, und $z = \frac{gc}{\alpha}$. Demnach iſt $\sqrt{\frac{gc}{\alpha}}$ die größte Geſchwindigkeit, die im Fall, jedoch durch einen unendlichen

lichen Raum, zu erlangen, welches auch daraus erhellt, daß bey unendlichen Raum zugleich $e^{\frac{-\alpha x}{c}} = 0$, und daher $z = \frac{gc}{\alpha}$.

2.) Da umgekehrt, wenn $gc - \alpha z$, $x = \text{Log.}\ \infty$, ſo iſt klar, daß die größte Geſchwindigkeit im Fall durch geneigte Linien nur nach zurückgelegtem unendlichen Weg erlangt wird.

3.) Sind die Neigungswinkel verſchieden, wenn g und c überall einerley, ſo wird die größte Geſchwindigkeit $z = \frac{1}{\alpha}$; folglich nimmt z ab, wenn α zunimmt, und z verhält ſich wie der Coſinus des Winkels BAC. §. 290. Alſo folgt, daß die im Fall durch die Vertikallinie erzeugte Geſchwindigkeit die größte iſt, die durch den Fall zu erlangen. Je mehr alſo eine Ebene geneigt iſt, deſto kleiner iſt dieſe Geſchwindigkeit.

§. 293.

Setzt man auch $x = \infty$ in der Gleichung $\frac{gc}{\alpha} - \frac{(gc - \alpha C)\, e^{\frac{-\alpha x}{c}}}{\alpha} = z$, ſo wird $z = \frac{gc}{\alpha}$. Daher iſt auch

die größte Geſchwindigkeit hier eben die, wie in vorigen Beyſpielen: und es liegt nichts daran, mit was für einer Geſchwindigkeit der Körper im Anfang ſeiner Bewegung verſehen iſt.

§. 294.

Steigt der Körper mit einer gegebenen Geſchwindigkeit durch BE, und iſt BG = x, ſo wird §. 288.

$$\left(\frac{gdx}{ds} + R\right) ds = - dz,$$

und heißt die Koſekante des Neigungswinkels der Ebene α, wie vorhin §. 290. ſo wird $ds = \alpha dx$. Iſt $R = \frac{z}{c}$, ſo iſt $gdx + z$

$$\frac{\alpha dx}{c} = - dz.$$

Aber unſere vorige Gleichung gdx

$$- z \frac{\alpha dx}{c} = dz,$$

§. 289. geht auch in gegenwärtige über, wenn man ſtatt g, − g ſetzt. Daher erhält man hier auch wieder das vorhin gefundene Integral; nur iſt zu merken, daß wir hier − g ſtatt g ſetzen. Demnach iſt beym Steigen der Körper durch geneigte Ebenen,

$$x = \frac{c}{\alpha} \text{Log.} \frac{gc + \alpha C}{gc + \alpha z}.$$

§. 295

§. 295.

Sezt man $z = o$, ſo findet man die größte Höhe, wozu der ſteigende Körper gelangen kann. Dieſe iſt $= \frac{c}{\alpha}. \text{Log.} \frac{gc + \alpha C}{gc} = ED.$

Eben ſo findet man die größte Länge, die der Körper in der geneigten Ebene zurücklegen kann, $EB = c \,\text{Log.} \frac{gc + \alpha C}{gc}$, weil $s = \alpha x$.

§. 296.

Laßt uns annehmen, die im Fall durch AB erlangte Geſchwindigkeit ſey b, und der Körper ſteige wieder durch BE mit eben der Geſchwindigkeit b: ſind nun die vertikalen Höhen im Fallen und Steigen zu vergleichen, ſo haben wir $x = AC = \frac{c}{\alpha} \text{Log.} \frac{gc}{gc - \alpha b}$, b ſtatt z in der Gleichung §. 290. 1. geſezt. Und da man annimmt, daß der Körper auch mit eben der Geſchwindigkeit ſteigt, ſo wird in der Gleichung §. 295. $ED = \frac{c}{\alpha} \text{Log.} \frac{gc + \alpha C}{gc}$. Aber $C = b$, daher $AC : ED = \text{Log.} \frac{gc}{gc - \alpha b} : \text{Log.} \frac{gc + \alpha b}{gc}$. Beyde Ebenen BA und BE müſſen unter einerley Winkel gegen den Horizont geneigt ſeyn. Hier können aber

die Höhen nicht gleich ſeyn: denn es müßte ſeyn — $\alpha^2 b^2 = 0$.

Damit alſo beyde Höhen gleich werden, müſſen die Neigungswinkel der Ebenen verſchieden ſeyn. Nennet, wie vorhin, die Coſecante des Winkels ABC, α, und die Coſecante des Winkels EBD, A, ſo wird

$$AC = ED, \text{ wenn } \frac{\alpha}{\text{Log.}\,\frac{gc}{gc-\alpha b}} = \frac{A}{\text{Log.}\,\frac{gc+Ab}{gc}}.$$

§. 297.

Sollen die Längen AB, BE unter verſchiedenen Winkeln gegen den Horizont geneigter Ebenen gleich ſeyn, ſo heiſen die Coſecanten wieder, wie im vorhergehenden, α und A, und es wird ſeyn $EB : BA = \text{Log.}\,\frac{gc+Ab}{gc} : \text{Log.}\,\frac{gc}{gc-\alpha b}$. Da aber $EB = AB$,

ſo wird auch $\frac{gc+Ac}{gc} = \frac{gc}{gc-\alpha b}$, daher $\alpha = \frac{Agc}{gc+Ab}$.

Demnach muß die Ebene, worinn der Körper ſteigt, unter einem kleinern Winkel geneigt ſeyn, als die Ebene des Falles.

§. 298.

Sezt man die Geſchwindigkeit $= \sqrt{z}$, ſo iſt die Zeit des Falles überhaupt $S.\,\frac{\alpha dx}{\sqrt{z}}$, und $dx =$

$\frac{cdz}{gc-\alpha z}$. §. 290. Heißt alſo die Zeit T, ſo iſt dT $= \frac{\alpha cdz}{(gc- z)\sqrt{z}}$. Setzet $\sqrt{z} = t$, ſo wird dT $=$

$$\frac{2\alpha cdt}{gc-\alpha t^2} = \frac{2cdt}{\frac{gc}{\alpha}-t^2} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}.dt}{t+\sqrt{\frac{gc}{\alpha}}} - \frac{\sqrt{\frac{ac}{g}}.dt}{t-\sqrt{\frac{gc}{\alpha}}}.$$

Daher $T=\sqrt{\frac{ac}{g}}.(\text{Log.}\, t+\sqrt{\frac{gc}{\alpha}} - \text{Log.}\, t-\sqrt{\frac{gc}{\alpha}})$

$=\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}.\text{Log.}\frac{t+\sqrt{\frac{gc}{\alpha}}}{t-\sqrt{\frac{gc}{\alpha}}}$, und ſtatt t deſſen Werth $\sqrt{z}$ geſezt, iſt $T=\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}.\text{Log.}\frac{\sqrt{\alpha z}+\sqrt{gc}}{\sqrt{\alpha z}-\sqrt{gc}}$. Dies iſt die Zeit des Falles durch AB, wenn die Geſchwindigkeit in A = o. Sezt man aber die beſtändige Größe hinzu, damit das Integral vollſtändig wird, ſo erhält man $T=\sqrt{\frac{ac}{g}}.\text{Log.}\frac{\sqrt{\alpha z}+\sqrt{gc}}{-\sqrt{\alpha z}+\sqrt{gc}}$.

§. 299.

Die Zeit des Steigens durch BA findet man alſo: Es iſt $dT = -\frac{\alpha c dz}{(gc+\alpha z)\sqrt{z}} = -\frac{2\alpha c dt}{gc+\alpha t^2}$; $t = \sqrt{z}$ geſezt. Nimmt man hiervon das Integral auf eben die Art, wie §. 238. ſo iſt $dT = \frac{-2\sqrt{\alpha c}}{\sqrt{g}}. \frac{\sqrt{\frac{\alpha}{gc}}.dt}{1+\frac{\alpha t^2}{gc}}$, daher $T = \frac{-2\sqrt{\alpha c}}{\sqrt{g}}. \text{Atang.} \frac{\sqrt{\alpha}.t}{\sqrt{gc}} + B$,

und ſtatt t deſſen Werth $\sqrt{z}$ geſezt, $T = \frac{-2\sqrt{\alpha c}}{\sqrt{g}}. \text{Atang.} \sqrt{\frac{\alpha z}{\sqrt{gc}}} + B$. Sezt man die Geſchwindigkeit, womit der Körper anfängt zu ſteigen, $= \sqrt{b}$, ſo iſt in B, wo $T = o$, $z = b$, daher das Conſtans $B = \frac{2\sqrt{\alpha c}}{\sqrt{g}}. \text{Atang.} \sqrt{\frac{\alpha b}{gc}}$, und $T = 2\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}. \text{Atang.} \sqrt{\frac{\alpha b}{gc}} - 2\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}. \text{Atang.} \sqrt{\frac{\alpha z}{gc}}$. Da aber am Ende

des

des Steigens in A, z = o, ſo erhält man die ganze

Zeit des Steigens $T = 2\sqrt{\frac{\alpha c}{g}}.\ \mathrm{Atang.}\sqrt{\frac{\alpha b}{gc}}.$

Soll alſo die Zeit des Falles mit der Zeit des Steigens in Ebenen von einerley Neigung verglichen werden, und iſt die Geſchwindigkeit, die im Fall durch AB erlangt wird, = b; ſo verhalten ſich die Zeiten des Fallens und Steigens, wenn der Körper mit eben der Geſchwindigkeit ſteigt, die er im Fall

erlangt hat, wie $\mathrm{Log.}\frac{\sqrt{\alpha b}+\sqrt{gc}}{-\sqrt{\alpha b}+\sqrt{gc}} : 2\ \mathrm{Atang.}\sqrt{\frac{\alpha b}{gc}}.$

§. 300.

Nimmt man den Widerſtand des Mittels im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit an, ſo läßt ſich die Bewegung überhaupt beſtimmen, welches bey andern Hypotheſen nicht angeht. Denn hier laſſen ſich die veränderlichen Größen in der Gleichung für die Geſchwindigkeit abſondern. Man ſuche die Geſchwindigkeit in der Linie AB (Taf. XII. Fig. 1.) beym Fall, ſo wird mit Beybehaltung der §. 288. gebrauchten Zeichen, $dz = gdx - Rds$. Da

aber $R = \frac{z}{c}$, ſo wird auch $dz = gdx - \frac{z}{c}ds$.

Dieſe Gleichung auf ähnliche Art, wie §. 250. ver-

ändert, giebt $e^{S.\frac{dx}{F}} = e^{S.\frac{ds}{c}} = e^{\frac{s}{c}}$; daher

$$z = \frac{S.Pdx.e^{\frac{s}{c}} + B}{e^{\frac{s}{c}}}$$, und weil man P hier beſtändig und = g annimmt, ſo iſt $e^{\frac{s}{c}} z = S.gdx.e^{\frac{s}{c}} + B$.

Was aber B anbetrift, ſo ſind hier zwo Bedingungen der Aufgabe zu unterſcheiden: 1.) Wenn die Geſchwindigkeit im Anfang der Bewegung in A = o, ſo muß auch ſeyn $S.gdx.e^{\frac{s}{c}} = o$, und daher s = o. 2.) Iſt hingegen in A eine gegebene Geſchwindigkeit vorhanden, der die Höhe C zugehört, ſo muß B dem gleich werden, worinn das Integral, wenn s = o, und z = C geſezt wird, übergeht; wie wir auch B überall im vorhergehenden beſtimmt haben.

§. 301.

Um aber die gröſte Geſchwindigkeit zu finden, muß man die Gröſſe z differentiiren, und ihr Differential = o ſetzen. Da nun $dz = gdx - \frac{z}{c} ds$,

§. 299. ſo wird $gdx = \frac{z}{c} ds$, folglich $z \frac{cgdx}{ds}$, oder $ds : dx = g : \frac{z}{c}$. Demnach befindet ſich hier die größte Geſchwindigkeit nicht in dem Punkt der Kurve, deſſen Tangente horizontal iſt, welches bey freyer Bewegung Statt findet: ſondern in einem andern, wo der ganze Sinus ſich verhält zum Coſinus des Winkels, den die Tangente in dieſem Punkt mit der Vertikallinie macht, wie die Schwere zum Widerſtande in dieſem Punkte.

§. 302.

Die Zeit des Falles durch AB, wenn AD = x, iſt

$$= S. \frac{ds. e^{\frac{s}{2c}}}{\sqrt{(S. gdx. e^{\frac{s}{c}} + B)}}.$$

§. 303.

Steigt der Körper aufwärts von B nach A, und heißt BH, x, und BG, s, ſo werden beyde Gröſſen g und R verneint: daher bekommt man $gdx + \frac{z}{c} ds = - dz$. §. 288. Die vorigen Integrale

ſind

ſind alſo auch hier zu brauchen, wenn man g in —g verändert. Alsdenn wird

1.) $e^{\frac{s}{c}} z = S. - gdx. e^{\frac{s}{c}} + B$, aus welcher Gleichung die Geſchwindigkeit gefunden wird.

2.) t, oder die Zeit $= S. \frac{e^{\frac{s}{2c}} ds}{\sqrt{(S. - gdx. e^{\frac{s}{c}} + B)}}$.

3.) Sezt man $z = o$, ſo findet man den Punkt, über welchen der Körper nicht ſteigen kann.

§. 304.

Beym Fall von A nach B heiſe BH, x, und BG, s. So iſt $(\frac{gdx}{ds} - \frac{z}{c}) - ds = dz$, weil x und s abnehmen, indem die Geſchwindigkeit zunimmt. Daher $-gdx + \frac{z}{c} ds = dz$, welches auch unmittelbar aus der Gleichung §. 300. folgt, wenn man x und s verneint annimmt. Eben dieſe Gleichung aber wird auch unmittelbar aus der §. 303. geſchloſſen, wenn man $c = -c$ ſezt, da man für den Fall bekommt:

1.) e

$$1.)\ e^{\frac{-s}{c}} z = S. -gdx. e^{\frac{-s}{c}} + B.$$

$$2.)\ t = S. \frac{ds}{e^{\frac{s}{2c}} \sqrt{(S.-gdx. e^{\frac{-s}{c}} + B)}}.$$

§. 305.

Es ſey z. B. AB eine **umgekehrte Radlinie**; man ſucht die **Geſchwindigkeit des Falles** in jedem gegebenen Punkt dieſer Linie E, wenn BH = x, BG = s, und der Durchmeſſer des, die Radlinie erzeugenden Kreiſes = $\frac{1}{2}a$. Da nun in dieſer Linie $s = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}ax} = \sqrt{2ax}$, ſo wird $dx = \frac{sds}{a}$, und z =

$$\frac{S.-gdx.e^{\frac{-s}{c}}+B}{e^{\frac{-s}{c}}} .\ §. 303. = \frac{S.-\frac{gs}{a}.e^{\frac{-s}{c}} ds + B}{e^{\frac{-s}{c}}}.$$

Es iſt aber, wie aus dem, was wir §. 252. geſagt haben,

haben, bekannt, $S.\, s.\, e^{\frac{-s}{c}} ds = (-cs - c^2)\, e^{\frac{-s}{c}}$, und das Conſtans, oder die Größe, worinn das Integral, $s = o$ geſezt, übergeht, hinzugethan, bekommt man $S.\, s.\, e^{\frac{-s}{c}} ds = (-cs - c^2).\, e^{\frac{-s}{c}} + c^2$.

$$\text{Daher } z = \frac{\frac{(csg + c^2 g)}{a}.\, e^{\frac{-s}{c}} - \frac{c^2 g}{a} + B}{e^{\frac{-s}{c}}} =$$

$$\frac{csg + c^2 g - c^2 g.\, e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a},$$ wo B das Integral andeutet, wenn $s = o$, dahrr iſt z die der, im Fall durch den Bogen BG erlangten Geſchwindigkeit zugehörige Höhe.

§. 306.

Hieraus wird auch der Punkt L beſtimmt, wo die Geſchwindigkeit am größten. Denn die

der

der Geſchwindigkeit in dieſem Punkte zugehörige Höhe iſt. $= \frac{cgdx}{ds}$, §. 300. folglich $\frac{cgdx}{ds} = \frac{cgs}{a} =$

$$\frac{csg + c^2g - c^2g.\, e^{\frac{s}{c}} + aBe^{\frac{s}{c}}}{a}.$$

Daher $c^2g + (aB - c^2g)\, e^{\frac{s}{c}} = 0$, und $e^{\frac{s}{c}} = \frac{c^2g}{c^2g - aB}$, und $s = c\, \text{Log.} \frac{c^2g}{c^2g - aB} = BL.$

§. 307.

Sucht man auch die Zeit des Falles in der Radlinie, wenn der Widerſtand dem Quadrat der Geſchwindigkeit proportional, ſo ſieht man jene auszeichnende Eigenſchaft dieſer Linie, die bey freyer Bewegung vorhanden, daß nämlich die Zeit durch alle Bogen derſelben einerley und beſtändig iſt, völlig verloren gehen. Denn da §. 305.

$$z = \frac{csg + c^2g - c^2g.\, e^{\frac{s}{c}} + aB.\, e^{\frac{s}{c}}}{a},$$ ſo wird $dt =$

$$\frac{dx}{\surd z} = \frac{ds\surd a}{\surd(csg + c^2g - c^2.e^{\frac{s}{c}} + aB.e^{\frac{s}{c}})}.$$ Aber

$$e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{2c^2} + \frac{s^3}{3c^2} + \text{rc.}$$ Dieſen

Werth im Werth dt geſezt, hängt das Integral von der Größe s, oder von der Größe des bereits zurückgelegten Bogens ab: daher iſt die Zeit nicht durch alle größere oder kleinere Bogen einerley und gleichgros.

Nimmt man aber die im Fall zurückgelegten Bogen ſehr klein, ſo daß die drey erſten Glieder der unendlichen Reihe, worinn $e^{\frac{s}{c}}$ aufgelößt wird, hinreichen: ſo wird $dt = \dfrac{\surd a.\,ds}{\surd(aB + \frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2} - \frac{gs^2}{2})}$.

Hier iſt zugleich B ſehr klein, ſo oft es s iſt: denn $\surd B$ deutet die im Fall durch s erlangte Geſchwindigkeit an. Demnach verſchwinden die Glieder $\frac{aBs}{c} + \frac{aBs^2}{2c^2}$

in

in Anſehung der Größen aB und gs^2, und dies zumal, wenn c ſehr groß, wie es in der Luft wirklich iſt. Daher $dt = \frac{ds\sqrt{a}}{\sqrt{\left(aB - \frac{gs^2}{2}\right)}}$; dieſes Differential iſt, $-ds$ ſtatt ds geſezt, (wie hier wegen der abnehmenden Größe s geſchehen muß,) mit dem oben §. 38. für das Zeitelement bey freyer Bewegung durch die Radlinie gefundenem einerley. Denn B iſt hier, was dort gb. **Demnach verhalten ſich die Zeiten des Falles, wenn man die Bogen ſehr klein annimmt, bey gehinderter Bewegung eben ſo, wie bey freyer.** Nimmt man aber größere Bogen, ſo hört die Gleichzeitigkeit bey der Bewegung im Mittel, das im Verhältnis des Quadrats der Geſchwindigkeit widerſteht, auf.

§. 308.

Wir haben geſagt, B ſey mit bg einerley, wenn die Geſchwindigkeit der Bewegung ſehr klein iſt. Daß dies aber nicht nur Statt findet, wenn der Widerſtand ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, ſondern auch, wenn er ſich nach einer höhern Potenz der Geſchwindigkeit richtet, iſt ſogleich offenbar. Denn iſt überhaupt der Widerſtand $\frac{z^n}{c^n}$,

und z ſehr klein, ſo iſt $\frac{z^n}{c^n}$ noch viel kleiner, und zwar deſto kleiner, je größer n, vorzüglich in der Luft, wo c ſehr groß. Iſt hingegen n ein Bruch, ſo verändert ſich z^n gegen c^n in einem kleinern Verhältnis, als vorhin. Daher iſt hier auch der Widerſtand nicht auſer Acht zu laſſen, noch wie in vorigem Fall für nichts zu achten: und dies deſto weniger, je kleiner der Bruch n.

Was wir bisher von der Bewegung in widerſtehenden Mitteln vorgetragen haben, iſt bereits weitläuftig genug. Daher wir das, was aus andern angenommenen Geſetzen des Widerſtandes folgen würde, willig übergehen.

Funf-

Funfzehnte Vorleſung.

Von den lebendigen Kräften.

Inhalt.

§. 260. — 278. Maaß der lebendigen Kräfte. Unterſchied zwiſchen Preſſungen und lebendigen Kräften. §. 279. Zerlegung der Kräfte in andere, und Zuſammenſetzung mehrerer in eine.

§. 260.

Die Lehre von den ſogenannten lebendigen Kräften iſt in der That in der **Mechanik** und ihrer Anwendung von der größten Wichtigkeit und Nutzen. Auch liegt viel an dem wahren Maaſe der Kräfte, das ſich ohne Kenntnis der Natur derſelben nicht feſtſetzen läßt. Ehe wir uns aber in dieſe ſchwere Unterſuchung einlaſſen, laſſet uns an das erinnern, was zu Anfang des Werks, wo wir die erſten Gründe der Mechanik erklärten, geſagt worden, und die verſchiedenen Gattungen der Kräfte mit einem Blick überſehen. Wir nannten alle Kräfte überhaupt **bewegende**: nicht nur deswegen, weil ſie wirkliche Bewegung hervorbringen, ſondern auch, weil ſie ſelbige hervorzubringen ſtreben, oder weil ſie zur Bewegung reizen; denn ohne Bewegung können wir uns von ihrer innern Beſchaffenheit keinen Begriff machen. Die bewegenden Kräfte ſind alſo zweyerley. §. 16. Sie ſind entweder **Preſſungen**, die auch **tode** Kräfte heiſen, oder ſie ſind **lebendige** Kräfte. Erſtere laſſen ſich auf zweyerley Art betrachten. Sie wirken entweder nur auf einen Augenblick in die frey=

liegende Materie, und ſtreben, ihr Bewegung mitzutheilen, wovon wir ein Beyſpiel an den Elementarreizungen unſerer Schwere haben, wodurch die von aller Verbindung mit andern freyen Körper im Anfang ihrer Bewegung gereizt werden: oder ſie wirken in Materie, die in ihrer Bewegung von andern widerſtehenden gehindert wird, dergleichen wir an den Preſſungen ſehen, wodurch Körper am Hebel gedrückt werden.

Betrachten wir die erſtere Wirkungsart, ſo iſt der **Druck** einerley mit der Beſchleunigung, in die Materie multiplicirt, oder, er iſt der Elementareffekt der Beſchleunigung. Leztere wirkt gleichförmig in alle und jede kleinſten Theile der Materie, die man hier als gleichartig, einander gleich und ähnlich betrachtet. Aber die Wirkung dieſer Beſchleunigung ſelbſt, oder die Beſchleunigung in die Maſſe multiplicirt, heißt **abſolute Kraft und Druck.** Bey gehinderter Bewegung der Körper am Hebel werden die Preſſungen oder toden Kräfte nicht, wie bey freyer Bewegung, aus dem Produkt der Beſchleunigung in die Materie, ſondern vielmehr aus dem Produkt der erwachſenden Geſchwindigkeit in die Größe der Materie geſchäzt: denn die widerſtehende Materie muß ſowohl im Verhältnis ihrer Größe, als ihrer Geſchwindigkeit, wirken, wie §. 23. 24. ausführlicher dargethan worden. Aus dieſem Grunde unterſchieden wir auch dieſe Preſſungen mit dem Namen der **reſpectiven**: denn hier muß man nicht auf den bloſen Effekt, der von der Beſchleunignng in der einſamen Materie entſteht, ſondern auf denjenigen ſehen, den in Verknüpfung mit andern Körpern, wegen der Anordnung der Theile des ganzen Syſtems und dem Widerſtande, die Kräfte erzeugen.

§. 261.

§. 261.

Alle Preſſungen heiſen tode Kräfte. Denn wir betrachten nur, wie geſagt, ihre in einem unendlich kleinen Zeittheilchen erzeugten Elementar- und augenblicklichen Effekte. Die von dieſen Effekten entſtehende Bewegung iſt unendlich klein, unmerklich. Daher läßt man ſie auch auſer Acht, oder hält ſie für nichts, folglich für tod. So erzeugt ein Elementarreiz der Schwere keine merkliche Bewegung im Körper: ſie verurſacht aber das, was man Gewicht der Körper nennt.

Ganz anders verhält es ſich, wenn der Elementardruck der Schwere in dieſelbe Materie zu wirken, und ihr Bewegung einzudrücken fortfährt. Denn hier werden in einer endlichen Zeit die Preſſungen unendlichemal wiederholt; und dieſe unendliche Menge Elementarpreſſungen erzeugt in endlicher Zeit eine wirkliche und endliche Geſchwindigkeit. Auch kann eine im Körper vorhandene Geſchwindigkeit durch eine gleiche Menge Wirkungen, wodurch ſie vorher entweder erzeugt ward, oder erzeugt werden konnte, zerſtört und ganz aufgehoben werden. Daher ſagt man mit Recht, daß ein Körper mit ſeiner endlichen Geſchwindigkeit eine unendliche Menge Preſſungen vernichten kann. Daher iſt auch die Kraft in einem bewegten, mit endlicher Geſchwindigkeit verſehenem Körper, in Vergleichung mit den Elementarpreſſungen der Schwere als unendlich groß anzuſehen, woraus erhellt, daß jene von dieſen weit verſchieden iſt. Da nun die Kraft in dem mit endlicher Geſchwindigkeit verſehenem Körper, lebendige Kraft heißt, ſo iſt dieſe von den Preſſungen oder toden Kräften

weit verſchieden, woraus wir mit Recht muthmaßen, daß auch ein verſchiedenes Maas dieſer und und jener feſtzuſetzen.

§. 262.

Dies ſcheint zwar in Hinſicht auf den Unterſchied beyderley Kräfte deutlich zu ſeyn; doch ſtoßen hier bey Unterſuchung des Maaſes dieſer Kräfte nicht geringe Schwierigkeiten auf. Kein Wunder iſts auch, daß die größten Männer in dieſen Wiſſenſchaften, wie bekannt, auf verſchiedene Meynungen hiervon gefallen ſind. Ueber das Maas der Kräfte ſtritten mit vieler Erbitterung die Geometer, vorzüglich die Engländer, die auf der einen Seite Newton folgten, die meiſten auf der andern Leibnizens Meynung verfochten, der zuerſt behauptete, die lebendigen Kräfte verhielten ſich wie die Maſſen der Körper, oder die Materie, in das Quadrat der Geſchwindigkeit multiplicirt: da die Newtonianer hingegen die lebendigen Kräfte auf eben die Art, wie die toden meſſen. Dem Leibniziſchen Maas ſtund am meiſten dies im Wege, daß es ſchwer einzuſehen ſcheint, die Kraft im Körper hänge nicht nur von der Geſchwindigkeit und Größe der Materie, ſondern auch von etwas andern, davon verſchiedenem, ab.

§. 263.

Man müßte aber die Sache nur obenhin anſehen, wenn man dieſer Schwierigkeit wegen ſchon nachgeben wollte. Wahr iſts, daß ſich die Kräfte verhalten, wie die Geſchwindigkeiten in die Maſſen, wenn von bloſen Preſſungen die Rede. Denn hier beſteht der ganze Effekt der drückenden Kraft in der erzeugten

anfäng-

anfänglichen Geſchwindigkeit. §. 23. 26. Iſt hingegen die im Körper erzeugte Geſchwindigkeit von endlicher Größe, ſo erhellt noch nicht, daß dieſe Geſchwindigkeit ſelbſt der ganze volle Effekt der Kraft ſey. Da ſich aber die Kräfte nur aus ihren vollen oder ganzen Effekten meſſen laſſen, ſo iſt klar, daß vorher genau erwieſen werden muß, dieſe Geſchwindigkeit ſey alles, was die Kraft im Körper hervorgebracht hat, ehe man es uns als Wahrheit aufdringen kann. Die Kraft aber, ſo die Geſchwindigkeit erzeugt hat, iſt der gleich, wodurch eben die Geſchwindigkeit wiederum zerſtört wird; folglich auch gleich den Kräften, welchen der Körper mit ſeiner Geſchwindigkeit hinreichend zu widerſtehen vermag.

§. 264.

Um alſo ein gewiſſes Maas der lebendigen Kräfte feſtzuſetzen, muß man entweder die Art, wie die Geſchwindigkeit im Körper von der Wirkung der drückenden Kräfte erzeugt wird, genau unterſuchen; oder die Sache durch Verſuche ausmachen, und ſehen, was für Effekte von Körpern, die mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit verſehen ſind, entſtehen, ſo daß bey ihrer Hervorbringung jene ganze Geſchwindigkeit, und die lebendige Kraft verzehrt wird. Denn es iſt auſer allem Zweifel, daß dieſe Effekte den Kräften, wodurch ſie hervorgebracht werden, proportional ſind. Was aber die Verſuche betrift, ſo ſtimmen ſie, obgleich auf verſchiedene Art angeſtellt, alle darinn überein, daß die ganzen Effekte lebendiger Kräfte ſich verhalten, wie die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten. Wir wollen zwar nicht alle hie-

her gehörigen erzählen, da es die Sache der Experimentalphyſik iſt: doch wollen wir kürzlich von den leichteſten reden. Dergleichen ſind, da man harte ſchwere Körper von ſchicklicher Geſtalt auf andere weiche Körper, z. B. auf weichen Thon, dergeſtalt herunterfallen ließ, daß die Körper, indem ſie die Oberfläche der Materie, worauf ſie fielen, erreichten, eine beſtimmte Geſchwindigkeit hatten, die man nach §. 57. finden konnte. Man maß hierauf ſorgfältig die, von den ſo herabgefallenen Körpern gemachten Hölen, um ihre Größe genau zu wiſſen. Hier fand man allemal den ganzen von den herabfallenden Körpern erzeugten Effekt im zuſammengeſezten Verhältnis, aus dem Verhältnis der Maſſen und dem Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten, womit die herabfallenden Körper verſehen waren, indem ſie auf die unterliegende Materie trafen. Durch dieſe Verſuche bewogen, kamen endlich alle darinn überein, daß der ganze Effekt mit einer Geſchwindigkeit verſehener Körper dem Produkt aus der Maſſe in das Quadrat der Geſchwindigkeit proportional ſey. Aber noch war der Streit über das Maas der lebendigen Kräfte nicht geendigt. Man fragte weiter, wie ſie zu ſchätzen, aus dem Raum, oder aus der Geſchwindigkeit? Giebt man aber das erſtere zu, ſo ſieht man leicht, daß der übrige Streit nichts als bloſes Wortgezänk iſt.

Anmerkung. Dies erhellt unter andern auch ſo. Die Newtonianer halten davor, man müſſe die Kräfte, die ſie **eingedrückte** nennen, bey gleichen Zeiten aus den Maſſen der Körper in die Geſchwindigkeiten multiplicirt: bey ungleichen Zeiten aber

aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten multiplicirt, und durch die Zeiten dividirt, ſchätzen. Siehe unter andern **Deſagüliers** in Physic. Tom. II. Præl. 6. daß dies bey Elementarpreſſungen der Kräfte wahr iſt, ergiebt ſich ſogleich aus §. 4. Zuſ. weil pdt = dv, und $p = \frac{mdv}{dt}$. Eben ſo hat dies Statt, wenn die Geſchwindigkeit endlich, und der Druck p eine beſtändige Größe: denn alsdenn iſt pt = mv. Iſt daher t beſtändig, ſo wird p = mv; iſt aber t veränderlich, ſo wird $p = \frac{mv}{t}$, und das iſts, was die Newtonianer zugeben. Daher iſt auch, was ſie behaupten, auſer Zweifel, ſo oft von Preſſungen die Rede iſt. Denn p bedeutet in dieſen Gleichungen nichts als eine **drückende Kraft**, vermöge deſſen, was in Zuſ. §. 1 = = 4. ausgeführt worden.

Ganz was anders iſt es, was die Leibnizianer unter dem Namen der Kräfte verſtehen. Dieſe wollen die **ganze Summe der Preſſungen** beſtimmen, die vom Anfang bis zu Ende der Wirkung auf die Erzeugung der endlichen Geſchwindigkeit im Körper verwendet werden. Wenden wir zu dem Ende obige Gleichungen an pdt = dv, oder pdt = mdv, ſo wird, weil $dt = \frac{dx}{v}$, $\frac{pdx}{v} = mdv$, und pdx = mvdv, folglich S. pdx = $\frac{1}{2}$mvv. Es iſt aber S. pdx, was die Leibnizianer mit dem Na-

her gehörigen erzählen, da es die Sache der Experimentalphyſik iſt: doch wollen wir kürzlich von den leichteſten reden. Dergleichen ſind, da man harte ſchwere Körper von ſchicklicher Geſtalt auf andere weiche Körper, z. B. auf weichen Thon, dergeſtalt herunterfallen ließ, daß die Körper, indem ſie die Oberfläche der Materie, worauf ſie fielen, erreichten, eine beſtimmte Geſchwindigkeit hatten, die man nach §. 57. finden konnte. Man maß hierauf ſorgfältig die, von den ſo herabgefallenen Körpern gemachten Hölen, um ihre Größe genau zu wiſſen. Hier fand man allemal den ganzen von den herabfallenden Körpern erzeugten Effekt im zuſammengeſezten Verhältnis, aus dem Verhältnis der Maſſen und dem Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten, womit die herabfallenden Körper verſehen waren, indem ſie auf die unterliegende Materie trafen. Durch dieſe Verſuche bewogen, kamen endlich alle darinn überein, daß der ganze Effekt mit einer Geſchwindigkeit verſehener Körper dem Produkt aus der Maſſe in das Quadrat der Geſchwindigkeit proportional ſey. Aber noch war der Streit über das Maas der lebendigen Kräfte nicht geendigt. Man fragte weiter, wie ſie zu ſchätzen, aus dem Raum, oder aus der Geſchwindigkeit? Giebt man aber das erſtere zu, ſo ſieht man leicht, daß der übrige Streit nichts als bloſes Wortgezänk iſt.

Anmerkung. Dies erhellt unter andern auch ſo. Die Newtonianer halten davor, man müſſe die Kräfte, die ſie **eingedrückte** nennen, bey gleichen Zeiten aus den Maſſen der Körper in die Geſchwindigkeiten multiplicirt: bey ungleichen Zeiten aber aus

aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten multiplicirt, und durch die Zeiten dividirt, ſchätzen. Siehe unter andern **Deſagüliers** in Phyſic. Tom. II. Prel. 6. daß dies bey Elementarpreſſungen der Kräfte wahr iſt, ergiebt ſich ſogleich aus §. 4. Zuſ. weil $pdt = dv$, und $p = \frac{mdv}{dt}$. Eben ſo hat dies Statt, wenn die Geſchwindigkeit endlich, und der Druck p eine beſtändige Größe: denn alsdenn iſt $pt = mv$. Iſt daher t beſtändig, ſo wird $p = mv$; iſt aber t veränderlich, ſo wird $p = \frac{mv}{t}$, und das iſts, was die Newtonianer zugeben. Daher iſt auch, was ſie behaupten, auſer Zweifel, ſo oft von Preſſungen die Rede iſt. Denn p bedeutet in dieſen Gleichungen nichts als eine **drückende Kraft**, vermöge deſſen, was in Zuſ. §. 1 = 4. ausgeführt worden.

Ganz was anders iſt es, was die Leibnizianer unter dem Namen der Kräfte verſtehen. Dieſe wollen die **ganze Summe der Preſſungen** beſtimmen, die vom Anfang bis zu Ende der Wirkung auf die Erzeugung der endlichen Geſchwindigkeit im Körper verwendet werden. Wenden wir zu dem Ende obige Gleichungen an $pdt = dv$, oder $pdt = mdv$, ſo wird, weil $dt = \frac{dx}{v}$, $\frac{pdx}{v} = mdv$, und $pdx = mvdv$, folglich $S.\ pdx = \frac{1}{2}mvv$. Es iſt aber S. pdx, was die Leibnizianer mit dem Na-

men lebendiger Kräfte andeuten, und daher verhält ſich auſer allem Zweifel S. pdx, oder die lebendige Kraft, wie mv^2. Bey den Newtonianern hingegen iſt die Rede von S. pdt. welche Summe ſie die Kraft ſelbſt nennen. Die Sache alſo, die ſie im Sinne haben, iſt verſchieden. Doch iſt noch zu unterſuchen, ob die lebendigen Kräfte in bewegten Körpern, ihrer Gröſze nach durch S. pdt, oder vielmehr durch S. pdx zu ſchätzen ſind. (V.)

§. 265.

Um alſo zu finden, auf was für Art das Maas lebendiger Kräfte feſtzuſetzen, und ob ſie den Maſſen in die Geſchwindigkeiten multiplicirt, oder den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten multiplicirt proportional zu achten; laßt uns mit Hintanſetzung vorerwähnter Verſuche die Art und Weiſe unterſuchen, wie die Geſchwindigkeiten in der Materie von den Kräften hervorgebracht werden. Denn wenden wir zu Meſſung der Gröſzen der Kräfte die Geſchwindigkeiten an, ſo kann dies zwar geſchehen, wenn die Geſchwindigkeiten den Kräften proportional ſind; nicht aber aus dem Grunde, weil die Geſchwindigkeiten ſich mit den Kräften als gleichartig vergleichen laſſen. Zum richtig ſo zu nennenden Maas der Kräfte wird auch erfordert, daß die Einheit, ſo das Maas der Kräfte, ſelbſt auch eine Kraft oder Druck, wodurch lebendige Kräfte in Körpern erzeugt werden, oder eine Summe von Preſſungen iſt.

§. 266.

Hier wollen wir aber nur die Preſſungen betrachten, die wir bey der Schwere antreffen. So gelangen

gen wir am leichteſten zu unſerm Zweck. Auch kann unſere Schwere jede Geſchwindigkeit, jede Kraft erzeugen. Doch ſcheint hier gleich Anfangs ein Zweifel vorzukommen, wodurch ſich das Maas folgendergeſtalt zweifelhaft machen läßt:

Der ganze Effekt der Kräfte läßt ſich auf zweyerley Art betrachten. Wir ſehen entweder auf die bloſe Geſchwindigkeit, ſo die Kräfte erzeugen, oder auf den Raum, wodurch ſich die gereizte widerſtehende Materie bewegt, indeß die Kräfte in ſie fortwirken. Man ſtelle ſich vor, der Körper werde von der Schwere getrieben; ſo folgt aus unumſtößlichen Geſetzen des Falles, daß die Schwere in den durch die Höhe AB (Taf. XII. Fig. 3.) fallenden Körper, der in A im Anfang der Bewegung keine Geſchwindigkeit beſizt, dergeſtalt wirkt, daß in gleichen Zeiten gleiche Zunahmen der Geſchwindigkeit erzeugt werden. §. 45. Nimmt nun der Körper bey ſeinem Fall weiter nichts in ſich, als die Beſchleunigungen, ſo muß die Summe der Kräfte, oder die ganze, in dem durch AB fallenden Körper erzeugte Kraft nothwendig durch den Elementardruck der Schwere in die Zeit des Falles multiplicirt, oder durch die Größe der Bewegung nach §. 22. d. i. durch die Maſſe in die Geſchwindigkeit multiplicirt, geſchäzt werden. Dies iſt der ſtärkſte Beweisgrund, worauf ſich diejenigen ſtützen, die Kräfte aller Art, tode oder lebendige, einfache Preſſungen oder Kräfte ſich bewegender Körper, aus der Geſchwindigkeit in die Maſſe der Körper multiplicirt, erweſſen haben wollen.

§. 267.

Betrachten wir hingegen die von Preſſungen erzeugten Kräfte auf eine andere Art, ſo ſcheint das Gegen-

Gegentheil nicht minder einleuchtend zu ſeyn. Da der Druck unſerer Schwere in allen Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde gleichmäßig drückt, ſo muß auch der von A nach B ſinkende Körper von der Schwere in allen Punkten der Linie AB gleichmäßig getrieben werden. Daher wird auch die Kraft, die der fallende Körper erlangt, dem Produkt M. AB proportional ſeyn, wenn durch M die Materie angedeutet wird. Denn die im Körper erzeugte Kraft wird mit der, von der Schwere auf den Körper verwendeten, und während des Falles geäuſerten Kraft gleichgroß ſeyn. Aber nach §. 47. verhält ſich AB wie das Quadrat der Geſchwindigkeit in B. Hieraus folgt, daß die Summe der im Fall durch AB erlangten Kräfte ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit in die Maſſe multiplicirt.

§. 268.

Wir finden alſo zwo ſehr verſchiedene Meſſungsarten der Kräfte, die beyde, welches zu verwundern, aus gleich unzweifelhaften Gründen zu folgen ſcheinen. Beyde ſcheinen in den Geſetzen der Schwere, die die Erfahrung lehrt, gegründet zu ſeyn; und doch ſind ſie einander entgegengeſezt, ſo daß, wenn erſtere Statt findet, das was von der Schwere oben behauptet worden, über den Haufen zu fallen ſcheint. Der Beweis aber, deſſen wir uns zu Beſtätigung dieſes Leibniziſchen Maaſes §. 267. bedienten, läßt ſich noch auf andere und deutlichere Art führen. Denn es ſey der Druck in A (Taf. XII. Fig. 4.) AC, und da er in allen Punkten a der Linie AB einerley und gleichgroß, folglich beſtändig wie ac oder AC, ſo verhält ſich die Summe aller Preſſungen in B, wie das

Pa-

Parallelogramm ABDC, und in E wie das Parallelogramm AEFC. Dieſe Parallelogrammen haben aber einerley Grundlinie; daher verhalten ſich die durch den Fall erlangten Kräfte in E und B, wie AE und AB, da doch die erzeugten Geſchwindigkeiten ſich verhalten wie $\sqrt{AE}$ und $\sqrt{AB}$.

§. 269.

Hieraus erhellt, daß die ganze Sache auf die Beſtimmung ankommt, ob der Effekt der Preſſungen der Schwere im fallenden Körper, aus den in allen Punkten der Linie AB gleichen Reizungen der Schwere; oder aus den in gleicher Zeit gleichen Beſchleunigungen zu ſchätzen? Lezteres kommt wirklich mit den oben erwieſenen Regeln und Geſetzen der Schwere, daß ſich nämlich die Geſchwindigkeiten verhalten, wie die Zeiten, und die zurückgelegten Räume wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, überein. Nimmt man hingegen das erſtere an, daß nämlich die Beſchleunigung in allen Punkten der Linie AB gleichgroß und gleichmäßig in den ſinkenden Körper wirkt, ſo ſcheint keins von den eben vorgetragenen Geſetzen des Falles beſtehen zu können: welche, da ſie doch keinem Zweifel unterworfen, dies hinlänglich ſchien, das erſtere Maas der Kräfte, als falſch und mit den Bewegungsregeln ſchwerer Körper ſchlecht zuſammenhängend, zu verwerfen.

§. 270.

Solchergeſtalt iſt deutlich genug erörtert, wo hier der Knoten liegt: nun laßt uns ihn aufzulöſen und zu zeigen ſuchen, dieſer ſcheinbare Widerſpruch der Beweisgründe, der doch bey aufmerkſamer Betrach-

tung

tung der Sache verſchwindet, herkommt. Denn da Wahrheit ſich nicht widerſprechen kann; ſo können auch zwo aus wahren unzweifelhaften Gründen hergeleitete Folgen einander nicht das Gegentheil halten; und ſcheinen ſie es, ſo muß es nothwendig vom Mangel unſerer Kenntnis herrühren. Zu dem Ende iſt zu merken, daß die Kraft ſelbſt, wenn dem Körper Bewegung eingedrückt wird, von der Trägheit des bewegten Körpers zerſtört wird, und unterdeſſen ganz in ſelbigen übergeht, wenn ihre Wirkung und Effekt durch ſonſt nichts gehindert wird. Laßt uns aber annehmen, es ſey im Körper keine widerſtehende Kraft, auſer der, die von der Größe der Materie abhängt, vorhanden; und unterſuchen, was alsdenn im erſten Augenblick, da der Materie von der bewegenden Kraft Bewegung eingedrückt wird, erfolgen muß.

Die Trägheit aber, oder die widerſtehende Kraft des Körpers, iſt wie ein Mittel, wodurch die von dem wirkenden abgegebene Kraft in den leidenden Körper übergeht. Nach dieſem Uebergang muß ſich im Körper, worinn ſie übergieng, die gleichgroße Kraft befinden, die vorher im bewegenden war, ſo daß auſer der Veränderung des Orts nichts in der Größe der Kraft verändert worden.

§. 271.

Daß dies bey freyer Bewegung, wo weder die bewegende Kraft an Vollendung ihrer Wirkung, noch der leidende Körper an der Aufnahme des Effekts gehindert wird, ſich ſo verhält, iſt auſer Zweifel. Ferner iſt hier auch nicht minder wahr, noch minder in Acht zu nehmen, daß bey freyer Bewe-

gung

gung kein Theil der wirkenden Kraft verloren, ſondern ganz aus dem wirkenden Körper in den leidenden übergeht.

Anmerkung. Daß, was von §. 266. bis §. 271. ausgeführt worden, unter ſich wohl zuſammenhängt, und nur widerſprechend ſcheint, läßt ſich folgendergeſtalt ſehr leicht einſehen. Beym Fall ſchwerer Körper iſt der Reiz der Schwere in allen Punkten der Linie AB (Taf. XII. Fig. 4.), wodurch der Körper von der Schwere getrieben fällt, beſtändig und einerley. Dies vorausgeſezt, iſt klar, daß der ganze Effekt der Schwere in allen Punkten der Linie AB,

$$= \frac{Pdx}{m},$$

wenn durch P der Reiz der Schwere, durch dx aber das Element aa der Linie AB verſtanden wird, §. 24. und der ganze Effekt von P wird in jedem Punkt der AB gleichgroß ſeyn. Denn hier iſt kein Zweifel, daß der ganze Effekt ſich verhält, 1.) wie die Beſchleunigung an ſich betrachtet, 2.) wie das Element des zurückgelegten Raums. Denn der Effekt wächſt in eben dem Verhältnis, wie ſich dieſes und jene vermehrt. Hier iſt die Zeit nicht in Betracht zu ziehen, da das Element des Raums zur Beſtimmung des ganzen Effekts des Drucks durch dx hinreicht.

Demnach iſt die Summe der Preſſungen durch AB = S. Pdx. = Px, und iſt P, wie bey der Schwere, ein unveränderlicher Druck, ſo muß auch dieſe Summe ſich verhalten wie x, oder wie AB. Und da überdies beym Fall der Körper x ſich verhält

hält wie v^2, ſo läßt ſich auf keine Weiſe läugnen, daß die Kräfte, ſo die Natur auf Erzeugung der Geſchwindigkeiten beym Fall verwendet, mit den Quadraten dieſer Geſchwindigkeiten in einerley Verhältnis ſtehen.

Auch ſtreitet dies nicht mit den Geſetzen der Schwere, wie leicht einzuſehen, wenn wir nur merken, daß zwar der Druck der Schwere in allen Punkten der Linie AB einerley; eben dies aber nicht von dem Theil des Drucks gilt, der die Geſchwindigkeit erzeugt. Hierinn ſind Preſſungen von Beſchleunigungen unterſchieden; aus dieſem vernachläßigten Unterſchied geſchahe es, daß die Beweisgründe einander widerſprechen. Denn daß die Summe aller Kräfte, oder Reizungen der Schwere, die auf den Körper im Fall durch AB wirken, S. Pdx iſt, kann nicht geläugnet werden, da man den Druck überall einerley annimmt. Soll hingegen die von den durch AB drückenden Kräften erzeugte Geſchwindigkeit beſtimmt werden, ſo beruht dieſe nicht auf der bloſen Größe des durch das Element aa wirkenden Drucks, an ſich betrachtet, ſondern vielmehr auf dem Theil des Drucks, wodurch die Geſchwindigkeit vermehrt wird. Dieſer Theil iſt, wie leicht erhellt, größer oder kleiner, nachdem der Körper entweder länger in jenem Element bleibt, oder geſchwinder durchgeht, daher die Zeit hier auch in Betracht zu ziehen. Die Zeit aber, die der Körper in einem Element bleibt, verhält ſich verkehrt, wie die Geſchwindigkeit, womit er eintritt. Denn nimmt man die Elemente dx gleichgros an, ſo verhält ſich die Zeit durch ſelbige wie $\frac{1}{v}$, wenn v die Geſchwindigkeit bedeutet.

Da aber der Effekt des Elementardrucks, ſo weit er in größerer oder kleinerer Vermehrung der Geſchwindigkeit beſteht, der Zeit proportional iſt, worinn er in dem Elemente des Raums die dadurch bewegte Materie reizen kann: ſo muß auch die Beſchleunigung $\frac{1}{v}$ des ganzen Drucks, folglich $= \frac{Pdx}{mv}$ ſeyn. Dieſer Beſchleunigung iſt ferner ihr Effekt gleich, der im Wachsthum der Geſchwindigkeit beſteht. Daher $\frac{Pdx}{mv} = dv$; und weil $\frac{dx}{v} = dt$, ſo iſt $\frac{P}{m} dt = dv$; aus welcher Gleichung ſich alle im zweyten Zuſatz erwieſene Geſetze der Schwere herleiten laſſen, wofern man nur P als einen beſtändigen Druck annimmt. Dieſe leztere Gleichung widerſpricht alſo obigem ſo wenig, daß ſie vielmehr daraus folgt, und ſich herleiten läßt.

Erhellt gleich hieraus, daß ſich obige Behauptungen einander nicht aufheben, ſo iſt doch noch nicht einleuchtend, daß die Summe der Preſſungen ſich verhält wie das Quadrat der Geſchwindigkeit, oder wie S. Pdx. Vielmehr ſcheint es, man könne ſo ſchließen: im erſten Augenblick iſt die Beſchleunigung $\frac{Pdx}{mdv} = \frac{Pdx}{mdx}$ (vergl. I. Zuſ.) $= \frac{P}{m}$, in

den folgenden Augenblicken aber wird die Trägheit nur von einem Theil des Drucks fortgeſtoßen; und daher kann auch nur dieſer Theil in den fallenden Körper übergehen. Demnach verhält ſich die Summe aller Preſſungen, die ſich während der Wirkung in der Materie ſammelt, und hernach die **lebendige Kraft** des Körpers ausmacht, nicht wie S. Pdx, ſondern vielmehr wie S. Pdt: folglich muß S. Pdt das Maas der Beſchleunigung, auch das Maas der lebendigen Kräfte ſeyn. Allein dieſer Schluß fällt über den Haufen, wenn wir erwägen, daß nicht der bloſe beſchleunigende Theil des Drucks, ſondern der ganze in allen Punkten der Linie AB reizende, in die Materie übergetragen und ihr mitgetheilt werden muß, und auf dieſen Satz kommt es an. Dies iſt aber daraus bekannt, weil **die beſchleunigenden Preſſungen in allen Punkten der Höhe AB überall tode Kräfte ſind, und daher nicht aus ihrer bloſen abſoluten Größe, ſondern auch aus dem Moment, folglich aus der Geſchwindigkeit, womit ſich der Körper in dem Punkt, worinn der Druck wirkt, bewegt, zu ſchätzen.** Verhält ſich alſo gleich die Beſchleunigung in jedem Element aa, wie $\frac{Pdx}{mv}$, ſo iſt doch der ganze, auf die Trägheit, indem die Geſchwindigkeit eingedrückt wird, wirkende Druck, d. i. das ganze Moment des Drucks $= \frac{Pdx}{mv} v = \frac{Pdx}{m}$, daß alſo S. Pdx die ganze Summe der Preſſungen, die,

die, indem die Geſchwindigkeit der Trägheit mitgetheilt wird, wirken und in den fallenden Körper übergehen.

Demnach ſtreiten die Geſetze der toden Kräfte, oder der Preſſungen, ſo wenig mit dem Geſetz der lebendigen Kräfte, nach welchem ſie ſich verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, daß man vielmehr das Maas der lebendigen Kräfte in den Geſetzen der toden findet. Denn der Grund, warum die todten Kräfte ſich verhalten, wie die Maſſen in die Geſchwindigkeit multiplicirt, iſt eben der, warum die lebendigen Kräfte ſich verhalten, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten in die Maſſen. Denn der Effekt des Drucks auf die Materie iſt nicht allein aus dem Widerſtand zu beurtheilen, den der, Geſchwindigkeit eindrückende Druck unmittelbar antrift, ſondern aus dem ganzen Widerſtand, den er bey ſeiner Wirkung vorfindet, der zum Theil ein indirecter iſt, und von der Geſchwindigkeit ſelbſt herkommt, die bereits im Körper vorhanden. (V.)

§. 272.

Dies iſt genug, den ſcheinbaren Widerſpruch zwiſchen den Behauptungen §. 269. zu heben. Zwar iſt nicht zu läugnen, daß der Druck der Schwere in allen Punkten der Linie AB einerley iſt: zugleich aber zu merken, daß dieſer Druck nicht ganz, ſondern nur ein Theil davon, zur Vermehrung der Geſchwindigkeit, der übrige Theil aber angewendet wird, den Körper im Fall zu verfolgen, da er, bereits mit einer Geſchwindigkeit verſehen, ſich fortbewegt. Denn dieſer leztere Theil macht, daß erſterer in den Körper übergehen, und ſeine Bewegung beſchleunigen kann.

§. 273.

Demnach muß man ſich die ganze Beſchleunigung in zwey Theile getheilt vorſtellen. Der eine, wodurch die bewegende Kraft geſchickt gemacht wird, in die Materie überzugehen, d. i. der die Materie der beſchleunigenden Wirkung unterwirft. Der andere Theil aber iſt, wodurch die Materie weiter geſtoßen und fortbewegt wird. Nur von dieſem leztern hängt das Wachsthum der Geſchwindigkeit ab. Doch werden beyde in die Materie übergetragen, und bleiben nach der Wirkung darinn. Denn bey freyer Bewegung geht kein Theil der Kräfte verloren. Daher machen auch beyde zuſammen die **lebendige Kraft** des Körpers aus.

§. 274.

Die lebendigen Kräfte wachſen alſo in jedem Augenblick, nicht nur in dem Verhältnis, worinn die Geſchwindigkeit in jedem Augenblick wächſt, d. i. im Verhältnis der Zeit, ſondern zugleich in dem, worinn die bereits in den vorhergehenden Augenblicken im Körper erzeugte Geſchwindigkeit wächſt. Daher vermehren ſich auch die Kräfte im Verhältnis des Raums AB, wodurch die Körper fallen, weil die Geſchwindigkeiten in die unendlich kleinen Zeiten multiplicirt, dem Raum gleich ſind: die Geſchwindigkeit wird unterdeſſen nur von dem Theil der in die Materie übergehenden Kräfte vermehrt, der ſich nach dem Verhältnis der Quadratwurzeln der Räume richtet.

§. 275.

§. 275.

Aus dem geſagten erhellt, warum die Preſſungen den Geſchwindigkeiten, oder den Zeiten, vom Anfang des Falles ſtets proportional ſind; da ſie in allen Punkten des Raums, wodurch der Fall geſchieht, beſtändig und gleichgros ſind. Auch ſieht man hieraus, daß die erſten Grundlehren der Schwere unter ſich wohl zuſammenhängen; die Schwere reizt nämlich gleichförmig in allen Punkten der Linie AB, doch richtet ſich die Vermehrung der Geſchwindigkeit nicht nach der Summe dieſer Punkte des Raums, ſondern iſt den Zeiten proportional. Hieraus iſt auch zugleich einleuchtend, daß der §. 267. vorgetragene Beweisgrund für das Maas der lebendigen Kräfte überall Statt findet, und die Kräfte ſich bewegender Körper durch die Größe der Materie, in das Quadrat der Geſchwindigkeit multiplicirt, zu ſchätzen ſind. Hieraus folgt ferner

1.) Effekte der Körper, deren Maſſen ungleich, die Geſchwindigkeiten aber gleich ſind, verhalten ſich unter einander wie die Maſſen, oder wie die Größen der Materie. Und

2.) bey gleichen Maſſen verhalten ſich die Kräfte, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten. Ferner

3.) verhalten ſich auch dieſe lebendigen Kräfte der Körper unter einander, wie die Kräfte, wovon ſie erzeugt werden, und Effekte ſind. Hieraus erhellt wiederum, daß die Kräfte, die erfordert werden, eben dem Körper gewiſſe Geſchwindigkeiten mitzutheilen, im

Verhältnis der Quadrate dieſer Geſchwindigkeiten ſtehen müſſen.

Um die Geſchwindigkeit 1. dem Körper einzudrücken, iſt eine Kraft nöthig = 1; aber die Geſchwindigkeit = 2 einzudrücken, wird eine Kraft erfordert = 4; und die Geſchwindigkeit = 3 zu erzeugen, muß die Kraft = 9 ſeyn.

4.) Hieraus iſt auch klar, daß bereits mit einer Geſchwindigkeit verſehene Körper deſto ſchwerer **einen neuen Grad der Geſchwindigkeit annehmen, je größer die ſchon iſt, die ſie beſitzen.** Zu einem neuen Grad der Geſchwindigkeit iſt allemal eine größere Kraft nöthig, als wodurch der vorhergehende erzeugt wird.

§. 276.

Hieraus ſieht man auch, warum ſich bewegende Körper Widerſtände überwinden können, die ſich verhalten wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten, womit ſich die Körper bewegen. Denn indem die Geſchwindigkeit der Körper von den widerſtehenden Materien zerſtört wird, wirken die Körper mit der ganzen ihnen mitgetheilten Gewalt: nicht nur mit der, wodurch die Geſchwindigkeit erzeugt worden, ſondern auch mit dem übrigen Theil der Kräfte, die ſie während der Wirkung erhielten, da die bewegende Kraft die Materie verfolgte, die, mit Geſchwindigkeit verſehen, zu entfliehen und der Wirkung der Kräfte, wenn es ſo zu reden erlaubt iſt, auszuweichen ſtrebte.

§. 277.

Beym Schluß dieſer Vorleſung laßt uns aus dem geſagten die Eigenſchaften ſchlieſen, wodurch

ſich

ſich Preſſungen oder tode Kräfte von lebendigen unterſcheiden; es ſind vorzüglich folgende:

1.) Preſſungen hören in eben dem Augenblick auf, worinn ſie erzeugt werden und wirken. In eben dem Augenblick, worinn ſie entſtehen, vergehen ſie. Lebendige Kräfte aber dauern in wirklicher Bewegung fort, ſo lange dieſe fortgeſezt wird: und werden nie in einem Augenblick zerſtört; obgleich der Körper ihrer nach und nach ſtückweis beraubt werden kann, wenn er auf Hinderniſſe trift.

Drückt ein Gewicht die Fläche, worauf es liegt, ſo wird ſein Druck in jedem Augenblick vernichtet. Auf was für ein Hinderniß auch Preſſungen wirken, ſo iſt ihr Effekt von beſtimmter Größe, und entſteht nur in einer Stelle. Bringen ſie daher nicht gleich im erſten Augenblick Bewegung hervor, ſo bringen ſie ſie niemals hervor.

Ein ſich bewegender Körper hingegen, eine Kugel z. B. iſt nicht nach dieſen oder jenen Ort in ſeiner Wirkung beſtimmt: vielmehr ſtrebt er beſtändig, den Ort zu verändern, und ſeine Wirkung in einen andern zu tragen. Ferner bewirkt er auch in dem aufſtoßenden Körper mehr oder weniger, nachdem ihm dieſer mehr oder weniger widerſteht. Auch werden ſeine Kräfte nicht in einem und demſelben Augenblick alle zerſtört, was beym Druck geſchieht: ob er gleich mehr oder weniger nach der Größe des Hinderniſſes verliert. Endlich kann auch ein Stoß von der lebendigen Kraft des Körpers, bringt er nicht gleich beym erſtenmal Bewegung hervor, doch öfters widerholt, ſie erzeugen. Demnach ſind Preſſungen und lebendige Kräfte weit unterſchieden.

§. 278.

2.) Ferner ſcheinen auch die in jedem Augenblick verſchwundenen Preſſungen mit eben der Gewalt, womit ſie vergiengen, wieder erweckt zu werden; die einmal verloren gegangenen lebendigen Kräfte hingegen kehren nie, ohne neue bewegende Wirkung, wieder zurück. Dieſem Unterſchied der Kräfte wollen wir unten noch einen andern beyfügen, den wir hier nebſt andern übergehen, weil er aus dem bisher vorgetragenen ſich nicht hinlänglich einſehen läßt.

§. 279.

Jede lebendige Kraft läßt ſich in zwo andere, rechtwinklicht auf einander ſtehende, zerlegen; und umgekehrt machen zwo lebendige Seitenkräfte, deren Richtungen einen rechten Winkel einſchlieſen, eine mittlere lebendige Kraft aus, die der Diagonale des Rechtecks, deſſen zwo anliegende Seiten ſich verhalten wie jene Seitenkräfte, proportional iſt. Es ſeyen BE, BD (Taf. XII. Fig. 7.) zwo lebendige Kräfte, deren Gröſſe ſowohl als Richtung durch dieſe Linien gegeben iſt: ſo entſteht aus dieſen Kräften eine mittlere Kraft BC, wie aus dem, was oben vom Parallelogramm der Kräfte geſagt worden, bekannt iſt. Dieſe lebendige mittlere Kraft BC aber, wird jenen lebendigen Seitenkräften zuſammengenommen gleich ſeyn. Denn $BC^2 = BD^2 + DC^2 = BD^2 + BE^2$. Dies folgt aber aus der Natur der lebendigen Kräfte, und ſo muß es auch ſeyn, vermöge deſſen, was wir oben von den zuſammengeſezten Kräften beygebracht haben. Denn da Kräfte, deren Richtungen einen rechten Winkel ein-

einſchlieſen, einander weder helfen, noch hindern, ſo muß die aus ihnen zuſammengeſezte Kraft mit ihnen von gleicher Größe ſeyn.

Auch ſieht man, daß ſich jede lebendige Kraft BC als eine mittlere Kraft anſehen, und in zwo andere, auf einander ſenkrechte Seitenkräfte BE und BD zerlegen läßt. Alsdenn verhält ſich die lebendige Kraft BE, wie BE^2; die andere in der Richtung BD aber, wie BD^2.

Anmerkung. Dies begreift man aus §. 275. zur Genüge. Noch iſt aber folgender Zweifel, der dem aufmerkſamen Leſer aufſtößt, übrig. Sind die Seitenkräfte BD, BE (Taf. XII. Fig. 7.) tode Kräfte, ſo wird die aus ihnen zuſammengeſezte mittlere Kraft ſich auch wie BC verhalten. Aber die Linie BC iſt kleiner als die beyden Seiten, und der mittlere Druck kleiner als die Seitenpreſſungen zuſammen, da doch jener mit dieſen nothwendig gleichgros zu ſeyn ſcheint. Denn unter einem rechten Winkel vereinigt, helfen noch hindern ſie einander. Hier ſcheint alſo im Parallelogramm der Kräfte ein kleinerer Effekt, als ſeine auf keine Weiſe gehinderten Urſachen, zu entſtehen. Dieſer widerſinnige Saz läßt ſich nicht vermeiden, wo von der Zerlegung und Zuſammenſezung der Kräfte im Parallelogramm gehandelt wird.

Sehr ſchön hat dies **Bilfinger** in Actis Petrop. Tom. I. de viribus corpori moto inſitis, entwickelt. Seine ſcharfſinnigen Bemerkungen wollen wir kürzlich beyfügen. Denn man muß keine Mühe ſparen, die erſten Gründe der Wiſſenſchaften von ihren Schwierigkeiten zu befreyen.

1.) **Wenn wir ſagen, die ſenkrecht auf einander ſtehenden Kräfte wirken ſo, daß keine die andere hindert, ſo iſt dies nicht von der Bewegung in der Richtung zu verſtehen, worinn dieſe oder jene Kraft beſonders betrachtet zu wirken ſtrebt.** Denn es iſt klar, daß die Bewegung durch die Linie DB verurſacht, daß die Bewegung nicht durch BE geſchieht, und die Bewegung durch BD die durch BE hindert; wodurch es geſchieht, daß ſich der Körper weder in dieſer, noch in jener bewegen kann. Man betrachtet hier vielmehr die Bewegung, ſofern ſie auf der Ebene geſchieht, und die Lage des bewegten Körpers in der Ebene iſt einerley, der Körper mag von der bloſſen mittlern Kraft BC, oder von den beyden Seitenkräften BE, BD getrieben werden. Iſt der Winkel EBD ein rechter, ſo hindern ſich dieſe Bewegungen nicht in Anſehung der Lage des Punkts C, und der Bewegung des Körpers B in der Ebene.

2.) **Folglich iſt die Bewegung durch die Linie BE, nur als Bewegung von einer einzigen Abmeſſung anzuſehen:** die zuſammengeſezte Bewegung aber, oder die Bewegung durch die Ebene, hat zwo Abmeſſungen. Denn die Bewegung durch die Linie BE geht in gerader Linie durch ihre Elemente fort, ſo daß aus dieſer Linie BE, die ihre einfache Richtung iſt, hier nichts zu betrachten vorkommt. Die Bewegung hingegen durch die Ebene wird ſo verrichtet, daß, indem der Körper in der Linie BE fortrückt, dieſe Linie zugleich mit der Geſchwindigkeit DB ſich in der Richtung DB bewegt. Auf dieſe Art wird ein Parallelogramm beſchrieben, welches zwo Abmeſſungen hat.

3.) Man

3.) Man kann ſagen, die Kraft des Drucks durch BC iſt den Kräften der Preſſungen durch BE, BD zuſammengenommen gleich, iſt gleich die Diagonale BC kleiner als BE + BD. Denn der Druck iſt nicht allein aus ſeiner abſoluten Größe, ſondern auch aus der Geſchwindigkeit oder aus dem Raum, den er in einer gegebenen Zeit zurücklegt, zu beurtheilen. Da nun die Preſſungeu ſelbſt und die Räume der Linien, BC, BD, BE proportional ſind, weil die Zeit in allen einerley, ſo verhält ſich offenbar die Kraft des Drucks durch BC wie BC^2; und die übrigen Kräfte wie BE^2, BD^2. Aber $BC^2 = BE^2 + BD^2$, wenn EBD im rechten Winkel.

4.) Nicht nur der mittlere Druck BC läßt ſich in zwo andere Seitenpreſſungen BE, BD zerlegen, ſondern eben dies kann auch bey jeder Geſchwindigkeit geſchehen. Die Geſchwindigkeit BC iſt auch mit den beyden Geſchwindigkeiten BE, BD einerley.

§. 59. Eben dies ſchließt man auch leicht aus (2). Denn die Bewegung durch BC hat zwo Abmeſſungen, wenn man ſie in Rückſicht auf die Ebene betrachtet; nur eine Abmeſſung aber, wenn man ſie auf eine gerade Linie, die ihre Richtung iſt, bezieht. Daher iſt die Bewegung durch BC mit den beyden andern durch BD und BE von einerley Größe. Nun verhält ſich bey gleichförmiger Bewegung der Raum wie die Geſchwindigkeit in die Zeit; und da hier die Zeit in der Bewegung durch BC, BD, BE einerley, ſo kann man ſtatt des Raums und der Bewegung die Geſchwindigkeit nehmen; folglich hat die Geſchwindigkeit BC ebenfalls zwo Abmeſſungen, und mit den Geſchwindigkeiten in BD, BE gleiche Größe. Nimmt man aber die Geſchwindigkeit

durch

durch BC von doppelter Abmeſſung an, ſo muß man in der Gleichheit derſelben mit BD + BE auf die Lage des Punkts C gegen B ſehen, und bemerken, daß dieſe Lage einerley, es mag blos Bewegung durch BC vorhanden ſeyn, oder man mag zwo Seitenbewegungen durch BD und BE annehmen.

5.) Sind aber die Seitenkräfte unter einem **ſpitzen** Winkel zuſammengeſezt, ſo folgt aus dem Parallelogramm ſelbſt, daß das Quadrat der Diagonale ab (Taf. XII. Fig. 8.) = dem Quadrat der Summe der Linien ec + eb, wodurch die in eben der Richtung wirkenden Kräfte angedeutet werden, + dem Quadrat der Linie ae, ſo die Kraft bedeutet, von welcher erſtere Kräftt nicht gehindert werden, ſondern ihre Richtung nur verändert wird. Dies ſieht man leicht ein, wenn die eine Seitenkraft in zwo andere ſenkrechte, ae und ec zerlegt wird, wovon dieſe mit ad einerley Richtung hat, die andere ae ſo liegt, daß ſie auſer der Richtung nichts ändert.

Die **lebendigen Kräfte** aber für ſich genommen, verhalten ſich wie die Quadrate ad^2, ac^2, ab^2. Iſt daher der Winkel der Kräfte ſpitzig, ſo iſt die lebendige Kraft ab größer als die Summe der Seitenkräfte ad und ac, und übertrift ſie um das Parallelogramm 2ec. cb. Denn $ab^2 = ae^2 + eb^2 = ae^2 + ec^2 + cb^2 + 2ec.\ cb = ac^2 + cb^2 + 2ec.\ cb$.

Nichts deſto weniger läßt ſich die **lebendige Kraft** durch ab in zwo andere Seitenkräfte ac und ad zerlegen; und die beyden Seitenkräfte ac und ad machen eine dritte mittlere Kraft aus. Denn die **lebendige Kraft** ac verhält ſich wie ac^2, daher ihre Geſchwindigkeit wie ac, die ſich in zwo andere

Geſchwin-

Geſchwindigkeiten ae und ec zerlegen läßt, ſo daß dieſe neuen lebendigen Kräfte der, woraus ſie entſtanden, gleich ſind, weil $ac^2 = ae^2 + ec^2$. §. 279. Daher verhält ſich auch die ganze Geſchwindigkeit in der Richtung ad, wie $ec + cb$, und die ihr zugehörige lebendige Kraft iſt $ec^2 + 2ce.\,eb + cb^2$. Aber die lebendige Kraft in ae verhält ſich wie ae^2. Da aber die lebendigen Kräfte durch ae und eb einander nicht hindern, ſo muß auch die von den unter einem ſpitzen Winkel zuſammengeſezten Kräften ad und ac erzeugte lebendige Kraft $= ab^2$ ſeyn, weil $ab^2 = ae^2 + eb^2$. Hieraus erhellt, daß mehrere, zu eben der Zeit in einem Körper vorhandene lebendige Kräfte, deren Richtung einen ſpitzen Winkel einſchlieſen, eine lebendige Kraft, größer als ſie ſelbſt zuſammen, ausmachen. Aber dieſe Kräfte ſelbſt, ſo die größere ausmachen, ſind ſo beſchaffen, daß ſie, vermittelſt eines Parallelogramms, ſich in andere gleichgeltende, die ſich ſtatt jener ſetzen laſſen, wenn man nicht ſagen kann, in gleichgroße, zerlegen laſſen, die wiederum zuſammengenommen mit jener größern mittlern Kraft gleichgros ſind.

6.) Dieſer Widerſinn nimmt zu, und wird am größten in dem Fall, wo der Winkel $dac = 0$. Denn alsdenn iſt $ab^2 = (ad + ac)^2$. Daher auch zwo Kräfte, die in einem und demſelben Körper in eben der Richtung wirken, und wovon jede einzeln genommen, eine Geſchwindigkeit $= 1$ ausmacht; zuſammengenommen, eine lebendige Kraft $= 4$ erzeugen. Sind die einzelnen Geſchwindigkeiten 2 und 1, ſo iſt die lebendige Kraft beyder zuſammen $= 9$, u. ſ. f.

7.) Iſt

7.) Iſt hingegen der Winkel der Kräfte dac (Taf. XII. Fig. 15.) ſtumpf, ſo iſt das Quadrat der Diagonale nicht gröſser, als das Quadrat der Linie, die den Unterſchied der entgegengeſezten Kräfte ausdrückt, + dem Quadrat der Linie, die die Kraft ausdrückt, von welcher die Aenderung der bloſen Richtung abhängt. Denn $ab^2 = eb^2 + ae^2 = (ad - af)^2 + ae^2 = ad^2 + af^2 + ae^2 - 2ad.af.$

Die lebendige Kraft in ac verhält ſich wie ac^2, und ihre Geſchwindigkeit wie ac. Aber ſowohl die Kraft ſelbſt, als die Geſchwindigkeit, läſst ſich in zwo andere af und fc zerlegen, und alles bleibt einerley. Alsdenn iſt die Geſchwindigkeit in der Richtung ad, wenn die Kräfte einen ſtumpfen Winkel einſchlieſen, ad — af. Daher iſt auch die lebendige Kraft nur $(ad - af)^2$. Die andere lebendige Kraft aber iſt ae^2, daher die Summe dieſer Kräfte $= ab^2 =$ der lebendigen Kraft durch ab. Hier iſt alſo die erzeugte Kraft ab^2 kleiner als die Summe der erzeugenden; ob ſich gleich die lebendige mittlere Kraft ſtatt der Seitenkräfte ſetzen läſst.

Es iſt aber wohl zu merken, daſs hier nicht die Rede von lebendigen, durch einen Trieb wirkenden Kräften, die auſer dem Körper, worinn ſie wirken, befindlich ſind. Wir verſtehen hier mehrere lebendige Kräfte, die zugleich zu eben der Zeit in eben dem Körper vorhanden.

8.) Doch hier kann dem aufmerkſamen Leſer ein anderer nicht unerheblicher Zweifel einfallen. Was (5) und (7) vorgetragen worden, ſcheint zwar deutlich zu ſeyn. Denn wir ſchloſſen aus den Eigen-

ſchaften

ſchaften des Parallelogramms, daß die vereinigte Geſchwindigkeit in der Richtung ad (Taf. XII. Fig. 8.) ſich verhält wie eb, folglich die lebendige Kraft in eben der Linie wie eb^2. Nun ſcheint doch auch nicht minder offenbar, daß die lebendige Kraft in der Linie ab nach Zerlegung der Kraft ac in ae und ec, nicht größer ſeyn kann, als $ac^2 + ad^2$, weil $ac^2 = ae^2 + ec^2$; folglich kleiner als ab^2. Auch ſcheint es der Wahrheit nicht gemäs, daß eine lebendige Kraft in der Linie cb entſtehe, die größer als die, woraus ſie entſtanden, in eben der Richtung betrachtet.

Dieſer Zweifel wird aber folgendergeſtalt gehoben: Iſt es gleich wahr, daß die lebendige Kraft in der Richtung ad, die aus der Zerlegung der lebendigen Kraft in der Linie ac entſpringt, nicht größer ſeyn kann, als die Kraft ec^2, wenn ſie auf einen ruhenden, mit keiner Bewegung ſchon verſehenen Körper wirkt: ſo verhält es ſich hier doch anders. Denn die Kraft in der Linie ec ſoll bewirken, daß dem Körper, bey dem bereits die Geſchwindigkeit cb in der Richtung ad vorhanden, die neue Geſchwindigkeit ec in eben der Richtung mitgetheilt wird. Aus dieſem Grunde ſoll die neue lebendige Kraft in der Linie ec, die aus der lebendigen Kraft in der Linie ac erwächſt, nicht nur die Trägheit a durch den Raum ec, ſondern auch ſich ſelbſt bewegen, damit ſie dieſe Wirkung ausüben kann: ja ſie ſoll die, bey dem Körper ſchon vorhandene, in der Linie ad wirkende Kraft bewegen. Nun iſt die neue in der Linie ad aus der Kraft ac erzeugte Kraft, ſofern ſie den Körper a durch den Raum ec bewegt, $= a. ec$. Betrachtet man ſie alſo

1.) in

1.) in wiefern ſie die Trägheit a und zugleich ſich ſelbſt durch den Raum ec bewegt, = a. ec. ec = a. ec^2. Denn dieſe Kraft ſelbſt iſt als ihre eigne Trägheit anzuſehen, und in dieſer Rückſicht = dem Produkt aus ihr in den Raum, wodurch ſie ſich bewegt.

2.) Um aber der Materie a Bewegung einzudrücken, muß ſich auch die Kraft ſelbſt durch den Raum cb in eben der Zeit bewegen, worinn ſie die Trägheit a und ſich ſelbſt durch ec bewegt. Aus dieſem Grunde iſt ſie = a. ec. cb. §. 23.

3.) Sofern ſie die Kraft nach ad, womit die Materie bereits durch den Raum ce rückt, bewegt, iſt ſie a. ec. cb. Denn die Kraft in a ſtößt dieſe Trägheit in eben der Zeit durch cb, verhält ſich folglich wie a. cb. Wird ſie aber als Trägheit betrachtet durch ec geführt, ſo iſt die bewegende Kraft, die auf dieſe Bewegung verwendet wird, a. ec. cb. §. 23.

4.) Demnach ſind alle Effekte der neuen, aus der Kraft ac entſtandenen Kraft nach ec, = 2a. cb. ce + a. ec^2. Da nun die Kräfte ſich verhalten wie ihre Effekte, ſo wird die lebendige Kraft nach ec, die man aus der Zerlegung der Kraft ac in zwo andere ae und ec erhält, = a. ec^2 + 2a. cb. ce. §. 23.

5.) Noch iſt die lebendige Kraft a. ad^2 vorhanden, die bereits vor der Zerlegung da war. Hieraus entſteht die Summe der in der Richtung eb wirkenden lebendigen Kräfte, aus allen ihren Effekten zuſammengenommen, = a. ec^2 + 2a. cb. ce + a. ad^2,; addirt man hierzu die lebendige Kraft a. ae^2 ſo iſt die Summe aller lebendigen Kräfte in ac und ad = ab^2. Demnach ſieht man, daß, was aus der Natur der Kräfte folgt, mit dem, was oben (5) und (7) behauptet worden, genau übereinſtimmt. (V.)

Zuſatz

Zuſatz.
zur funfzehnten Vorleſung.
Anfangsgründe der Dynamik.
(Von dem Herrn Prof. Tetens.)

Inhalt.

§. 1. — 6. Kräfte und ihre Wirkungen überhaupt. §. 7. 8. Lebendige und tode Kräfte — verſchiedene andere Gattungen Kräfte. §. 9. Kalkul der Kräfte. §. 10. Zuſammengeſezte Kräfte — reſpektive Wirkungen der Kräfte. §. 11. f. f. Gegenſeitige Wirkung der Kräfte, Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. §. 17. f. f. Zuſtand des Gleichgewichts entgegengeſezter Preſſungen. §. 19. Grundſatz der Hydroſtatik. §. 20. f. f. Gegenſeitige Wirkung im Fall der Bewegung. §. 23. Erzeugung und Zerſtörung der lebendigen Kräfte. §. 24. — 30. Verſchiedene Wirkungen lebendiger Kräfte; gegenſeitige Wirkung beym Zuſammenſtoß derſelben. §. 31. Erhaltung der lebendigen Kräfte. §. 33. Größe der Bewegung nach einerley Richtung. §. 34. Grundſatz der Stätigkeit in der Wirkung der Kräfte. §. 35. — 38. Maas der Preſſungen; erſter Grundſatz der Statik. §. 39. — 43. Maas der lebendigen Kräfte und der bewegenden Wirkungen. §. 44. — 47. Maas der zuſammengeſezten Kräfte. §. 48. 49. Maas der reſpektiven Wirkungen.

---

§. 1.
Einleitung.

Was der Verfaſſer, ſowohl in der XV. Vorleſung, als auch an andern Orten dieſes Werks, über

die Natur und die verſchiedenen Gattungen der bewegenden Kräfte, nebſt der Beſtimmung ihrer Größe, mit vielem Scharfſinn abgehandelt hat, entſcheidet doch nach meinem Urtheil den berühmten Streit über das Maas der lebendigen Kräfte, der zu unſern Zeiten mehr eingeſchläfert, als beygelegt iſt, nicht zur Genüge. Einige, und darunter große Männer, halten ihn für einen bloſen Wortſtreit: auch ſcheint das, was der Verfaſſer vorbringt, uns nicht zu nöthigen, bey Ausmeſſung der Kräfte minder dem **Carteſius** und **Merſenn** als **Leibnitzen** zu folgen, wenn nicht das, was unter dem Namen der Kräfte zu verſtehen iſt, vorher deutlich erklärt wird. In der That müßte man ſich, wäre nichts an der Sache gelegen, wundern, daß ſo große Männer, dergleichen es bey dieſem Streit auf beyden Seiten gab, ſich ſo leicht in eine leere Unterſuchung verwickeln lieſen. Unterſuchen wir aber die Sache genauer, ſo finden wir, daß es ſich ganz anders damit verhält. Zwar ſind ſie von beyden Seiten über die Erſcheinungen einig; ſie ſetzen bey den elaſtiſchen und weichen Körpern einerley Geſetze des Stoßes feſt; auch zieht man die Verſuche nicht in Zweifel, womit jeder Theil die Wahrheit ſeines Maaſes zu beſtätigen ſucht, und die jeder mit ſeiner Hypotheſe vereinigen zu können glaubt. So weit iſt alles auſer Streit. Kommen wir aber auf die Art und Weiſe, wie die Erſcheinungen ſelbſt erklärt werden; iſt von der Natur und Beſchaffenheit, der Erzeugung und Zerſtörung der bewegenden Kräfte und ihrer Wirkungen die Rede; das iſt, gehen wir auf den philoſophiſchen Theil der Naturlehre und Mechanik zurück, ſo ſehen wir die Vertheidiger der verſchiedenen Maaſe auf ſehr verſchiedene Wege

ver-

verfallen. Ich läugne nicht, daß die Unterſuchung über das Maas der Kräfte an ſich betrachtet, auf die verſchiedene Bedeutung, die bey dem Ausdruck Kraft, zum Grunde liegt, ganz zurückgeführt, und in allen übrigen Dingen die nämlichen Begriffe beybehalten werden können; allein wegen dem Zuſammenhang dieſes Maaſes mit andern Begriffen und Grundſätzen geſchieht dieſes nicht. Denn ich kenne keinen, der beyderley Maas für gleich anwendbar, und zugleich die Natur und Wirkungsart der Kräfte, nebſt andern, aus beyden Meſſungsarten hergeleiteten Folgen für gleich wahr, und mit der Natur der Körper und der Bewegung für gleich übereinſtimmend hält. Sey alſo immerhin nichts daran gelegen, ob man die Kräfte auf dieſe oder jene Art dem Maaſe unterwirft, ſo liegt doch gewiß viel an den Begriffen von den Kräften und ihrer Wirkungsart, der Natur der gegenſeitigen Wirkungen und des übrigen, was zur Dynamik gehört, und den philoſophiſchen Theil der allgemeinen Mechanik ausmacht.

Vieles hieher gehörige hat zwar der Verfaſſer beygebracht, aber auch vieles von Wichtigkeit entweder weggelaſſen, oder nicht deutlich genug aus einander geſezt. Ich war daher Willens, dieſe Sache durch beygefügte Anmerkungen, ſo viel möglich, zu erläutern. Da mir aber hierbey ſo viel Schwierigkeiten aufſtießen, daß ich zu völliger Entwickelung der Sache beynahe bis auf die erſten Grundſätze hätte zurückgehen müſſen, auch noch viel zu erinnern übrig blieb, ſo bisher nicht deutlich genug war erklärt worden, ſo wollt' und mußt' ich, Weitſchweifigkeit zu vermeiden, alles dasjenige in einem Ort zuſammentragen, was mir über die Natur der bewegenden

Kräfte und ihre Wirkungsart beyzubringen nöthig ſchien. So ſieht man leicht mit einem Blick, ſowohl die Harmonie der Grundwahrheiten unter ſich, als auch ihre Uebereinſtimmung mit ihren Folgen und den Erſcheinungen ein.

§. 2.
Kräfte überhaupt.

Unter dem Wort **Kräfte**, verſteht man hier allgemein alles **dasjenige, wodurch eine Bewegung oder Beſtreben zur Bewegung entweder hervorgebracht, oder verhindert, oder vernichtet werden kann.** Allgemeinerer Ausdrücke will ich mich nicht bedienen, um nicht, indem ich mich der Kürze befleißige, dunkel zu werden. Man nimmt aber Kraft ſowohl für das **Vermögen**, als für das materielle Subjekt ſelbſt, dem dies Vermögen beywohnt. Die Kräfte **wirken**, wenn ſie eine Bewegung oder Beſtreben zur Bewegung entweder wirklich hervorbringen, oder vernichten, oder verhindern. Alsdenn ſind es **wirkende** Urſachen; und dasjenige, was von ihnen bewirkt wird, heißt ihr Effekt. Die **empfindenden** und **denkenden** Kräfte gehören nicht in die Grenzen der Mechanik.

§. 3.
Wirkung der Kräfte.

Indem die Kräfte etwas bewirken, **wirken** ſie. Daher entſtehen die **Effekte** aus ihren **Wirkungen**, und müſſen dieſen **proportional** ſeyn. Das bloſe **Vermögen**, ſo dem Körper beywohnt, bewirkt nichts, ehe es wirkt, wo es nicht auf einen andern Gegen-

Gegenſtand gerichtet wird. **Die Wirkung kann nicht größer ſeyn, als das Vermögen zu wirken, und hängt von dieſem ab.** Zuweilen pflegt man ſowohl die Wirkungen der Kräfte, als auch die Kräfte ſelbſt, mit einem und eben demſelben Namen zu benennen, und das ohne Irrthum. Doch hüte man ſich, beyde mit einander zu verwirren.

§. 4.

Kraft der Trägheit und bewegende Kraft.

Wenn wir an einem ruhenden Körper nichts auſer ſeiner Materie wahrnehmen, (ich ſage nicht, daß nichts weiter an ihm vorhanden ſey,) ſo finden wir doch, 1.) daß er eine Bewegung oder ein Beſtreben zur Bewegung von einem andern Körper empfängt, der ihn dergeſtalt berührt, daß der ruhende durch die Wirkung des andern entweder ganz, oder zum Theil aus ſeiner Stelle zu weichen genöthigt wird. Und daß 2.) wenn der ruhende Bewegung empfangen, zugleich bey dem berührenden Körper eine gleiche Bewegung verlohren gehe. Endlich 3.) wenn in einem ruhenden Körper eine bewegende Kraft vorhanden iſt, die in einen andern ruhenden wirkt: ſo empfängt dieſer leztere nicht allein eine Bewegung von der Wirkung der Kraft, in der Richtung der Kraft, ſondern es wird auch eine gleiche nach der entgegengeſezten Seite in dem Körper erregt, bey dem die wirkende Kraft vorhanden iſt. Ein Menſch, der in einem Kahn ſtehend ein Schiff fortſtößt, bewegt ſich ſelbſt mit dem Kahn zurück. **Es ſcheint daher in der Materie des Körpers ein gewiſſes Vermögen zu liegen, Bewegung zu empfangen, und auch in einem andern Körper nach der entgegenge-**

ſezten Richtung hervorzubringen, wodurch entweder die Bewegung des leztern, wenn eine da iſt, vernichtet, oder eine neue erzeugt wird, wenn vorher keine da geweſen. Dieſes Vermögen des Körpers nennen wir die **Kraft der Trägheit**, deren Wirkung die **Gegenwirkung** iſt.

Ich habe geſagt, die Sache ſcheint ſich ſo zu verhalten. Unten wird aus der Vergleichung mehrerer Erſcheinungen erhellen, daß man ſich dieſe Kraft allerdings als eine wahre wirkende Kraft denken kann; und daß es doch zugleich mit den Beobachtungen übereinſtimmt, wenn man unter der **Kraft der Trägheit** blos ein **leidendes Vermögen** verſteht, das der von einer bewegenden Kraft erzeugten Bewegung empfänglich iſt. Daß ſich aber ſelbige allerdings als eine thätige Kraft in ſolchen Fällen beweißt, dergleichen die Entfernung des Kahns und des Schiffs von einander, und das Anziehen an einander vermittelſt eines Seils ſind, iſt offenbar. Einige wollen zwar dieſe Kraft aus der Zahl der Kräfte gänzlich ausgeſchloſſen wiſſen; andere behaupten hingegen, ſie ſey blos **beziehungsweiſe**, d. i. nachdem man ſich eine Sache ſo oder anders vorſtellt, von den **bewegenden Kräften** verſchieden. Dem ſey wie ihm wolle, ſo darf man hier im Anfang den ſcheinbar wahren Begriffen, denen die Erſcheinungen nicht widerſprechen, folgen. Die **Kraft der Trägheit** ſey alſo eine **bewegende Kraft**, da ſie nicht allein Bewegung zu empfangen, ſondern auch zu erzeugen ſcheint.

Doch darf man ſie von andern bewegenden Kräften unterſcheiden. Zwar nicht dadurch, daß ſie für ſich in einem ruhenden Körper nichts auſer ſich in

einem

einen andern Körper wirkt, wo er nicht ſeinen Zuſtand und Ort durch die Wirkung des andern zu verlaſſen genöthigt wird: denn eben dieſes iſt die Eigenſchaft der bewegenden Kräfte. Denn die bewegende Kraft, die wir in einem ſich bewegenden Körper annehmen, wirkt ebenfalls nichts auſer ſich in einen andern, ſo lange jener von dieſem nicht gehindert wird, den Zuſtand ſeiner Bewegung, ſeine Geſchwindigkeit oder Richtung beyzubehalten. Dieſes läßt ſich auch von der Federkraft, der Kraft des Zuſammenhängens und andern Kräften der Körper ſagen. Denn ſo lange man ſie in ihren Maſſen, worinn ſie ſich in einem gewiſſen Zuſtande befinden, eingeſchloſſen, und in ſelbigem beharrend gedenkt, bewirken ſie nichts auſer ſich. Es iſt ein äuſerer Körper nöthig, welcher dergeſtalt an jene Kräfte angebracht wird, daß ſie ihren vorigen Zuſtand nicht beybehalten können. Nur erſt unter dieſer Bedingung werden ſie zur Wirkung auſer ſich gereizt.

Doch unterſcheidet ſich die Kraft der Trägheit von der bewegenden Kraft 1.) dadurch, daß jene, wenn der Körper ruht, ſchlechterdings nichts wirkt, weder in dem Körper, dem ſie beywohnt, noch auſerhalb in einem andern; weder Bewegung hervorbringt, noch ein Beſtreben zur Bewegung: die bewegende Kraft aber iſt ein ſolches Vermögen, einen andern äuſern Körper zu bewegen, das wirklich innerlich in dem Körper ſelbſt, dem es beywohnt, wirkt, indem ſie ihn entweder von einem Ort zum andern fortrückt, dergleichen die Wirkung der bewegenden Kräfte in den ſich bewegenden Körpern iſt, oder indem ſie wenigſtens ein Beſtreben zur Bewegung in den innern Theilen erregt; wel-

ches die Kraft der Elaſticität, des Zuſammenhängens u. a. thun. **Die** bewegende Kraft iſt alſo kein bloſes **Vermögen** zu wirken: ſie iſt ſelbſt wirkſam, wenigſtens in dem Körper, dem ſie beywohnt; ob ſie gleich in Anſehung der äuſern Wirkung in andere nichts weiter als ein **Vermögen** oder eine **Kraft zu wirken** beſizt, ſo lange ſie an keinen äuſern Gegenſtand angebracht wird. Daher iſt auch 2.) wenn die Kraft der Trägheit wirkt, dieſe ihre **Wirkung** eine **Gegenwirkung**, d. i. eine ſolche Wirkung, die eine vorhergehende Wirkung einer andern Kraft erfordert, von der ſie gereizt wird, und der ſie allemal proportional iſt. Die bewegenden Kräfte wirken ſchon für ſich innerlich, und bedürfen keiner fremden Anreizung zum Wirken, obgleich einer Veranlaſſung zur Wirkung in andere Körper auſer ſich. Der Ordnung der Vernunft und Natur nach geſchieht alſo der Anfang der gegenſeitigen **Wirkung** von der **Wirkung** der bewegenden Kraft; der dann erſt die **Gegenwirkung** folgt, und ihr entſpricht. Daher iſt auch die Gegenwirkung der Trägheit ſelbſt ein **Effekt**, der aus der **Wirkung** der bewegenden **Kraft** entſteht. Iſt die bewegende Kraft = 1, und ihre Wirkung = 1; ſo iſt die Trägheitskraft und ihre Gegenwirkung ebenfalls = 1, hieraus iſt kein doppelter Effekt = 2 in der Bewegung der Körper zu erwarten, der eine nämlich von der bewegenden, der andere von der Trägheitskraft. Keineswegs Die Trägheitskraft wirkt nur gereizt von der bewegenden Kraft, und nur durch Gegenwirken; die aus der Gegenwirkung erzeugte Bewegung iſt ein Effekt der bewegenden Kraft, aber ein mittelbarer, kann folglich den unmit-

unmittelbaren Effekten derſelben nicht beygezählt werden.

§. 5.

Preſſungen und bewegende Wirkungen.

Die Wirkungen der bewegenden Kräfte ſind etwas ſtätes: wenigſtens können wir uns ſelbige ſo vorſtellen, da ſie es zu ſeyn ſcheinen. **Wirkung**, die nicht gehindert wird, erzeugt **Bewegung**: der **Anfang** der Bewegung aber iſt das **Beſtreben zur Bewegung** im engern Verſtande, das, nicht gehindert und fortgeſezt, in **Bewegung** übergeht. **Wirkung**, wodurch Bewegung hervorgebracht wird, heißt **bewegende Wirkung**. Wird Bewegung hervorgebracht, ſo ſtellt man ſich die **bewegende Wirkung** aus ſehr kleinen auf einander folgenden **Reizungen** zuſammengeſezt vor: und die Bewegung, die der Effekt derſelben iſt, als eine **endliche** Größe, die aus unendlich kleinen auf einander folgenden Elementarbewegungen entſteht. Die **Reizungen** heiſen **Elementarwirkungen**, oder Elemente der Wirkungen: Die Elemente der Bewegung ſind **Beſtrebungen**; doch bedienen wir uns häufiger dieſes Ausdrucks im engen Sinn genommen, um das **erſte** Element der Bewegung, oder den Anfang der Bewegung anzudeuten. Wird die Wirkung der Kraft gehindert, daß ſie nicht bewegend werden kann, ſondern beym bloſen **anfänglichen Reiz** ſtehen bleibt; ſo heißt dieſer Anfang der gehinderten Wirkung: **Druck oder Preſſung**. Oefters pflegt man doch die drückenden Kräfte ſelbſt, ja auch die materiellen Subjekte, denen dieſe Kräfte beywohnen, **Preſſungen** zu nennen;

nach der Bedeutung des Worts aber bezeichnet Druck die Wirkung.

Jede bewegende Kraft alſo, die ihre Wirkung beginnt, reizt und erregt ein Beſtreben zur Bewegung, das ſo lange dauert, als der Reiz anhält. Wird entweder jene anfängliche Wirkung verhindert, daß ſie auſer dem Beſtreben zur Bewegung nichts hervorbringt? oder wird das im Körper erzeugte Beſtreben ſogleich wieder vernichtet, daß es nicht in Bewegung übergehen kann, ſo beſteht die Wirkung der Kraft nur im Druck. Hingegen wird jene Wirkung bewegend, wenn aus dem Beſtreben zur Bewegung eine endliche Bewegung in dem gereizten Körper entſteht.

§. 6.

Begriff der Reizungen und der bewegenden Wirkungen.

Die Kräfte ſelbſt und ihre Wirkungen, ſowohl die Reizungen, als die bewegenden Wirkungen; ingleichen ihre Effekte, das Beſtreben zur Bewegung, und die Bewegung, ſind Größen oder haben Grade, und laſſen ſich durch arithmetiſche und geometriſche Größen vorſtellen. Die Wirkung der Schwere, die einem Körper Bewegung eindrückt, hat 1.) gleich Anfangs eine gewiſſe Intenſität, die ſich durch eine Linie, z. B. AB (Fig. 1. Taf. XV.) ausdrücken läßt. 2.) Hat ſie eine Dauer oder Länge. Denn die Kraft der Schwere muß dem Körper, dem ſie Geſchwindigkeit und Bewegung eindrückt, eine gewiſſe Zeit und Raum oder Höhe durch bewegen, damit eine Bewegung erzeugt wird. Daher trift man bey dergleichen bewegenden Wirkung auſer

der

Intenſität, auch die zweite **Abmeſſung** an, die wir durch die Linien AN, AC (Fig. 1.) andeuten können. Drücken daher die Parallellinien AE, NO, CD die Intenſitäten der bewegenden Kraft, und die Linien AN, AC die zugehörigen Längen der Wirkung aus, ſo wird der ganze Raum ANOB, oder ACDB die Größe der **ganzen bewegenden Wirkung** andeuten.

Dieſen beyden Abmeſſungen kann die **dritte** hinzugeſezt werden. Es läßt ſich nämlich die ganze bewegende Wirkung eines Körpers oder der in den Körper wirkenden Kraft, als die **Summe der Wirkungen** aller ſeiner **Theile**, oder als die Summe der Wirkungen auf alle Theile vorſtellen. So ſind bey der körperlichen Wirkung alle drey Abmeſſungen der Körper vorhanden. Zuweilen iſt es, wo nicht nöthig, wenigſtens nützlich, dieſe dritte Abmeſſung beſonders zu betrachten, um die Art und Weiſe der Wirkung deſto deutlicher einzuſehen. Gemeiniglich aber kann man ſie entweder, wie bey der Schwere, die der Maſſe der gereizten Körper allezeit proportional iſt, auſer Acht laſſen, oder zugleich mit unter der Intenſität begreifen.

Folgen wir dieſer Vorſtellungsart im allgemeinen, ſo laſſen ſich die **einzelnen Reizungen**, oder Elementarwirkungen, durch die Elementarräume ABFG, NOST, wenn FG der AB, und ST der NO unendlich nahe gezogen wird, oder vielmehr durch die geometriſchen Körper ſelbſt, wenn zugleich mit auf die dritte Abmeſſung geſehen wird, ausdrücken, die mit jenen Elementarflächen einerley Verhältnis haben. Demnach iſt die **Elementarwirkung** oder der **Reiz** dem **Element des Raums** proportional,

nal, das aus der Intenſität, in ihre unendlich kleine Länge multiplicirt, entſteht. Von dieſer unſerer analogiſchen Vorſtellungsart der Wirkungen und der ihnen verhältnismäßigen Effekte, ſie mag nun mit der wahren Natur der körperlichen Dinge genau übereinſtimmen, oder nicht; iſt es ausgemacht, daß ſie ſich bey Berechnung der Wirkungen mit gleichem Recht und Erfolg anbringen läßt, als wir überhaupt die Geometrie auf die phyſiſchen Körper anwenden, ſofern nur aus den Erſcheinungen bekannt iſt, daß ſich die Zeichen eben ſo unter ſich verhalten, wie die bezeichneten Dinge.

§. 7.
Tode und lebendige Kräfte.

Kraft, die nichts wirkt, iſt bloſes Vermögen zu wirken, dergleichen die **Trägheitskraft**, des ruhenden, von einer andern Kraft nicht gereizten Körpers iſt. §. 4. Wollte man auch ſagen, jene Kraft wirke alsdenn durch **Beybehaltung** ihres Zuſtandes; ſo bringt doch dieſe ihre Wirkung, wenn es eine iſt, weder Bewegung, noch Beſtreben zur Bewegung, weder in dem Körper, dem ſie beywohnt, oder in ſeinen Theilen, noch in einem andern, hervor. Die **bewegende Kraft** hingegen ſtellt man ſich ſchon vorher wenigſtens **innerhalb** dem Körper, bey dem ſie vorhanden, wirkſam vor, ehe ſie **auſer ſich** in einen andern **wirkt**. Daher dieſe, wie ſchon oben geſagt worden, niemals ein bloſes Vermögen zu wirken iſt. Ihre Wirkung aber, worauf hier geſehen wird, iſt diejenige, die ſie in einem **auſer ihr** liegenden Körper äuſert; und iſt die Rede vom Effekt derſelben, ſo verſteht man durchgängig ein Beſtreben

zur Bewegung oder eine Bewegung, ſa auſerhalb in dem von der Kraft ſelbſt verſchiedenen Körper hervorgebracht worden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil geſagt wird.

Bewirkt daher eine Kraft nichts auſer dem Beſtreben zur Bewegung; d. i. drückt ſie ſich nur, ſo wird ſie als tod betrachtet, und auch tode Kraft genennt. Wir nennen die Kräfte, die am Hebel mit einander im Gleichgewichte ſind, todte Kräfte, ob ſie gleich in der That in einander wirken und drücken. Lebendig iſt hingegen eine Kraft, wenn ſie Bewegung hervorbringt, d. i. wenn ihre Wirkung bewegend iſt. Dieſer Unterſchied aber fällt mit dem oben erklärten zuſammen, da wir die Wirkungen der Kräfte, die blos Preſſungen ſind, von den bewegenden trennten. Es iſt vielmehr ein Unterſchied der Wirkungen, als der Kräfte ſelbſt. Denn einerley Kraft kann als tode wirken, z. B. die Schwere in eine aufgehängte Kugel; die lebendig iſt, wenn die Kugel, unter andern Umſtänden von ihr gereizt, ſinkt. Nach einiger Meynung gründet ſich hierauf jener Unterſchied der lebendigen Kräfte von den toden. In der That kann man, wenn dieſe Verſchiedenheit der Wirkungen in Acht genommen wird, den übrigen Unterſchied der Kräfte ſelbſt ganz bey Seite ſetzen, und, was bey den lebendigen Kräften merkwürdiges vorkommt, eben ſo deutlich erklären und begreifen.

Doch hatten diejenigen Philoſophen, die die Kräfte der ſich bewegenden Körper unter dem Namen der lebendigen von andern unterſcheiden wollten, hierbey andere Begriffe. Nicht alle Kräfte, die bey den ſich bewegenden Körpern vorhanden ſind, rechnen ſie

zu den lebendigen; ſondern nur diejenigen, die von der Bewegung der Körper abhängen, und den Körpern nur, in ſofern ſie in **Bewegung** ſind, zukommen. Die Kräfte des Zuſammenhängens, der Anziehung, des Zurückſtoßens und dergleichen, wenn welche da ſind, die man auch bey der ruhenden Materie wahrnimmt, werden beyſeite geſezt. Der Grund aber, warum ſie jene Kräfte **lebendige** nannten, beruht darinnen, weil ſelbige, wenn ſie auch nicht auſer ſich in andere Körper wirken, doch in dem Körper ſelbſt, dem ſie beywohnen, wirken, indem ſie ſelbigen ſtets fortrücken, welche Bewegung als der Effekt jener Kräfte betrachtet wird. Sie beſitzen daher ein **lebendiges Vermögen**; ein **bloſes** Vermögen zwar in Rückſicht auf äuſere Wirkungen, dergleichen ſie keine hervorbringen, ſo lange ſie nicht auf andere Körper oder Kräfte ſtoßen, die ihren Zuſtand ſtören: ſie ſind aber **lebendige** ſowohl wirkende als lebendige Kräfte in dem Körper ſelbſt, dem ſie beywohnen. **Lebendige Kräfte** alſo in Rückſicht auf die Bewegung, worinn ſie ſich befinden, nicht auf jene, die ſie in andern hervorbringen können; **bloſe Kräfte** aber in Rückſicht der Bewegung, die ſie in andern erzeugen können. Andere tode Kräfte hingegen, wenn ſie nichts auſer ſich in andere Körper wirken, wirken entweder in den Subjekten ſelbſt, denen ſie beywohnen, ſchlechterdings nichts, wie die Trägheitskraft: oder wenn ſie wirken, ſo iſt die Wirkung nicht auf die Bewegung des ganzen Subjekts gerichtet, bey dem ſie vorhanden ſind. Die **bewegenden Kräfte**, z. B. die Federkraft, die Kraft des Zuſammenhängens, beſtreben ſich zwar in dem Körper ſelbſt die Lage der Theile zu ändern; ſie bringen

aber

aber in dem ganzen Körper weder Bewegung hervor, noch ſuchen ſie welche hervorzubringen. Das Gewicht der Körper iſt zwar eine Wirkung der Schwere, nach welcher die Maſſe zur Bewegung gereizt wird: ſie iſt aber äuſere Wirkung des einen ſchweren Körpers in den andern. Die anziehende Kraft eines Körpers, der von andern äuſern dergeſtalt abgeſondert iſt, daß er auf dieſe ſchlechterdings nichts wirkt, wohnt ihrem Subjekt auf ähnliche Art bey, wird ihm wenigſtens ſo beywohnend gedacht, wie die Federkraft; in dem ganzen einſamen Körper bringt ſie weder ein Beſtreben zur Veränderung des Orts, noch Veränderung des Orts ſelbſt zuwege. Und dieſer Unterſchied der lebendigen und toden Kräfte liegt nothwendig in ihnen ſelbſt. Denn die lebendige Kraft, oder das Bewegungsvermögen, ſo den bewegten Körpern beywohnt, und von der Bewegung abhängt, iſt ſogleich im Augenblick, da ſie ihr Subjekt von einem Ort zum andern zu bewegen aufhört, verſchwunden: und auf dieſer ihrer innern Wirkung beruht ihr ganzes Vermögen, auſer ſich zu wirken.

§. 8.

Verſchiedene andere Gattungen bewegender Kräfte.

Die bewegenden Kräfte ſind, ſo weit wir ſie kennen, noch aus andern Gründen von einander verſchieden. Es giebt 1.) Kräfte, die ihre Wirkung, ſie mögen reizen oder bewegen, ins unendliche, wenigſtens unbeſtimmt, fortſetzen können, und die nie verſiegende Quellen der bewegenden Wirkungen ſind. Dergleichen ſtellt man ſich unter der Schwere vor,

die in einem aufgehangenen Körper, den ſie reizt, niemals weder geſchwächt, noch vernichtet wird; und die nicht aufhört, ins unendliche in den Körper, den ſie bewegt, zu wirken, wo ſie nicht von andern Umſtänden gehindert wird. Dieſe Gattung von Kräften kann man, in Anſehung aller ihrer Wirkungen, **Kräfte von unbeſtimmter Größe** nennen.

2.) **Können andere zwar ihren Druck, nicht aber ihre bewegenden Wirkungen**, ohne Verminderung oder Schwächung **unbeſtimmt fortſetzen.** Das in einer Röhre, bis auf eine gewiſſe Höhe gehobene Waſſer drückt zwar im Verhältnis der Höhe und Grundfläche ins unendliche: wird aber ſeine Wirkung **bewegend**, ſo fällt das Waſſer, mit der Höhe nimmt auch das Vermögen, einen Körper über die wagerechte Linie zu erheben, ab; das ganz verſchwindet, wenn das Waſſer bis zu dieſer Linie gefallen iſt. Die Elaſticität der zuſammengedrückten Luft kann zwar durch Drücken ohne Verminderung ihrer Kraft unbeſtimmt wirken; fällt aber das Hindernis weg, ſo geſchieht eine Ausdehnung, und die Wirkung der Kraft wird bewegend: zugleich wird aber das Bewegungsvermögen geſchwächt, und verſchwindet endlich ganz. Dieſe Kräfte ſind zwar **unbeſtimmt in Anſehung der Größe ihrer Preſſungen, aber beſtimmt in Anſehung der bewegenden Wirkungen.**

Endlich findet man auch 3.) **Kräfte, die weder unbeſtimmt drücken, noch bewegen können**, deren Preſſungen nämlich eine Zeitlang fortgeſezt, eben ſo wie die bewegenden Wirkungen, durch die Wirkung geſchwächt werden, und endlich verſchwinden. Sie ſind **von beſtimmter Größe in Anſehung** aller ihrer

ihrer Wirkungen. Zu dieſer Klaſſe gehören die toden Kräfte der Thiere, ja auch in den meiſten Fällen die Kräfte der Elaſticität und des Zuſammenhängens. Ein lang geſpannter Bogen wird ſchlaff, indem er ſeine Kraft ganz oder zum Theil verliert. Wir können zwar ein Gewicht eine Zeitlang in der Hand halten, aber dieſe Handlung nicht ohne Aufhören fortſetzen.

Die lebendigen Kräfte der ſich bewegenden Körper gehören zur zweyten Klaſſe. Sie können ſeitwärts wirken, ſo daß ſie nur drücken, (Vergl. §. 26.) und wird dieſen Preſſungen genugſam widerſtanden, ſo können ſie ſelbige ohne Verminderung der Kräfte fortſetzen. Bewegen ſie aber andere Körper, ſo geht ein Theil ihres Bewegungsvermögens verlohren, deſſen ſie ganz beraubt werden können; und die ganze Wirkung, die ſie hervorbringen können, bis ſie gänzlich vernichtet ſind, iſt von beſtimmter Größe.

§. 277. Vorl. XV. behauptet der Verfaſſer mit andern, kein Druck, der nicht gleich im erſten Augenblick bewegt, könne Bewegung bewirken: dieſes läßt ſich nicht allgemein ſagen, wenn es ſolche drückende Kräfte giebt, deren Drückungsvermögen durch die Wirkung geſchwächt wird. Ich kann ein Gewicht eine Zeitlang mit der Hand unterſtützen; aber dieſe Handlung lange fortgeſezt, wird die dem Gewichte widerſtehende und drückende Kraft geſchwächt; der unveränderte Gegendruck des Gewichts wird größer, als jene, und es entſteht eine Bewegung in der Richtung der ſtärkern Kraft. Mit Recht zweifelt man aber, und iſt unwahrſcheinlich, daß es ſolche Kräfte gebe, die durch den bloſen Druck geſchwächt

werden; obgleich unzählige vorhanden ſind, die es ſcheinen. Laſſet uns hiervon folgendes beyfügen.

Kurz vorher hab' ich geſagt, daß die ſich bewegenden Körper wie tode Kräfte auch ſeitwärts wirken können, ſo daß ſie auſer Beſtreben zur Bewegung nichts hervorbringen, durch welche Wirkung jedoch, wenn das Hindernis, worauf ſie wirken, hinreichend widerſteht, und die Bewegung verhindert, die lebendige Kraft des Körpers im geringſten nicht geſchwächt wird. Die Größe dieſes Drucks beruht auf der Bewegung des Körpers; er nimmt ab, und hört mit der Bewegung und den lebendigen Kräften auf. Wird daher die Bewegung des Körpers vermindert, ſo iſt auch, wenn wenigſtens das übrige gleich iſt, das **Drückungsvermögen** geſchwächt; doch wird aber die Kraft nicht durch den bloſen Druck vermindert, die in dieſem Falle, wenn hinlänglich widerſtanden wird, die Größe der Kräfte nicht ändert. Hier haben wir alſo ein Beyſpiel von einer **toden bewegenden Kraft**, die **von der lebendigen Kraft** abhängt, und mit der lebendigen Kraft geſchwächt wird: ſo daß der fortgeſezte Druck jener zwar allerdings **geſchwächt werden kann; nicht durch die Wirkung des Drucks ſelbſt**, d. i. nicht blos durch Drücke, ſondern, weil die lebendigen Kräfte, von welchen der Druck entſteht, ſich verſchwächen. Der Quell, woraus die tode Kraft fließt, verſiegt.

In den übrigen Fällen, wo die toden Kräfte durch bloſen fortgeſezten Druck ſich verſchwächen, geſchieht dieſes daher, weil das, wovon die Intenſität der drückenden Kraft abhängt, während der Wirkung ſich ändert. Ueberall ſcheint aber die Intenſität von einer gewiſſen Lage der Theile des Körpers,

pers, dem die Kraft beywohnt, oder, wie im vorigem Fall, von einer Bewegung abzuhängen. So hängt z. B. die Feder- und Cohäſionskraft in den Körpern von der Lage und den Entfernungen der Theilchen ab, mit welchen das Wirkungsvermögen oder die Kraft ſelbſt ſich ändert. Da ſich aber während des Drucks weder die Lage, noch die Bewegung der Theile im Körper ändert, wo nicht eine Bewegung erzeugt oder vernichtet wird, ſo muß auch jene **Wirkung**, die **bloſer Druck** zu ſeyn ſchien, **wirklich bewegend**, wenn gleich **unmerklich** geweſen ſeyn. Wird der Bogen geſpannt, ſo wird die Feder von einem gewiſſen Gewichte gedrückt; ein ſchwerer Körper bleibt auf der Erde, worauf er allmählich ſinkt, liegen; die Wirkung dieſer Kräfte bringt zwar keine merkliche Bewegung, ſondern nur ein Beſtreben zur Bewegung hervor: aber die Sache genauer unterſucht, erhellt, daß dieſe Wirkung wirklich bewegend geweſen ſey, obgleich die erzeugte Bewegung nur erſt nach langer Zeit zu bemerken geweſen wäre. Hätte alſo in der Feder die Lage der Theile keine Veränderung erlitten, d. i. wäre während des Drucks keine Bewegung da geweſen; ſo hätte auch keine Verminderung der Kraft ſelbſt vorgehen können.

Ich ſage, es ſcheint wenigſtens in allen Fällen, **daß ſolche tode Kräfte, die ſich durch Drücken verſchwächen**, von einer gewiſſen Lage der Theile, oder von einer gewiſſen Bewegung abhängen. Ob es gleich daher nicht bewieſen werden kann, daß es ſich nothwendig in allen Fällen ſo verhält, ſo iſt doch die gröſte Wahrſcheinlichkeit vorhanden, **daß es überhaupt keine Kraft giebt, die ſich durch bloſen Druck verſchwächt: daß vielmehr jede Ver-**

minderung der bewegenden Kräfte ihren Grund in den bewegenden Wirkungen habe, wodurch ſie nicht nur drücken, ſondern auch in andern Bewegung hervorbringen.

§. 9.

Kalkul der Kräfte.

Soll die Größe der Kräfte beſtimmt werden, ſo kann man zuerſt auf die Größe der Wirkung, die ſie unter gegebenen Umſtänden hervorbringen können, ſehen; dieſe Wirkung ſey nun bewegend, oder Druck, die Größe dieſer Wirkung wird durch die Größe des Effekts beſtimmt, der ihr proportional iſt, §. 3. folglich durch die Größe der erzeugten Bewegung, wenn die Wirkung bewegend war, oder durch die Größe des Beſtrebens zur Bewegung, wenn die Wirkung der Kraft im Druck beſtand.

Iſt die Größe der Wirkung, die die Kraft unter gegebenen Umſtänden äuſert, beſtimmt, ſo haben wir zugleich die Größe der Kraft oder des Wirkungsvermögens unter eben den Umſtänden. Denn ſo viel ein Gewicht am Hebel in beſtimmter Entfernung vom Ruhepunkt drückt, ſo viel kann es auch unter gleichen Umſtänden drücken; d. i. ſein Vermögen iſt ſo groß als ſeine Wirkung, folglich ſo groß als ſein Effekt. Demnach wird durch die hervorgebrachte Wirkung die zu dieſer Wirkung angewandte Kraft gemeſſen. Die Drückungskraft durch den Druck; die Bewegungskraft durch die bewegende Wirkung.

Zweytens kann aber bey ſolchen Kräften, die von beſtimmter Größe ſind, und ſich durch Wirkung ver-

verſchwächen und zerſtören, nach der ganzen Wirkung gefragt werden, die ſie bis zu ihrer gänzlichen Aufzehrung hervorbringen können. Und dieſe ganze Wirkung iſt ſowohl dem vollen Effekt, d. i. allen den Effekten zuſammengenommen, die die Kraft bis zu ihrer Aufreibung hervorbringen kann, als auch der ganzen Kraft, oder dem ganzen Wirkungsvermögen ſelbſt, proportional. Wo von der Größe der lebendigen Kräfte die Rede iſt, fragt man gemeiniglich nach der Größe der ganzen Wirkung, die durch die eingepflanzte innere Kraft bis zu ihrer gänzlichen Vernichtung, zuwege gebracht werden kann. Was aber andere Kräfte anbetrift, die in die Klaſſe der toden gehören, und zugleich ſo beſchaffen ſind, daß ſie ſich durch ihre Wirkung verſchwächen und zerſtören, ſo kann allerdings auch nach der Größe der ganzen Wirkung, die ſie äuſern können, gefragt werden; z. B. bey einem geſpannten Bogen. Bey dieſen ſieht man aber doch gemeiniglich auf die Größe des Drucks, den ſie äuſern; wegen Mangel weiterer Kenntnis derſelben, oder wegen ihrer Aehnlichkeit mit andern drückenden Kräften von unbeſtimmter Größe. So vergleicht man z. B. den Druck der geſpannten Feder gemeiniglich mit dem Gewicht eines Körpers; und beyde Wirkungen ſind Preſſungen. Die Fälle aber, in welchen die Größe des ganzen Vermögens angegeben werden ſoll, ſind von andern wohl zu unterſcheiden, wo wir nichts als die Größe des Drucks ſuchen.

Bey ſolchen Kräften, die ins unendliche drücken und bewegen können, kann auch nicht nach der Größe der ganzen Wirkung, die ſie äuſern können, oder nach ihrer ganzen Kraft überhaupt gefragt werden;

z. B. bey der Schwere. Denn ſie können ohne Aufhören und unbeſtimmt wirken. Hier fragt man insgemein nur nach der Größe des **Drucks**. Sollen aber ihre **bewegenden Wirkungen**, die ſie auf ihre Effekte verwendet haben, beſtimmt werden, ſo ſieht man entweder überhaupt nur auf die Größe der **Effekte**; oder man vergleicht die **in gleicher Zeit** oder **gleichen Raum** geäuſerten **Wirkungen** mit einander.

Bey jeder **Wirkung** aber kömmt ſowohl **Intenſität der Wirkung**, als auch **Länge derſelben** vor. §. 6. Jene werde überhaupt durch P, **dieſe** durch x angedeutet, ſo wird ſich die **Wirkung**, wenn ſie gleichförmig iſt, verhalten wie Px, oder S. Pdx, d. i. wie die Summe der kleinen Wirkungen Pdx. In der 1. Fig. Taf. XV. drücken die Linien AB, NO, CD, und die mit ihnen parallelen die Preſſungen P, die Linien AN, AC aber die Längen x aus. Iſt die Wirkung nur ein **Druck**, ſo muß ſie durch Pdx im Anfang angedeutet werden. P bedeutet nämlich AB, d. i. die **Intenſität der Wirkung** im Anfang. Ueberhaupt aber drückt Pdx einen **Reiz** aus. §. 6.

Dieſe **Intenſität** betrachtet man gemeiniglich als die Größe des **Vermögens**, oder der **Kraft** ſelber; da hingegen die **Länge der Wirkung**, d. i. die Größe der Zeit oder des Raums, wodurch die bewegende Kraft die Wirkung fortſetzen kann, entweder auſer Acht gelaſſen, oder als von äuſern Umſtänden abhängend gedacht wird, die zwar die **Wirkung**, nicht aber die **Kraft** ſelbſt, vermehren oder vermindern können.

Bey der **Intenſität P kommt** ebenfalls eine **doppelte Abmeſſung vor**, wenn die Wirkung in

eine

eine Maſſe von endlicher Größe geſchieht. Denn die ganze Intenſität der Wirkung iſt gleich der Intenſität, womit ſich die einzelnen Theile bewegen, oder wirken, multiplicirt in die Summe der Theile. Es ſey die Maſſe M; die Intenſität der einzelnen Theile I, ſo iſt $P = MI$, und $I = \frac{P}{M}$. Dieſe Intenſität I (beſchleunigende Kraft, Vorl. 1. §. 16. 1.) wird von einigen unter dem Namen: Kraft, verſtanden.

Sollen die Größen der Kräfte von unbeſtimmter Größe aus ihren Wirkungen beſtimmt werden; ſo nimmt man Wirkungen von gleicher Länge oder Dauer, und ſucht alsdenn das Verhältnis der Intenſitäten, das in ſolchen Fällen ſich für die Kräfte ſelbſt annehmen läßt. Z. B. wenn man die Schwere auf unſerer Erde mit der Schwere in der Entfernung des Monds vergleicht.

Die lebendigen Kräfte aber, oder die Bewegungsvermögen, die den ſich bewegenden Körpern beywohnen, lehren uns, daß dieſe Intenſität nicht alles das ſey, was bey den Kräften meßbar iſt. Denn wir finden, daß mit einer größern Intenſität auch ein größer Vermögen, die Wirkung fortzuſetzen, verbunden iſt, worauf wir zwar nicht ſehen, oder bey andern Kräften nicht ſehen können; das aber deswegen doch nicht aufhört, etwas wirkliches zu ſeyn, das bey den Kräften wirklich vorhanden iſt.

§. 10.
Verknüpfung und Zuſammenſetzung der Kräfte.

Wenn Kräfte und Wirkungen gemeſſen werden, ſo denkt man ſich, eine von ihnen für die Einheit angenommen, gemeiniglich jede beſonders in ihre Hinderniſſe oder Trägheiten unter gleichen Umſtänden wirkend; ſo daß bey Vergleichung derſelben, jede abſolut und einzeln betrachtet wird. Sie können aber auch in der **Verknüpfung** betrachtet werden. Denn wo mehrere Kräfte in einem Syſtem mit einander verknüpft werden, **kann die eine die Wirkung der andern durch ihre eigne gleichzeitige Wirkung beſtimmen.** Die Intenſitäten können einander entgegengeſezt ſeyn, oder nicht. Die **Länge** der einen Wirkung kann durch die andere vermehrt und vermindert werden. Dergleichen verknüpfte Kräfte haben wir beym Gleichgewicht der Kräfte am Hebel, beym **Stoß** der Körper, bey Verbindung mehrerer Kräfte, um Bewegung in einem und demſelben Körper auf einmal hervorzubringen, und überhaupt in jedem Syſtem von Kräften.

Man kann zwar annehmen, daß ſich die Intenſitäten der Kräfte ſelbſt, jede abſolut und einzeln betrachtet, bey dergleichen Verknüpfung nicht ändern, wenn ſie nämlich insgeſammt zu derjenigen Klaſſe von Kräften gehören, die ohne Verminderung ins unendliche drücken können; doch können die verknüpften Kräfte in ihren Wirkungen einander ſowohl hindern, als unterſtützen, ſo daß die gleichzeitigen Wirkungen gleich werden, wo die Intenſitäten der Kräfte, jede einzeln genommen, nicht gleich geweſen wären.

Ein Gewicht von 1 lb. widerſteht einem Gewicht von 100 lb. am Hebel, in gehöriger Entfernung vom Ruhepunkte, hinreichend, und äuſert daher gleiche Wirkung; dies rührt entweder daher, weil die Intenſität deſſelben in dieſer Verknüpfung erhöhet wird, welches nicht iſt, oder weil die Länge der Wirkung vermehrt wird.

In den Fällen aber, wenn das Maas der Wirkungen geſucht wird, die hier gemeiniglich unter dem Namen: Kräfte, verſtanden werden, iſt es gewiß, daß ſelbiges nicht blos aus den Intenſitäten der Kräfte, jede abſolut betrachtet, genommen, ſondern zugleich die Längen der Wirkungen beſtimmt werden müſſen.

§. 11.

Gleichgewicht der Gegenwirkung mit der Wirkung.

Nachdem wir nun die Natur der Kräfte und Wirkungen im allgemeinen aus einander geſezt haben, ſo laßt uns ſehen, was bey den Erſcheinungen vorkommt, und auf was Art und Weiſe die Veränderungen in der Körperwelt, in der Lage und der Bewegung der Körper erklärt, und der Grund davon aus den Wirkungen der Kräfte angegeben werden kann. So oft aber ein mit einer bewegenden Kraft verſehener Körper in einen andern wirkt, ſo iſt mit dieſer Wirkung die Gegenwirkung des leidenden Körpers verbunden, die der Wirkung entgegengeſezt und gleich iſt. Dieſes will der Grundſatz ſagen: die Gegenwirkung iſt der Wirkung gleich.

Was heißt aber in dieſem Grundſatz Wirkung? was Gegenwirkung? Nicht alle ſtimmen in der Erklärung dieſes Grundſatzes überein. Was iſt die Urſache der Wirkung und Gegenwirkung? was muß man für den Effekt ſowohl dieſer als jener halten? Laſſet uns die Erſcheinungen betrachten:

Zuerſt wollen wir zwey Körper A und B nehmen, (Fig. 2. Taf. XV.) wovon der eine mit einer anziehenden, der andere mit einer zurückſtoßenden Kraft verſehen iſt; z. B. ziehe der Körper A wie ein Magnet das Eiſen B an; oder B werde von A wie Fig. 3. zurückgeſtoßen, wo man in dem Körper A eine Federkraft annehmen kann, mit welcher er dem Körper B genähert, ſelbigen aus ſeiner Stelle zu ſtoßen ſucht. Oder endlich denke man ſich unter A uud B zwey auf dem Waſſer freyliegende Kähne, und in dem einen einen Menſchen, der den andern, entweder nahen, von ſich wegſtößt, oder entfernten, mittelſt eines Seils, an ſich zieht. **Die Körper ſeyn aber vor der Wirkung der Kräfte in Ruhe.**

Da beyde Körper, ſowohl A als B, ſich nach entgegengeſezten Seiten frey bewegen können; ſo entſteht auch eine Bewegung aus der Wirkung der fortgeſezten drückenden Kraft, und zwar in beyden Körpern nach entgegengeſezten Richtungen. Dieſe Bewegung iſt aber ſo beſchaffen, daß, wenn A und B die Maſſen der Körper, und a, b ihre, während der Wirkung, erlangten Geſchwindigkeiten ausdrücken, nach der Wirkung allezeit $Aa = Bb$, d. i. **Wenn die Größe der Bewegung durch das Produkt aus der Maſſe des Körpers in ſeine Geſchwindigkeit ausgedrückt wird, ſo ſind die Größſen der Bewegung auf beyden entgegengeſezten Seiten gleich.** Gleiches

Gleiches erfolgt auch in beyden Körpern, man mag ſich die wirkende Kraft im Körper A oder im Körper B, entweder durch beyde vertheilt, oder von der Maſſe des Zwiſchenkörpers, wie einer Feder oder Seils, getrennt, denken. Der Effekt iſt allemal einerley; es entſteht in beyden eine Bewegung nach entgegengeſezten Seiten, und die Größen der Bewegung nach den entgegengeſezten Seiten ſind gleich.

Zweytens wollen wir annehmen, es ſey auf der einen Seite, z. B. bey dem Körper B (Fig. 3.) ein unbeweglicher Widerſtand vorhanden. Es ſey z. B. ACB eine geſpannte Feder zwiſchen dem unbeweglichen Widerſtand ab, und dem freyliegenden ruhenden Körper A. Man laſſe die Feder los, ſo bringt ihre ganze bewegende Kraft eine Bewegung nach der vom Widerſtand weggekehrten Seite; nämlich nach dem Körper A zu, in der Richtung AC, hervor, und nach geendigter Wirkung bleibt keine Bewegung oder Effekt von der bewegenden Wirkung der Feder in dem unbeweglichen Widerſtand B übrig.

Ein gleiches geſchieht, wenn anſtatt der Kraft eine andere angenommen wird, die den Körper A gegen den unbeweglichen Widerſtand B zieht. Die ziehende oder zurückſtoßende Kraft mag ſich bey dem Körper A, oder bey dem Widerſtande B befinden, ſo wird einerley in beyden Körpern erfolgen. Der Effekt iſt nämlich einerley, man mag ſich den einen von dieſen Körpern, welchen man will, als den wirkenden, und den andern, als den leidenden blos trägen Körper gedenken.

Ferner haben wir drittens durch Verſuche folgendes entdeckt: Wenn in dem Körper A (Fig. 2.) eine

eine Kraft vorhanden, die ſich durch Wirkung zerſtört, oder die nur eine beſtimmte bewegende Wirkung beſizt; z. B. eine Feder von gegebener Schnellkraft, die, indem ſie nachgelaſſen wird, ihre zurückſtoßende Kraft zugleich verliert; und eine ſolche Kraft wirkt, 1.) wo die Körper A und B gleich ſind; 2.) wo A ſo groß, wie vorhin, B aber größer, und 3.) wo A eben ſo groß, B aber ein unbeweglicher Widerſtand iſt. So wird in dieſen verſchiedenen Fällen die Größe der Bewegung, die aus der Loslaſſung der Feder im Körper A erzeugt wird, allein genommen, kleiner ſeyn im erſten Falle, größer im zweyten, am größten im dritten. Nimmt man umgekehrt B allemal gleichgros; und A bald größer, bald kleiner; ſo iſt die Größe der in dem Körper B von einerley wirkenden Kraft erzeugten Bewegung für ſich betrachtet, größer in dem Fall, wo A eine größere Maſſe; kleiner, wo A eine kleinere Maſſe beſizt.

Wird endlich viertens die Summe der auf beyden entgegengeſezten Seiten zugleich von einerley Kraft gereizten Maſſen A+B, beſtändig gleich und unveränderlich genommen; ſo wird die Größe der von der Kraft auf beyden Seiten erzeugten Bewegung größer, wenn das Produkt aus A in B größer iſt. Es iſt aber das Produkt aus der Maſſe A in die Maſſe B am größten, wenn A = B; und wird kleiner, wenn A und B ungleich groß angenommen werden. Dieſes zu beweiſen, braucht es keiner mit beſonderer Sorgfalt angeſtellten Verſuche. Wenn wir richtige Maſchinen anwenden, und in jedem Falle die Größe der auf beyden Seiten durch die Wirkung einer Feder hervorgebrachten Bewegung berechnen, ſo finden wir die Größe der von einerley

einerley Kraft erzeugten Bewegung in der Verhältnis der Quadratwurzeln des Produkts A. B, oder wenigſtens ſehr nahe, wenn durchgehends die Summe der Maſſen A + B gleichgros angenommen wird.

§. 12.

Fortſetzung von der Wirkung und Gegenwirkung.

Aus dieſen Verſuchen erhellt

1.) daß die Größe der von einer Kraft in den Trägheiten A und B nach entgegengeſezten Seiten erregten Bewegung in beyden gegenſeitigen Richtungen gleich ſey.

Wird alſo dieſe Größe bey dem einen Wirkung, bey dem andern Gegenwirkung genannt, ſo iſt die Wirkung der Gegenwirkung gleich.

2.) Sieht man die Größe der in dem einen Körper A erzeugten Bewegung als den Effekt an, den die bewegende Kraft in A bewirkt, ſo wird das doppelte deſſelben den ganzen Effekt dieſer Kraft ausdrücken; da die in dem andern Körper B nach der entgegengeſezten Seite hervorgebrachte Bewegung jener gleich iſt. Daher kann man ſich die Wirkung der bewegenden Kraft ſo vorſtellen, daß die Kraft entweder in A oder in B vor der Wirkung vorhanden, ſich gleichſam in zwey gleiche Theile theilt, und nach entgegengeſezten Richtungen zugleich in die Maſſe A und und in die Maſſe B gleichförmig wirkt.

Mit dieſer Vorſtellungsart ſind aber die Verſuche ſehr mislautend. Denn man nehme zwiſchen den Körpern A und B (Fig. 2.) einerley Federkraft an und

und ſetze, die Hälfte ihrer Wirkung werde in jedem Falle auf den Körper A verwendet; wie und aus was für Urſach geſchieht es, daß aus dieſer nämlichen Wirkung in einigen Fällen ein kleinerer, in andern ein größerer; in einigen ein unendlich kleiner Effekt gegen den, in andern erzeugten, herauskommt? z. B. wenn A und B beſtändig einerley Summe iſt, und die Maſſe A wird unendlich kleiner genommen, als die Maſſe des Körpers B; ſo iſt die Größe der in A erzeugten Bewegung, und die andere gleichgroße in B, für unendlich klein, für nichts zu achten, wenn ſie mit dem Effekt verglichen wird, welcher entſteht, wenn A mit B gleichgros iſt.

Laſſet uns als Hypotheſe annehmen, daß die in den Körpern A und B von einerley Kraft erzeugten Effekte, und die ihnen proportionalen Wirkungen dieſer Kraft, ſich verhalten wie die Produkte aus den Maſſen der Körper in die Quadrate der erzeugten Geſchwindigkeiten; und folglich wenn a, b die Geſchwindigkeiten in A und B; die ganze Wirkung der Kraft und die erzeugten Effekte ſich verhalten wie $Aa^2 + Bb^2$. Dieſes vorausgeſezt ſtimmt alles unter ſich, und mit den Verſuchen aufs beſte überein.

a) Stellt man genaue Verſuche an: z. B. mit einerley Feder auf einerley Art geſpannt zwiſchen zwey Körpern, ſo findet man, in allen Fällen die Summe $Aa^2 + Bb^2$ gleichgros; obgleich die Summe der Produkte $Aa + Bb$ ſehr abändert, nachdem das Verhältnis der Maſſen A und B unter ſich verſchiedentlich angenommen wird.

b) Findet man überall die Gleichheit der Produkte Aa und Bb auf den entgegengeſezten Seiten,

ten, und folglich die Gleichheit der Intenſität in der Wirkung und Gegenwirkung in die entgegengeſezten Seiten, wenn die Intenſitäten in gleicher Zeit ſich verhalten wie Aa und Bb; denn die Zeit der Wirkung und Gegenwirkung iſt einerley. Dieſe Gleichheit aber der bewegenden Wirkung und der Gegenwirkung nach der entgegengeſezten Seite findet nicht ſtatt, wenn man die Wirkungen in der Verhältnis der Effekte nimmt. Denn die ganze Wirkung des einen Körpers A in den andern B, und ihr Effekt in den leidenden B, verhält ſich wie die Intenſität der Wirkung, multiplicirt in den Raum, wodurch der Körper B in gleicher Zeit weicht, welcher Raum der Länge der Wirkung proportional iſt. Denn Aaa und Bbb, d. i. die Effekte in A und B ſtehen in zuſammengeſezter Verhältnis aus den Intenſitäten der Wirkungen in gleicher Zeit, und den Geſchwindigkeiten, die die Körper erhalten, und mit welchen ſie den Intenſitäten weichen; und dieſe Geſchwindigkeiten a, b in gleicher Zeit der Wirkung und Gegenwirkung verhalten ſich wie die durchlaufenen Räume.

c) Daher ſtehen auch die bey der gegenſeitigen Wirkung in beyden Körpern erzeugten Effekte in zuſammengeſezter Verhältnis aus dem geraden Verhältnis der in den Körpern gleichen Intenſitäten; und aus dem verkehrten Verhältnis der Trägheiten oder Maſſen. Denn die Effekte $Aa^2 : Bb^2$ verhalten ſich wie $Aa. a : Bb. b$; weil aber $Aa = Bb$, ſo iſt $a : b = B : A$, folglich $Aa^2 : Bb^2$ in zuſammengeſezter Verhältnis aus $Aa : Bb$, und dem verkehrten Verhältnis der Maſſen $B : A$. Weil aber die Intenſitäten Aa und Bb gleich ſind; ſo verhal-

ten

ten ſich die Effekte umgekehrt wie die Maſſen.

d) Hieraus ſieht man deutlich, warum aus einerley Kraft eine größere und kleinere Größe der Bewegung entſpringen kann. Denn es kann $Aa^2 + Bb^2$ beſtändig gleichgros, und $Aa = Bb$ ſeyn, obgleich ſowohl Aa als Bb, folglich auch $Aa + Bb$ die kleinſte Größe iſt. Iſt der ganze Effekt $Aaa + Bbb =$ einer beſtändigen Größe C; und $Aa = Bb$; ſo wird ſeyn $Aa^2 = \frac{1}{2}C$ in dem Falle, wo $A = B$, und $a = b$. Iſt aber B größer als A: ſo wird die Geſchwindigkeit b kleiner ſeyn, als die Geſchwindigkeit a; und Bbb kleiner als $\frac{1}{2}C$. Daher $\frac{C - Bbb}{A} = a^2$ größer als $\frac{\frac{1}{2}C}{A}$. Folglich auch a größer in dieſem Fall, als in jenem, wo $A = B$, und daher $Aa = Bb$, und $2Aa = 2Bb$, oder die Größe der Bewegung in A, alſo auch in B, iſt größer, wenn bey einerley Maſſe A, die Maſſe B größer angenommen wird, wie die Verſuche §. 12. 13. lehren. Nimmt man in mehrern Verſuchen einerley Summe der Maſſen an, wie §. 11. 4. ſo wird, wenn einerley wirkende Kraft von beſtimmter Größe vorhanden iſt, in jedem Fall ſeyn $Aa = Bb = \sqrt{\left(\frac{A.B(Aa^2 + Bb^2)}{B + A}\right)}$.

Denn $Aa^2 + Bb^2 : Aa^2 = B + A : B$; $Aa^2 + Bb^2$ iſt

iſt beſtändig und ſey = Q; ſo wird ſeyn $\frac{B.Q}{B+A} =$

Aa^2, und $a = \surd\left(\frac{Q.B}{A(B+A)}\right)$, folglich $Aa = Bb$

$= \surd\left(\frac{Q.A.B}{B+A}\right)$. $B+A$ iſt beſtändig einerley, daher verhält ſich Aa wie $\surd AB$, aber das Produkt aus A in B iſt deſto kleiner, je größer das Verhältnis der einen Maſſe zur andern angenommen, oder, je ungleicher die ganze Summe $A + B$ in zwey Theile getheilt wird.

Ich habe geſagt, die Erſcheinungen laſſen ſich ſo mit einander vereinigen, wenn wir annehmen, daß ſich die Größen der **bewegenden Wirkungen** und der **Effekte** aus dem **Quadrate** der erzeugten Geſchwindigkeit in die Maſſen der Körper multiplicirt ſchätzen laſſen. Hier behaupte ich aber nur, daß dieſe Hypotheſe wahr ſeyn **könne**, und wenn ſie angewandt wird, die Erſcheinungen ſich daraus auflöſen. Man kann alſo nicht ſtatt eines Grundſatzes annehmen, daß **bey der gegenſeitigen Wirkung der Effekt der wirkenden Kraft auf beyden entgegengeſezten Seiten gleich** ſeyn müſſe. So weit läßt ſich der Grundſatz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, ohne den Verſuchen Gewalt anzuthun, nicht ausdehnen. **Die Gegenwirkung iſt der Wirkung gleich**, was die Intenſität, die Dauer und die Größe der nach der gemeinen Art geſchäzten **Bewegung** betrift; nämlich

lich durch das Produkt aus der Geſchwindigkeit in die Maſſe, welches durchgehends der Intenſität der Kraft, in die Zeit multiplicirt, proportional iſt. Aber die bewegende Wirkung und der Effekt der Kraft ſind nicht gleich auf den entgegengeſezten Seiten.

§. 13.

Erſcheinungen, in welchen beyde Körper auf beyden Seiten der bewegenden Kraft weichen können.

Unzählich ſind die Erſcheinungen, die zu der Gattung gehören, wo freyliegende Körper von einer Kraft, die dem einen der aufeinander wirkenden Körper beywohnt, gereizt werden, und eine Bewegung nach beyden entgegengeſezten Seiten entſteht. Alle Anziehungen ſind gegenſeitig. Der Magnet zieht das Eiſen; aber das Eiſen zieht auch durch Zurückwirken den Magneten. Der Kahn ſtößt und zieht das Schiff; das Schiff ſtößt und zieht den Kahn. Es entſteht auf beyden entgegengeſezten Seiten eine Bewegung; und das Produkt aus der Geſchwindigkeit in die Maſſe iſt in beyden Körpern gleich. Iſt aber dieſe Größe der Bewegung in allen Fällen, wo einerley Kraft wirkt, auf beyden Seiten von gleicher Größe zu erwarten? So ſcheinen ſich nach meinem Urtheil einige, durch einen irrigen Sinn des allgemeinen Grundſatzes von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, den doch weder Verſuche noch Vernunftſchlüſſe zulaſſen, verleitet, die Sache vorgeſtellt zu haben. Daher pflegen auch einige Erſcheinungen aus dieſem Grundſatze erklärt zu werden, in welchem ich doch, wenn der wahre Sinn deſſelben richtig beſtimmt

ſtimmt wird, den zureichenden Grund von jenen nicht finde. Die Stücke, woraus, vermittelſt angezündeten Schiespulvers, Kugeln geſchoſſen werden, laufen zurück. Die Dampfkugel auf einen leichtbeweglichen Wagen gelegt, bewegt ſich, wenn die Dämpfe auf der einen Seite mit großer Gewalt herausdringen, nach der entgegengeſezten Seite.

Die Bomben ſteigen in der Luft in die Höhe, indem die entzündete Materie zu unterſt herausdringt, u. d. m.

Die Bewegung der Stücke, der Dampfkugel und der Bomben ſoll von der Gegenwirkung hervorgebracht werden. Denn indem in der entgegengeſezten Richtung, nach welcher die Kugeln, das Schiespulver, d. i. Dämpfe, ausgeſtoßen werden, eine Bewegung entſteht; ſo müßte durch die Gegenwirkung auch eine gleiche Bewegung nach der andern Seite entſtehen. Dieſes iſt zwar im allgemeinen wahr, und in den Fällen, wo die Maſſe der nach einer Seite ſich fortbewegenden Körper hinreichend groß iſt, wie bey den aus großen Stücken geworfenen Kugeln, hat die auf dieſer Seite entſtehende Bewegung eine merkliche Größe, folglich läßt ſich auch auf der andern Seite eine der erſten gleiche Bewegung der Stücke wahrnehmen. In allen Fällen aber, wo weiter nichts als eine Maſſe von Dünſten oder angezündet Schiespulver bewegt wird: kann die Größe der erzeugten Bewegung ſehr klein ſeyn, obgleich die Geſchwindigkeit der Maſſen ſehr groß iſt. Wird ſich daher auch in dieſen Fällen die in der entgegengeſezten Richtung entſtandene Bewegung: z. B. bey der ſteigenden Bombe und der zurückgehenden Dampfkugel, aus der bloſen Gegenwirkung der von der andern Seite

ausbrechenden Dämpfe erklären laſſen? Daran zweifle ich ſehr, wenn nicht auſer den ausbrechenden Dämpfen ſelbſt der dem Ausgang entgegen ſtrebende Widerſtand der äuſern Luft mit zu Hülfe genommen wird. Daß auch im luftleerem Raume die Bombe ſteigen, und die Dampfkugel ſich zurückbewegen werde, glaube ich nicht. Denn die Wirkung der wirkenden Kraft, der Federkraft nämlich, womit die Dämpfe aus der Dampfkugel hervorſtreben, und das entzündete Schiespulver in den Bomben, wird nicht ganz auf die Seite verwendet, nach welcher die Dämpfe ausgeſtoßen werden; ſo daß die Wirkung und der Effekt auf der andern Seite nicht groß ſeyn kann. Z. B. verhalte ſich die Maſſe der aus der Dampfkugel fahrenden Dämpfe zu der nach der andern Seite fortzubewegenden Maſſe der Dampfkugel wie 1 : 10000. Die Geſchwindigkeit der Dämpfe ſey = 100; ſo wird ſeyn Ma, oder die Größe der Bewegung auf dieſer Seite $= \frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$. Dieſer iſt die Größe der Bewegung in der Dampfkugel B nach der entgegengeſezten Seite gleich. Es iſt aber B = 1, daher ſeine Geſchwindigkeit $b = \frac{1}{100}$, die ſich zur Geſchwindigkeit der Dämpfe verhält wie 1 : 10000. Der auf die Bewegung der Dämpfe verwendete Effekt der Kraft wird ſeyn Ma^2

$$= \frac{1 . 100^2}{10000} = 1;$$

der Effekt bey der Bewegung des Körpers B verhält ſich wie $Bb^2 = 1 . (\frac{1}{100})^2 = \frac{1}{10000}$. Wird das Verhältnis der Maſſe M zu B noch kleiner angenommen, z. B. wie $1 : 1000^2$; ſo iſt bey gleicher bewegenden Kraft und gleicher Summe der

Maſſen

Maſſen die Größe der Bewegung in M kleiner als $\frac{2}{1000}$, da ſie im erſten Falle $\frac{1}{100}$ war; obgleich die Geſchwindigkeit, die M erlangt, und in jenem Falle 100 war, in dieſem beynahe 1000 iſt.

Hieraus ſieht man auch, was von den Erfindungen zu erwarten iſt, die einige ausgedacht haben, um in Maſchinen und Schiffen eine Bewegung nach der einen Seite, mittelſt nach der entgegengeſezten Seite hinflieſenden Waſſers hervorzubringen. Ich läugne nicht, daß auf dieſe Art durch die bloſe Gegenwirkung einiger Effekt entſtehen muß; aber vergebens wird man eine ſolche Größe der Bewegung erwarten, als man aus der Größe der bewegenden Kraft zu ſchlieſen pflegt. Denn es kann die drückende Kraft, womit das flieſende Waſſer reizt, ſehr groß, und doch zugleich die Größe der daher entſtehenden Bewegung lange nicht hinreichend ſeyn, um die Abſicht auf der entgegengeſezten Seite zu erhalten.

§. 14.

Unveränderter Mittelpunkt der gegenſeitig in einander wirkenden Körper.

Da durch die **Wirkung** und **Gegenwirkung** die Größe der auf beyden entgegengeſezten Seiten erzeugten Bewegung gleich iſt; ſo kann der gemeinſchaftliche **Mittelpunkt** zweyer gegenſeitig in einander wirkenden **Körper** durch dieſe gegenſeitige **Wirkung** nicht verändert werden. **War derſelbe vor der Wirkung in Bewegung, ſo muß er auch nach derſelben darinnen beharren; ruhte er vor der Wirkung, ſo muß er auch nach derſelben ruhen.**

Die Größe der Bewegung nach einerley Seite iſt in beyden Körpern zugleich durch die gegenſeitige Wirkung weder vermehrt noch vermindert worden. Denn die Summe der Bewegungen, oder der Produkte aus den Geſchwindigkeiten der Körper in die Maſſen, die durch die Wirkung und Gegenwirkung erzeugt worden, iſt Aa — Bb = o; wenn man nämlich die nach einerley Seite **übereinſtimmenden** Bewegungen **addirt**; die nach gegenſeitigen Richtungen aber von einander abzieht. Alſo muß die nämliche Größe der Bewegung, die vor der Bewegung in den Körpern nach einer Seite vorhanden war, auch am Ende dieſer Wirkung übrig bleiben; wenn nämlich die in einander wirkenden Körper ſich frey bewegen können, und nicht von andern Kräften auf andere Art gereizt werden. **Der Mittelpunkt der Bewegung** zweyer Körper A und B heißt der zwiſchen ihren Maſſen dergeſtalt liegende Punkt, daß, wenn die Entfernungen der Maſſen von dieſem Punkte durch m und n angedeutet werden, Am = Bn. Es ſeyn daher die Körper in den Stellen A und B (Fig. 7. n. 1. Taf. XV.) vor der gegenſeitigen Wirkung in Ruhe; man nehme den Punkt F ſo, daß FB : FA = A : B; oder FA = m und FB = n. Und dieſer Mittelpunkt der Bewegung F ruhe vor der Wirkung des einen in den andern.

Nach hierauf geendigter gegenſeitigen Wirkung bewegen ſich beyde Körper A und B, entweder gegen F, A in der Richtung AF; B in BF, ſo der erſtern AF entgegengeſezt iſt; oder ſie entfernen ſich beyde vom Mittelpunkt F; A in der Richtung AD; B in der Richtung BC, und zwar ſo, daß ſich ihre Geſchwindigkeiten umgekehrt verhalten wie die Maſſen,

oder daß Aa = Bb, wenn durch a und b die Geſchwindigkeiten ausgedrückt werden. Da ſich aber die Geſchwindigkeiten, womit ſich beyde entweder dem Mittelpunkt nähern, oder davon entfernen, ſich verhalten wie die Räume in gleichen Momenten; ſo erhellt, daß während der gegenſeitigen Wirkung beyder Entfernungen vom Punkte F um Theile entweder vermindert oder vermehrt werden, die ſich, wie die Entfernungen vor der Wirkung ſelbſt, umgekehrt verhalten wie die Maſſen; daher ſich auch die übrigbleibenden Entfernungen nach der Wirkung eben ſo verhalten werden. Daher wird ſich auch der Punkt F, von welchem aus die Entfernungen in dieſer Verhältnis genommen werden, nach der Wirkung in eben der Stelle befinden, wo er vor derſelben war. Seine Lage iſt alſo durch die Wirkung und Gegenwirkung nicht verändert worden.

Wenn ferner beyde Körper, oder der eine vor der gegenſeitigen Wirkung in Bewegung ſind, dann ihre Entfernung im Mittelpunkt F in der verkehrten Verhältnis der Maſſen getheilt wird, und ihre Bewegung ſo beſchaffen iſt, daß dieſer Mittelpunkt durch eine gerade oder krumme Linie, es ſey auf was Art es wolle, ſich zugleich mit fortbewegt; ſo wird, die Wirkungen anderer Kräfte bey Seite geſezt, dieſe Bewegung des Mittelpunkts auf keine Art geſtört, noch durch die gegenſeitige Wirkung und Gegenwirkung verändert; er ſezt ſeine Bewegung gleichförmig in gerader Linie fort. **Denn die Bewegung des Mittelpunkts beruht auf der Summe der Bewegungen nach einerley Seite, und der Summe der Maſſen.** Der Körper A bewege ſich in der Richtung AF, mit der Geſchwindigkeit a; ſo rückt

die Maſſe A gegen B, in einer gewiſſen Zeit durch einen Raum, der ihrer Geſchwindigkeit proportional iſt. Durch dieſe Bewegung wird auch, wenn B unterdeſſen ruht, die Weite der Mittelpunkte in A und B vermindert.

Aa, und der Punkt F, ſo der **Mittelpunkt der Bewegung** war, muß auch in einen andern Punkt f gerückt ſeyn. Aber der Punkt F war in der Verhältnis A zu B genommen worden, ſo daß $FA : FB = B : A$, folglich $AF + FB : FB = B + A : A$, d. i. die Weite $AB : FB = B + A : A$; ferner iſt der Punkt F in den Punkt f, ſo wie der Körper A in den Punkt a gerückt; und es iſt wiederum $aB : fB = A + B : A$; daher $AB : FB = aB : fB$. Folglich $AB - aB : FB - fB = AB : FB = A + B : A$, d. i. der Raum, wodurch A bewegt worden, verhält ſich zum Raum, wodurch zu gleicher Zeit der Mittelpunkt der Bewegung fortgerückt iſt, wie die Summe der Maſſen zur Maſſe A; folglich verhält ſich auch die Geſchwindigkeit a des Körpers A zur Geſchwindigkeit des Mittelpunkts x, wie $A + B : A$, daher $x(A + B) = Aa$. So erhält man das Fortrücken des Mitttelpunkts nach der Seite AB aus der Bewegung des Körpers A nach eben dieſer Seite. Bewegt ſich auch der Körper B nach dieſer Seite, ſo findet man auf eben die Art den Raum, wodurch der Mittelpunkt fortgerückt iſt, oder die Geſchwindigkeit des Mittelpunkts in dieſer gleichförmigen Bewegung, $y = \frac{Bb}{A+B}$. Demnach iſt der ganze

Raum,

Raum, wodurch er ſich nach der Seite BC bewegt hat $= x + y = \frac{Aa}{A+B} + \frac{Bb}{A+B} = \frac{Aa+Bb}{A+B}$.

Auf was Art ſich aber auch die Körper bewegen; ſo wird die Bewegung, oder die Geſchwindigkeit des Schwerpunkts, in einer gewiſſen Richtung aus der Summe der Bewegungen nach einerley Seite vor der gegenſeitigen Wirkung, und der Summe der Maſſen beſtimmt. Da dieſe Summe der Bewegungen nach einerley Richtung durch die Wirkung und Gegenwirkung nicht verändert wird, wie ſich auch die Summe der Maſſen nicht ändert: ſo muß nothwendig auch nach der Wirkung die vorige Bewegung des Mittelpunkts der Körper bleiben. Und allgemein wird der Zuſtand der Ruhe oder der Bewegung des Schwerpunkts der Körper durch die Wirkung und Gegenwirkung der Körper in einander nicht verändert.

§. 15.

Begriff der Gegenwirkung.

In den bisher betrachteten Fällen nahmen wir an, daß die gegenſeitig in einander wirkenden Körper nur mit drückenden Kräften verſehen wären. Wir trennten die lebendigen Kräfte, von ihrer Bewegung vor der Wirkung. Die Körper A und B ruhen, der eine iſt mit einer gewiſſen Kraft verſehen, und beyde theilen ſich einander durch gegenſeitige Anziehung oder Zurückſtoßen Bewegung mit.

Es lehren aber die Beobachtungen, daß einerley Bewegung und Effekt ſowohl in dem Körper A, als in

in dem andern B erzeugt werde, die bewegende Kraft mag ſich bey dem Körper A oder B befinden; und daß ferner nichts daran liege, welchen von ihnen man als den leidenden, blos trägen und bewegungsfähigen Körper betrachtet. Der Erfolg iſt einerley, ob der Menſch im Kahne das Schiff, oder im Schiffe den Kahn fortzuſtoßen ſucht. So zieht auch der Magnet das Eiſen, und das Eiſen den Magneten u. ſ. f. Ferner entſteht auch der nämliche Effekt, wenn man ſich die Kraft als keinem dieſer Körper beywohnend, ſondern vielmehr wie eine Feder zwiſchen den beyden Maſſen A und B vorſtellt. Verfolgen wir dieſe Spuren in den Erſcheinungen, ſo ſcheint die gegenſeitige Wirkung und Gegenwirkung ſich auf folgende Art begreifen zu laſſen. **Die bewegende Kraft läßt ſich von der Materie der Körper in Gedanken trennen, und dergeſtalt wirkend denken, daß ſie keine Materie auſer ſich nach einer Seite reizen kann, wo ſie nicht auch zugleich** mit gleicher Intenſität ihre eigne Maſſe ſelbſt, mit welcher ſie vereinigt iſt, **nach der entgegengeſezten Seite reizt.** Die zwiſchen die Maſſen A und B geſtellte Feder ACB (Fig. 3.) kann kein Beſtreben zur Bewegung in dem Körper A nach der Seite AC hervorbringen, wo ſie nicht zugleich in B mit gleicher Intenſität nach der entgegengeſezten Seite wirkt. Nehmen wir aber die Natur der drückenden **bewegenden Kräfte** ſo beſchaffen an; ſo **wird der Trägheit** der bewegten Körper keine **thätige Kraft auſer dem Vermögen,** die von der **Kraft erzeugte Bewegung in ſich aufzunehmen, übrig gelaſſen.**

Dieſe

Dieſe Wirkungsart der Kräfte angenommen, findet man in der gegenſeitigen Wirkung der Körper nichts weiter als **Wirkung der Kraft** und **Aufnahme der Bewegung von der Trägheit**: keine wahre **Gegenwirkung** iſt vorhanden, die von der **Trägheitskraft** herrührte; dieſe iſt blos empfänglich, wovon die Folge hiernächſt iſt, daß die Wirkung der wirkenden Kraft zerſtört wird. Solchergeſtalt **beſteht die ganze Wirkung und Gegenwirkung in einer ſolchen Vertheilung der Wirkung der Kraft in die Maſſen**, daß die Intenſitäten der Wirkungen in den gegenſeitigen Richtungen gleich werden.

Dieſe Gleichheit aber der gleichzeitigen Wirkungen nach entgegengeſezten Seiten darf nicht auf die **ganzen** Wirkungen und ihre Effekte nach beyden Seiten ausgedehnt werden, wenn nicht die Größen der Bewegung, d. i. die Produkte aus den Geſchwindigkeiten in die Maſſen, für die vollen, aus den Wirkungen erzeugten Effekte gehalten werden. Wir haben oben §. 12. gezeigt, daß es mit den Beobachtungen beſſer übereinſtimmt, wenn die Wirkungen nach entgegengeſezten Seiten **durch die Quadrate der erzeugten Geſchwindigkeiten**, in die Maſſen der Körper multiplicirt, geſchäzt werden. Dieſes Maas angenommen: wirkt zwar die Kraft in gleichen Zeiten mit gleicher Intenſität nach entgegengeſezten Richtungen; aber die **bewegenden** Wirkungen, die ſie hervorbringt, und die **ganzen** ihnen verhältnismäßigen Effekte, beruhen nicht allein auf ihrer Intenſität, ſondern auch auf der **Länge** der Wirkungen; d. i. auf der **Geſchwindigkeit**, womit die, die Bewegung empfangenden Körper der Kraft weichen; oder auf dem Raum, wodurch ſie weichen. Daher ſtehen

hen die **Wirkungen nach** entgegengeſezten **Seiten** in der zuſammengeſezten Verhältnis aus den Intenſitäten und den **Längen** oder den **Geſchwindigkeiten**, oder weil die Intenſitäten gleich ſind, in der Verhältnis der erzeugten Geſchwindigkeiten ſelbſt, oder im verkehrten Verhältnis der Maſſen.

Aus dieſer Vorſtellungsart aber folgt, daß der Reiz der bewegenden Kraft in den Fällen, wo beyde Körper ſich frey bewegen können, auf beyden entgegengeſezten Seiten vertheilt, ſich zugleich in zwey Theile, in zwey entgegengeſezte **Reizungen** theilt, die zuſammengenommen dem **ganzen** Reiz gleich ſind. Daher wird das Beſtreben zur Bewegung in A die Hälfte des ganzen Beſtrebens zur Bewegung ſeyn, das aus der Wirkung der Kraft entſpringt; die andere Hälfte iſt in B übergegangen: beyde ſind nur die Hälften des Ganzen.

Doch hindern **zweytens** die Erſcheinungen nicht, daß wir mit andern die **Gegenwirkung der Trägheit** für eine **wahre Wirkung**, und die **Trägheitskraft** für ein **wirkſames Vermögen**, **Bewegung hervorzubringen**, halten können, doch wohnt die **bewegende** Kraft im Körper A ſeiner Materie bey; und wenn dieſe Kraft in B wirkt, ſo empfängt theils die Maſſe des Körpers B die Bewegung, theils leitet ſie die Wirkung der Kraft, die in A iſt, nach der entgegengeſezten Seite, und die Aufnahme der Bewegung in B iſt mit einem gleichen Aufwand von Kräften und Wirkungen in A verbunden. Iſt die **Aufnahme** der Bewegung nur etwas leidendes, ſo läß ſich doch die **Erregung** einer Bewegung in dieſen Beyſpielen, wo vorher keine da iſt, aus einer **wirkſamen** Kraft herleiten. Denn man kann ſich

die

die Trägheit des Körpers B als eine wirkende Kraft gedenken, die durch den Körper A zur Wirkung gereizt wird, und ſo gereizt mit gleicher Intenſität nach der entgegengeſezten Seite zurückwirkt. Die zurückwirkende Trägheit bewegt ſich zwar nicht zurück, wie es ſich einige aus Erſcheinungen falſch einbildeten. Dieſes hindert aber nicht, daß ſie nicht zurückwirkt. Wenigſtens in unſern Beyſpielen begreift man dieſes leicht. Denn da die bewegende Kraft in dem Körper A, gegen B zu gerichtet, dieſe Maſſe B ſtärker und anhaltender reizt, als leztere dieſe Wirkung empfängt, ſo entſteht daher, ſo zu ſagen, eine Verzögerung in der Wirkung der Kraft, die von der Trägheitskraft herrührt, wodurch dieſe eben das bewirken kann, als wenn ſie ſich ſelbſt zurückbewegte.

In dieſen Fällen läßt ſich auch deutlich unterſcheiden, was **Wirkung** und was **Effekt** derſelben iſt. Die Kraft in A (Fig. 2.) wirkt gegen B, und in B. Dieſer **Wirkung Effekt** iſt doppelt: 1.) in B erzeugte Bewegung; 2.) Reiz der Trägheit zum Zurückwirken. Dieſer Gegenwirkung Effekt iſt die in B nach der entgegengeſezten Seite hervorgebrachte Bewegung. Dieſer Effekt hängt mittelbar von der bewegenden Kraft ab, und iſt der Größe der Wirkung gleich, wodurch die Trägheitskraft zum Zurückwirken gereizt wird. Vergl. §. 4.

Meſſen wir die Wirkung durch die Größe der Bewegung, ſo wird der Theil der Wirkung der Kraft in A, wodurch in der Maſſe B Bewegung erzeugt wird, auch dem andern Theil gleich ſeyn, wodurch die Trägheitskraft in B gereizt wird, und wodurch dieſe wiederum eine entgegengeſezte Bewegung in dem

Körper

Körper A erregt. Verhalten ſich aber die Wirkungen wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten in die Maſſen, ſo kann der leztere Theil der Wirkung in B größer oder kleiner ſeyn, als der erſtere. Beyder Intenſitäten ſind zwar gleich, und die Hälften der ganzen Intenſität der Kraft: aber die bewegenden Wirkungen dieſer gleichen Intenſitäten verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten, die die gereizten Maſſen empfangen, und mit welchen ſie der wirkenden Kraft weichen, wie oben dargethan worden, oder ſie verhalten ſich verkehrt wie die Maſſen. §. 12.

Was für eine von dieſen beyden Vorſtellungsarten der Gegenwirkung wir auch wählen, ſo laſſen ſich beyde mit den Erſcheinungen vereinigen. Doch ſcheint mir wenigſtens leztere an Wahrſcheinlichkeit die Oberhand zu behalten. Stößt der Menſch im Kahne das Schiff fort, ſo iſt auſer Zweifel die ganze Wirkung der bewegenden Kraft gegen das Schiff gerichtet. Laſſen ſich daher, da doch im Kahn eine Bewegung nach der entgegengeſezten Seite entſteht, von dieſer neuen Richtung der Kraft aus beyden Hypotheſen gleicheinleuchtende Gründe angeben? So ſcheint es mir nicht. In der Folge werden die gegenſeitigen **Wirkungen** der zuſammenſtoßenden Körper verkommen, deren phyſiſche Erklärung den leztern Begriff der Gegenwirkung von neuen beſtätigen wird. Dieſe Sache führt uns aber zu weit. Sie gehört mehr in den metaphyſiſchen Theil der Naturlehre als in die Mechanik. Ich habe ſie indeſſen, ſo viel hier möglich war, aus einander geſezt, da ich mir, mehr die nähern, als die entferntern allgemeinen Gründe der Erſcheinungen zu erklären, vorgenommen habe. Ich will daher zu den Erſcheinungen zurückkehren.

§. 16.

§. 16.

Gegenſeitige Wirkung, wo die Maſſe des einen Körpers unendlich groß iſt.

Iſt die Maſſe des Körpers B **unendlich groß**, ſo kann er keine **endliche** Geſchwindigkeit von der bewegenden Kraft empfangen, die nur in Rückſicht ſeines Bewegungsvermögens von **endlicher** und beſtimmter Größe iſt. Daher wird der Effekt der Kraft, die B empfängt, etwas **unendlich kleines** ſeyn gegen dem Effekt und die Bewegung, die in dem andern **endlichen** Körper A entſteht. Denn wenn der Effekt in B iſt Bb^2; ſo wird die Größe der Bewegung, oder das Produkt Bb, weil b unendlich klein, und die Maſſe B unendlich groß, etwas endliches ſeyn, und $= Aa$, wo ſowohl die Maſſe A, als die Geſchwindigkeit a **endliche** Größe ſind. Aber Bbb iſt gegen Aaa **unendlich klein**. In dieſem Fall wird alſo der ganze Effekt der Kraft weniger einen unendlich kleinen Theil, auf die Bewegung des endlichen Körpers A verwendet. Und iſt die bewegende Kraft ſo groß, daß ſie eine gleiche Bewegung Aa^2 hervorzubringen vermag; ſo **wird dieſe ganze Bewegung in dem Körper A erzeugt werden**. Der Stein der durch ſeine Schwere herunter fällt, und von der Erde angezogen wird, zieht wiederum die Erde aufwärts an ſich. Dies ſcheint widerſinnig; iſt aber in ſofern wahr, daß allerdings die Intenſität, womit die Erde gegen den Stein gereizt wird, der Intenſität gleich iſt, womit der Stein gegen die Erde getrieben wird; und hiernächſt auch die in der Erde aufwärts erregte Größe der Bewegung gleich der Größe der Bewegung des Steins gegen die Erde.

Da

Da aber die Maſſe der Erde gegen den Stein unendlich groß iſt; ſo wird die Geſchwindigkeit der Erde etwas unendlich kleines ſeyn, folglich auch das Quadrat dieſer Geſchwindigkeit in die Maſſe der Erde etwas unendlich kleines; und **die ganze Wirkung** der Schwere **wird auf die Bewegung des Steins verwendet**, der alſo mit der ganzen Kraft getrieben wird, und von der Schwere eben die Wirkung und Bewegung, weniger einen unendlich kleinen Theil, empfångt, die er empfangen håtte, wenn er ganz allein von der nåmlichen Kraft gereizt worden wåre.

Iſt die Maſſe B zwar nicht gegen die wirkende Kraft, doch aber gegen die Maſſe A unendlich groß, ſo findet ebenfalls das vorige ſtatt. Es wird nåmlich **Wirkung**, Effekt und Bewegung der **Kraft ganz** auf die Bewegung des Kårpers A verwendet. Denn es iſt auch in dieſem Falle die Geſchwindigkeit, die B aus gleicher Wirkung in gleicher Zeit empfångt, unendlich klein; wenn ſie mit der in A erzeugten Geſchwindigkeit verglichen wird; da allezeit $A : B = b : a$, oder die Maſſen ſich umgekehrt verhalten wie die Geſchwindigkeiten, und $Aa = Bb$. Da aber die Geſchwindigkeit a in A gegen die Geſchwindigkeit b in B unendlich groß iſt, ſo wird Aaa gegen Bbb unendlich groß ſeyn. Demnach iſt der Theil der ganzen Wirkung, der auf den Kårper A verwendet wird, unendlich gråßer, als der andere Theil, der in B Bewegung hervorbringt; folglich die ganze Wirkung $Aaa + Bbb = Aaa$. Vergl. §. 13.

§. 17.

§. 17.

Wirkung und Gegenwirkung der gegenſeitig in einander wirkenden Körper A und B; wenn ſie von beyden Seiten durch einen unbeweglichen Widerſtand zurückgehalten werden.

Werden die Körper A und B (Fig. 4. Taf. XV.) von einer Kraft, z. B. von einer Feder getrieben, A nach der Richtung AF; B nach der Richtung BI; beyde aber durch die unbeweglichen Widerſtände ef und ab zurückgehalten; ſo entſtehen in dieſem Fall zwey einander entgegengeſezte Preſſungen, die ſowohl einander ſelbſt, als auch dem Reiz der bewegenden Kraft, nach der einen Seite gleich ſind, und ſo lange dauern, als die bewegende Kraft ihre Wirkung fortſezt.

Denn es wird ſowohl der Körper A, als der Körper B, von der bewegenden Kraft dergeſtalt gleichförmig nach entgegengeſezten Seiten gereizt, daß der Reiz, wodurch A getrieben wird, gleich dem, wodurch B nach der entgegengeſezten Seite getrieben wird, die Hälfte des ganzen von der wirkenden Kraft herrührenden Reizes iſt. §. 15. Es ſey ein unbeweglicher Widerſtand vorhanden, der von einer entgegenwirkenden Kraft zurückgehalten wird; ſo muß in dem Körper B von dem Widerſtande ein Reiz entſtehen, der dem erſtern Reiz der Kraft ACB entgegengeſezt und gleich iſt. In dem Körper B ſind alſo zugleich zwey gleiche entgegengeſezte Reizungen vorhanden; die eine nach der Seite BI; die andere nach der entgegengeſezten Seite IB; und es wird in B ein Gleichgewicht gleicher Kräfte oder Reizungen ſeyn. Man

kann ſich zwar dieſe entgegengeſezte Reizungen in B ſo vorſtellen, daß ſie ſich einander gegenſeitig in jedem Augenblick zerſtören; da man ſie aber ſtets von neuem erregt denken muß, ſo ſind ſie zugleich fortdauernd, ſo lange die reizende Kraft ihre Wirkung fortſezt.

Die Kraft aber, die den Widerſtand ab hinreichend halten kann, muß gleichfalls mit eben der Intenſität in der Richtung IB wirken, als die bewegende Kraft in der Richtung BI.

Daß eben dieſes ſtatt findet, wenn die Körper A und B von einer anziehenden Kraft getrieben werden, ſieht man leicht.

§. 18.

Zuſtand des Gleichgewichts in der von einer bewegenden Kraft gereizten Materie, wo der Kraft hinreichend widerſtanden wird.

Laſſet uns den in der 5. Figur ausgedrückten Fall betrachten, wo zwiſchen der reizenden Kraft in der Feder ACB und dem unbeweglichen Widerſtande ab die Maſſen B, D und E liegen, und wir werden zu dem allgemeinen Grundſatz des Gleichgewichts in jeder Materie, die von einer gewiſſen Kraft gereizt wird, gelangen.

Es ſey P der Druck der Kraft auf das Theilchen B gegen BD, das Theilchen D liege zunächſt an B, an D wiederum E, zunächſt dem unbeweglichen Widerſtand ab. In dieſem Fall wird B durch den Druck P gegen D gepreßt; das Theilchen D wieder gegen E, und E gegen den Widerſtand; jedes wird durch den nämlichen Druck P gepreßt; es wirkt aber der Wider-

derſtand mit gleichem Druck gegen E, E gegen D, D gegen B; und es iſt in allen ein Gleichgewicht vorhanden. In dieſem Zuſtande des Gleichgewichts iſt in ſämmtlichen Theilen E, D, B, ein gleicher Druck nach entgegengeſezten Seiten. So lange die bewegende Kraft ACB wirkt, wird E beſtändig gegen ab gepreßt, und dieſer Wirkung iſt die gleiche Wirkung des Widerſtands entgegengeſezt. Folglich ſind in E zwey gleiche entgegengeſezte Reizungen. Eben dieſe ſind in dem Theilchen D; denn dieſes wirkt beſtändig in E, und E wirkt, nachdem es ſeinen Reiz von dem Widerſtande empfangen, beſtändig gegen D gleichförmig zurück; das Theilchen B wirkt in D, und D wirkt beſtändig mit gleichem Reiz gegen B zurück. Demnach ſind in allen Theilen der Materie, wodurch mittelbar der Reiz der Kraft ACB, und die Gegenwirkung des Widerſtands ab geht, gleiche entgegengeſezte Reizungen, wodurch die auſer einander vorhandenen Materien gereizt werden. Denn jedes Theilchen wird von beyden entgegengeſezten Seiten mit gleichem Druck gepreßt; und jedes wirkt gleichförmig nach den entgegengeſezten Richtungen zurück.

In ſämmtlichen Theilchen iſt alſo auch ein gleiches Beſtreben, ſich nach entgegengeſezten Seiten zu bewegen, vorhanden. In E iſt ein Beſtreben gegen ab, und gegen das Theilchen D, in D ſowohl gegen E, als gegen B; und in B ſowohl gegen D, als gegen BA, demjenigen gleich, ſo der Reiz der bewegenden Kraft ACB gegen BDE hervorzubringen vermag. Es iſt alſo klar, daß allgemein folgender Grundſatz ſtatt findet: in der Materie BDE, die durch den Druck einer Kraft, der ein Hindernis

hinreichend widerſteht, gereizt wird, iſt ein Gleichgewicht von Reizungen, in der Richtung der Kraft ſelbſt, und in der gegenſeitigen vorhanden; die unter ſich in allen Theilchen der Materie, und auch in allen, die mittelbar von der Kraft gepreßt werden, gleich, und mit dem unmittelbaren Reiz von einerley Größe ſind, die Menge der mittelbar gereizten Theilchen mag groß oder klein ſeyn.

Wird der Druck von der Kraft der Feder unmittelbar zugleich auf mehrere Theilchen B, H, (Fig. 6.) angebracht, ſo wird der ganze Druck der Feder zum Effekt in allen dieſen Theilchen ſich umgekehrt verhalten, wie die Summe dieſer Theilchen; wo nicht die wirkende Kraft, gleich unſerer Schwere, beſtändig der Maſſe proportional iſt. Iſt daher P der ganze Druck; ſo wird die Wirkung in das eine Theilchen B, oder wie ſie einige nennen, die beſchleunigende Kraft, ſich verhalten wie $\frac{P}{H+B}$ in dieſes Theilchen multiplicirt. Liegen aber zunächſt an dieſen Theilchen andere D, A ꝛc. und an dieſen wieder E und e, denen endlich das unbewegliche Hindernis widerſteht; ſo iſt wiederum ein Gleichgewicht von gleichen Reizungen in allen Theilchen vorhanden. Aber jede einander entgegengeſezte Reizungen verhalten ſich wie $\frac{P}{H+B}$, wenn H = B; oder, wenn die unmittelbar gereizten Theilchen gleich ſind, ſo verhält ſich der

Druck

Druck in jedem, gerade wie der ganze Reiz der Kraft P, und verkehrt wie die Menge der zugleich unmittelbar gereizten Theilchen, d. i. wie die Oberfläche, an welche die Kraft unmittelbar angebracht wird.

§. 19.

Folgen dieſes Grundſatzes und Uebereinſtimmung deſſelben mit den Erſcheinungen.

Die Wahrheit dieſes Grundſatzes kann hauptſächlich in den daraus hergeleiteten Folgen durch Verſuche auſer Zweifel geſezt werden. Eben das Gewicht oder Kraft, wodurch eine auf einer Seite an einen feſten Widerſtand A geſtemmte Feder ABC (Fig. 8.) in einem zuſammengedrückten Zuſtande erhalten werden kann, iſt auch hinreichend, mehrere dergleichen einander entgegengeſezte Federn in dem nämlichen Grade der Zuſammendrückung zu erhalten.

Denn der Druck, wodurch ABC allein in C erhalten werden muß, iſt ſowohl dem Drucke, wodurch der Widerſtand A, als auch dem andern, wodurch die Feder CDE gegen CE gepreßt wird, gleich. Dieſem iſt der im Punkte C entgegengeſezte Druck der Feder CDE gegen CA, und dieſem wieder das Gewicht E, wodurch CDE erhalten wird, gleich. Wären ſämmtliche für ſich zu erhaltende Federn Preſſungen in den Punkten C und E; ferner in C und A, ſo würde jede dem Gewichte P gleich ſeyn. Werden ſie aber mit einander verbunden; ſo wird die Feder ABC im Punkte C von der Feder CDE erhalten, und der Punkt C wird gegen CA mit keiner größern oder kleinern Kraft, als P iſt, gepreßt. Mit gleicher Intenſität aber ſtrebt ABC im Punkte C ſich gegen

CE auszudehnen. Demnach ſind die Federn ABC und CDE im Punkte C einander feſte Widerſtände; wodurch alſo weder das Gewicht in E, noch die Wirkung in den Widerſtand A verändert werden kann.

Daher werden mehrere in einer Horizontalebene auf einander gelegte Federn ABC, CDE, EFG, (Fig. 8.) von eben dem Gewichte, auf eben die Art zuſammengedrückt, als die eine derſelben. Auch bedarf es wegen der größern oder kleinern Anzahl der mittelbar gereizten Federn, wovon die eine der andern widerſteht, keines größern oder kleinern Gewichts, um ſelbige bis zu eben dem Grad zuſammen zu drücken. Dieſes beſtätigen ſehr leichte Verſuche. Aus eben dem Grunde wird die in einer Röhre enthaltene Luft von eben dem Gewichte auf eben den Theil ihres Raums zuſammengedrückt, man mag eine größere oder kleinere Menge derſelben nehmen. Auch werden Saiten von einem Gewichte gleich ſtarkgeſpannt, man mag ſie länger oder kürzer nehmen, wenn man andere Urſachen, wodurch die Sache anders erfolgen kann, beyſeite ſezt. Eine unendliche Menge anderer Erſcheinungen laſſen ſich aus eben dieſem Grundſatze erklären. Vergl. *Borellus* de vi percuſſionis, Cap. XXXI. prop. 100.

Hieraus darf man aber nicht ſchlieſen, daß mehrere auf einander gelegte Gewichte, z. B. ABC, (Fig. 9.) die Grundfläche F mit keiner größern Kraft drücken, als ein einziges C. Der Druck auf die Fläche iſt in dieſem Falle der Höhe oder der Menge auf einander gelegter gleicher Gewichte proportional. Dieſer Fall iſt weit von dem vorigen verſchieden. Denn in der unterſten Maſſe C iſt kein Reiz aufwärts vorhanden, womit ſie gegen die Schwere B wirkt. C

drückt

drückt mit ſeinem Gewichte, und die unbewegliche Fläche F drückt mit gleicher Intenſität zurück, wodurch das Gewicht von C erhalten wird. Es iſt zwar ein Gleichgewicht gleicher in C entgegengeſezter Reizungen vorhanden. Aber der Reiz niederwärts, der der Gegenwirkung der Fläche entgegengeſezt iſt, iſt in der Maſſe C ſelbſt, nicht in einer andern darüber liegenden B zu ſuchen, welches ſich im vorhergehenden Falle anders verhielt. Daher wird keine andere aufgelegte Maſſe B zu Hervorbringung des Gleichgewichts in C erfordert. Wenn alſo vom Gewichte B in C ein neuer Reiz erzeugt wird, ſo entſteht auch in F eine neue gleiche Gegenwirkung; daher wird F mit doppelter Kraft ſowohl vom Gewicht B, als von C, gedrückt.

Nimmt man an, die unterſte Feder EFG (Fig. 8.) werde durch ein eigenes Gewicht zuſammengedrückt erhalten; legt man darauf eine andere, in C mit einem Gewicht verſehene Feder CDE; ſo wird leztere, weil ſie in dem andern Punkte E keinen feſten Widerſtand hat, die untere noch ſtärker zuſammendrücken, als ſie vorher war: ſie ſelbſt aber wird nachlaſſen, ſo daß, wenn ſie in eben dem Grade zuſammengedrückt erhalten werden ſollte, man im Punkte C ein doppeltes Gewicht auflegen müßte. Dieſer Fall würde dem andern, (Fig. 9.) wo mehrere ſchwere Körper auf einander gelegt werden, ähnlich ſeyn; aber auch der Effekt auf die Grundfläche F würde ähnlich ſeyn. Denn dieſe würde von einem doppelten Gewichte gedrückt, und von einem deſto größern, je größer die Anzahl der ſo auf einander gelegten Federn wäre.

§. 20.

Ein Körper im Gleichgewicht, wird, wegen Gleichheit der in einer gewiſſen Richtung einander entgegengeſezten Reizungen, nach allen Seiten gleichſtark gepreßt. Grundſatz der Hydroſtatik.

Wird die Materie EfBDA, (Fig. 10.) deren Schwere, nebſt andern Kräften bey Seite geſezt wird, von einer Kraft im Punkte A gegen B gedrückt, und in B hinreichend erhalten; ſo iſt in ihm ein Gleichgewicht vorhanden, und der Druck im Punkte B gegen A iſt gleich dem Druck im Punkte A gegen B, vermöge deſſen, was §. 17. 18. geſagt worden. Der Druck aber im Punkte A gegen AB wird durch AB ausgedrückt; und läßt ſich durch Verzeichnung des Quadrats ADBE in zwey gleiche ſenkrechte Preſſungen AD und AE zerlegen. Auf ähnliche Art wird der im Punkte B entgegengeſezte Druck zerlegt. Daher entſtehen Preſſungen gegen den Punkt D, AD und BD, die, zuſammen, einen gleichen Druck ED in der Richtung ED hervorbringen. Gegen den Punkt E ſind Preſſungen AE und BE vorhanden, die vereinigt eben das vermögen, was ein Druck DE gegen E. Es ſind aber die entgegengeſezten Preſſungen DE und ED jede den entgegengeſezten Preſſungen AB und BA gleich.

Zerlegt man die Preſſungen AB und BA auf ähnliche Art in jede andere ſenkrechte, z. B. den Druck AB in Ae und Af; BA in Bf und Be: ſo entſtehen daher andere gleiche und entgegengeſezte in der Richtung fe.

In

In allen Richtungen ſind alſo einander entgegengeſezte und gleiche Reizungen vorhanden, ſämmtlich von eben der Größe, womit A gedrückt wird. Und dieſe müſſen alle zugleich ſo lange fortdauern, als die Kraft den Punkt A zu reizen fortfährt, und ſo lange ihr überall genugſam widerſtanden wird. Demnach iſt der Grundſatz allgemein: **eine von einer Kraft, der überall hinlänglich widerſtanden wird, gereizte Materie, wird mit gleichem Druck in allen ihren Theilchen nach allen Richtungen gleichförmig gereizt.** Daher beſtreben ſich dieſe Theilchen, ſich von einander zu entfernen.

Die Theilchen der Materie AEBD **hängen entweder mit einer gewiſſen Kraft zuſammen, oder nicht.** Sind Kräfte vorhanden, die den Zuſammenhang der Theile bewirken und erhalten, ſo werden durch ihre Wirkung ſolche entgegengeſezte Preſſungen aufgehalten oder zurückgehalten; die Kräfte ſelbſt aber werden erregt und zur Wirkung angetrieben. Werden die Cohäſionskräfte in irgend einer Richtung, z. B. fe vom Druck AB überwältigt, ſo wird eine Bewegung in dieſer Richtung entſtehen, oder, wenn dieſe von einem äuſern Körper in den Punkten e und f gehindert wird, ſo muß dieſer doch Reiz leiden.

Flüßigkeiten ſtellen wir uns als Sammlungen der kleinſten Theilchen vor, die ſchlechterdings mit **keiner Kraft** zuſammenhängen, wenn ſie vollkommen flüßig ſind. Daher wird eine ſolche, in einem nach allen Seiten unbeweglichen Gefäße enthaltene Maſſe, wenn ſie von einer Kraft A im Punkte A gereizt wird, in allen ihren Theilen gleiche Reizungen nach allen möglichen Richtungen empfangen. Daraus

raus wird unmittelbar geſchloſſen: in einer jeden Flüßigkeit, die von äuſern auf ihre Oberfläche wirkenden Kräften gehalten wird, kann kein Gleichgewicht da ſeyn, wo ſie nicht von allen Seiten, und daher auch nach auf ihre Oberfläche ſenkrechten Richtungen mit gleichem Druck gepreßt wird. Hier haben wir den Grundſatz, woraus, wie **Euler** in Hiſtoire de l'Académie Royale des Sciences, 1765. erwieſen, alles übrige in der Hydroſtatik ſich herleiten läßt. Demnach entſpringen die Geſetze, die die Natur beym Gleichgewichte der flüßigen Körper befolgt, mit denen, nach welchen ſie beym Gleichgewicht der feſten Körper handelt, aus demſelben gemeinſchaftlichen Quell.

§. 21.

Gleichheit der Preſſungen iſt von der Gleichheit der bewegenden Kraft zu unterſcheiden.

Man hüte ſich aber vor der Verwirrung verknüpfter, doch wirklich verſchiedner Begriffe. Ich habe im vorhergehenden geſagt, daß mehrere ähnliche und gleiche mit einerley Intenſität zuſammengedrückte Federn mit keiner kleinern, noch größern Gewalt drücken, als wenn nur eine allein wirkte; und daher durch einerley Gewicht gleich ſtark zuſammengedrückt werden, ihre Zahl mag größer oder kleiner ſeyn. Dieſes muß man aber nicht misverſtehen, und daher behaupten, es ſey in mehrern und wenigern einerley Bewegungskraft, einerley Wirkung vorhanden, und die größere Menge laſſe ſich mit gleicher Kraft und Wirkung, wie die kleinere zuſammendrücken. Denn es iſt ein großer Unterſchied unter gleichen

chen Preſſungen und Gleichheit der bewegenden Wirkungen, die eine beſtimmte Kraft hervorzubringen vermag. Sind mehrere Federn, z. B. ABC, CDE, (Fig. 8.) die ſich ſämmtlich auf einen Raum von gewiſſer Größe auszudehnen, und durch dieſe Bewegung einen Körper fortzuſtoßen vermögen; ſo muß auch nothwendig dieſer Raum, wenn das übrige gleich iſt, ſich verhalten, wie die Anzahl der einander preſſenden Federn. Sie ſeyn im zuſammengedrückten Zuſtande wie ACB, (Fig. 11. Taf. XV.) und im ausgedehnten, wie eben die Feder in der Lage aCb, ſo iſt der Raum, wodurch ſie ſich ausgedehnt hat, Aa + Bb. Sind aber zwey gleichſtark geſpannte Federn vorhanden, die ſich hernach ausdehnen, und in die Lage acb und brf kommen, ſo erhellt, daß beyder Ausdehnungsraum ſey Aa + Bf — BM, wenn BM = BA. Dieſer iſt aber doppelt ſo groß, als der Raum Aa + Bb, wodurch ſich die eine ausgedehnt hat. Denn es iſt Aa + Bf — BM = Aa + Bb + bf — BA = Aa + Bb + Aa + AB + Bb — BA = 2 (Aa + Bb). Die Intenſität der Wirkung iſt zwar in jedem Augenblicke einerley, es mögen zwey, oder eine da ſeyn; aber ihre Länge verhält ſich wie der Raum, wodurch die bewegende Kraft den gereizten Körper fortbewegt. Daher wird auch die Wirkung ſelbſt deſto größer ſeyn, je größer der Raum iſt, d. i. die bewegende Wirkung iſt deſto größer, jemehr Federn ſich zugleich ausdehnen und Bewegung hervorbringen. Denn die ganze Gewalt mehrerer Federn iſt in dieſem Fall von beſtimmter Größe, ſie wird vermindert, indem die Federn ſich ausdehnen, und verſchwindet ganz, wenn die Ausdehnung am größten iſt.

Das Verhältnis der ganzen Kraft iſt aus der Intenſität, womit die Ausdehnung geſchieht, und der Länge dieſer bewegenden Wirkung zuſammengeſezt. Daher wird auch größere Wirkung, mehrere Federn, als weniger, in gleichem Grade zuſammen zu drücken, erfordert. Folglich iſt auch eine größere Kraft zu jenem größern Effekt nöthig, als zu dieſem kleinern. Drückt einerley Gewicht mehrere und wenigere gleichſtark zuſammen: ſo iſt ſeine bewegende Wirkung nicht einerley; obgleich ihre Intenſität einerley, d. i. das Gewicht einerley iſt. Denn die Höhe des Niederſinkens iſt verſchieden, und deſto gröſſer, je größer die Menge der zuſammenzudrückenden Federn iſt; wenn ſie ſämmtlich auf die nämlichen Grenzen ihrer Ausdehnung gebracht werden ſollen.

In der Hydroſtatik wird zwar richtig behauptet, daß eine Waſſerſäule von kleinerer Maſſe in Kommunicationsröhren mit einer in der andern Röhre gleichhochſtehenden weit größern Maſſe das Gleichgewicht halte. Wie ſolches durch Verſuche mit dem ſogenannten anatomiſchen Heber beſtätigt wird. Die kleinere Maſſe in der kleinern gleichhohen Röhre drückt die Grundfläche der größern Röhre eben ſo ſtark, als die größere Maſſe. Setzet aber, es ſoll ein Gewicht auf eine gewiſſe Höhe gehoben werden, und ihr werdet den Unterſchied haben. Das Waſſer, ſo in der kleinern Röhre fällt, wenn in der andern Röhre der auf dem Grunde liegende Körper gehoben wird, verliert plötzlich ſeine ganze Kraft, weiter zu heben, wenn der gehobene Körper zu einer größern Höhe gelangt iſt. Nehmet dagegen an, dieſe Röhre ſey mit der andern, in welcher das Gewicht gehoben wird, gleichweit, enthalte folglich auch eine

gleiche

gleiche Maſſe Waſſer; ſo wird dieſe gröſſere Menge Waſſer das Gewicht zu einer weit gröſſern Höhe zu erheben fortfahren. Denn die bewegenden Kräfte ſind hier ſehr verſchieden, obgleich ihre Preſſungen, oder die anfänglichen bewegenden Wirkungen gleich ſind.

§. 22.

Gegenſeitige Wirkung, wo auf der einen Seite ein feſter Widerſtand, auf der andern freye Bewegung vorhanden iſt.

Bisher haben wir §. 16. bis 21. in zwey Fällen die Natur der Wirkung und Gegenwirkung betrachtet. Denn entweder können beyde Körper, der wirkende ſowohl, als der gegenwirkende, von der bewegenden Kraft frey Bewegung empfangen, und bewegt werden. Die Maſſe des einen iſt entweder gegen den andern unendlich groß, oder nicht. §. 16. Oder zweytens, werden beyde Körper von einem Widerſtande dergeſtalt zurückgehalten, daß die Wirkung der wirkenden Kraft keine merkliche Bewegung zuwege bringen kann, ſondern bloſer Druck bleibt, und auſer Beſtreben zur Bewegung nichts im Körper hervorbringt. §. 17. 18. 19. Nun iſt noch übrig, daß wir auch den dritten Fall unterſuchen, wo die Kraft von der einen Seite durch einen feſten Widerſtand gehemmt wird, auf der andern aber in einem freyliegenden Körper wirken kann. Denn ſo laſſen ſich die Regeln und Geſetze im allgemeinen einſehen, nach welchen die bewegenden Kräfte ihre Wirkungen und Effekte in die verſchiedenen gegenſeitig auf einander wirkenden und zurückwirkenden Maſſen vertheilen.

Es ſey alſo ab (Fig. 3. Taf. XV.) ein feſter unbeweglicher Widerſtand, zwar nicht wegen ſeiner unendlich großen Maſſe, ſondern weil er von einer andern Urſache in ſeiner Stelle feſtgehalten wird, ſo daß er von einer bewegenden Kraft, die wir uns z. B. in der Feder ACB gedenken, keine Bewegung nach der Seite BE empfangen kann. Ein aufgehangener ſchwerer Körper läßt ſich als ein ſolcher durch ſein Gewicht widerſtrebender Widerſtand annehmen, wenn ihn die drückende Kraft einer Feder zu erheben ſucht: der freyliegende Körper A ruhe, damit er die Wirkung der Kraft in ſich aufnehme. Wir nehmen hier nur zum Beyſpiel eine Federkraft an, damit nämlich die Einbildungskraft ſich leichter an einen beſtimmten Fall halten kann, indem der Verſtand das Allgemeine deſſelben erwägt. Denn es iſt gleich viel, ob man in die Stelle einer Federkraft, die die Körper von einander zu trennen ſich beſtrebt, eine anziehende Kraft ſezt, die die Körper einander zu nähern ſucht.

Da alſo des Widerſtands Maſſe nicht unendlich groß iſt, ſo kann auch ſeine Größe nicht hindern, daß keine merkliche Bewegung in ihm erregt wird. Daher muß er nothwendig durch eine von ſeiner Trägheit verſchiedene Kraft, gegen die bewegende Gewalt in ſeiner Stelle unbeweglich erhalten werden. Dieſer Fall iſt alſo von jenem, den wir §. 16. betrachtet haben, unterſchieden.

Dieſes vorausgeſezt, wollen wir uns vorſtellen, die bewegende Kraft in ACB äuſere ein doppeltes Beſtreben, und wirke ſowohl gegen den Widerſtand in der Richtung BE, als gegen den freyliegenden Körper in der Richtung AC. Erſteres ſey durch E, lez-

teres durch F angedeutet. Jener erſtern Wirkung wird von der zurückhaltenden Kraft hinreichend widerſtanden. Die Wirkung aber dieſer zurückhaltenden Kraft iſt eine Gegenwirkung; die weder größer noch kleiner iſt, als die Wirkung der Kraft gegen den Widerſtand; oder die der Wirkung F gleich iſt. Dieſe Wirkung aber iſt ein Druck, der durch die Zeit der ganzen Wirkung entweder mit ſtets gleicher Intenſität, oder nicht, fortdauert. Die Gegenwirkung des Widerſtands aber wird ihr in jedem Augenblicke gleich ſeyn. Die Wirkung aber gegen den Widerſtand iſt, was Intenſität und Zeit der Dauer betrift, der Wirkung nach der entgegengeſezten Seite gleich. §. 12. Aber dieſe hat nur eine unendlich kleine Länge. Alſo iſt auch der daher entſtehende Effekt etwas unendlich kleines, wenn er mit dem Effekt in der gegenſeitigen Richtung AC verglichen wird, wie in §. 16. **Doch iſt er ſo groß, daß er, wenn er auf einen freyliegenden Körper angewendet worden wäre, in gleicher Zeit eine Bewegung hätte erzeugen können, deren Größe, durch die Geſchwindigkeit in die Maſſe beſtimmt, der Größe der Bewegung gleich iſt, die durch die Wirkung A in der entgegengeſezten Richtung hervorgebracht wird. §. 12.**

Da aber während der Wirkung der Kraft dem gegen B gerichteten Theil der Wirkung E eine gleiche Wirkung des Widerſtandes entgegenſtrebt: ſie ſey R; ſo wird ein Zuſtand des Gleichgewichts aus entgegengeſezten gleichen Reizungen im Punkte B gefunden. Denn es iſt der Druck E gegen BE, und der entgegenſtrebende Druck R des Widerſtandes gegen BA gerichtet. Jener Druck hat ſeinen Effekt in dem

Beſtre-

Beſtreben, ſo er dem Widerſtande eindrückt, und verzehrt ſich darinnen; die Gegenwirkung des Widerſtandes erlangt in der entgegengeſezten Richtung einen gleichen Effekt im Körper A gegen BA. Dieſe leztere gegen die Kraft ACB und den freyliegenden Körper A gerichtet, kann in dieſem Körper eine Bewegung in ihrer Richtung BA zuwegebringen. Daher wird eine Bewegung in A von dem Theil der Wirkung F, und der mit E gleichen Wirkung des Widerſtands R zugleich hervorgebracht. Demnach iſt der Effekt im Körper A proportional der Wirkung E + F, d. i. der Wirkung der ganzen Federkraft ACB. Daher wird die ganze Wirkung der bewegenden Kraft auf diejenige Seite gekehrt, wo ſie eine freyliegende und bewegliche Materie antrift, wenn ihr von der andern Seite genugſam widerſtanden wird.

Dieſes läßt ſich auch ſo begreifen. Man gedenke ſich, der Widerſtand ſey der Wirkung E ein wenig gewichen, und durch den kleinen Raum Br gegen BE fortgerückt, aber ſogleich im folgenden Augenblick, in Vereinigung mit der Kraft ACB und dem Körper A, durch rB wieder in B zurückgeführet worden. Denn ſo iſt eben das bewirkt worden, was vorhin angenommen wurde. Nach geendigter gegenſeitigen Wirkung iſt er in eben dem Orte, wo er vor der Wirkung war. Weicht der Widerſtand durch Br, ſo wird auf ihn die Wirkung E verwendet, da die Wirkung F in den Körper A übergeht. Da aber der Widerſtand durch eine bewegende Kraft in B wieder hergeſtellt wird; ſo muß durch dieſe Wirkung R, die der erſtern F gleich iſt, ſowohl die Feder ACB ſelbſt, als der Körper A gepreßt werden, weil beyde mit dem

Wider-

Widerſtande während dieſer Wirkung verbunden ſind. Daher wird die Wirkung gegen BA wieder hergeſtellt, die vorher gegen BE angewendet und zerſtört wurde; d. i. die ganze Wirkung der Feder wird gegen den Körper A gekehrt.

Die Erſcheinungen beſtätigen dieſes. Eine an der einen Seite auf einen feſten Widerſtand ruhende Feder läßt an der andern entgegengeſezten ihre ganze Wirkung aus. Ein Theil wird zwar gegen den Widerſtand verwendet; aber dieſer wird durch die Gegenwirkung der, den Widerſtand haltenden Kraft wieder erſezt. Man bringe unten an einem aufgehangenen Gewichte eine geſpannte Feder an, die, wenn ſie hiernächſt losgelaſſen wird, von der einen Seite das Gewicht zu erheben, von der andern einen freyliegenden Körper A fortzuſtoßen ſtrebt. Man nehme an, das Gewichte werde ein wenig aufwärts bewegt; falle aber ſogleich wieder, wegen ſeiner Schwere, auf eben den Punkt herunter; ſo iſt hier das Fallen eine Wirkung, die ſeinem Steigen gleich iſt, wodurch ſowohl die Feder, als der an ſie angebrachte Körper gepreßt wird, die alſo denjenigen Theil der Wirkung des Widerſtandes wieder herſtellt, den die Kraft der Feder vorher zu Erhebung des Gewichts angewandt hatte.

Doch muß man dieſes nicht falſch verſtehen. Der Körper A muß in dieſem Fall in Rückſicht der gegen den Widerſtand wirkenden Kraft, und zugleich in Rückſicht der Gegenwirkung der, den Widerſtand haltenden Kraft, frey liegen, und der Gegenwirkung ungehindert weichen können. Ein Gewicht auf einer feſten horizontalen Ebene, drückt dieſe zwar, und wird von ihr wieder aufwärts gedrückt; doch

kann daher keine Bewegung in dem Gewichte nach aufwårts erzeugt werden. Denn der von der Gegenwirkung der Ebene herrůhrende Effekt wird ſogleich von einem neuen Reiz der Schwere vernichtet: da hingegen in unſerm Falle in der Maſſe A nichts vorhanden iſt, was ſie zurůckhålt. Und iſt auch die Kraft ſelbſt, wodurch der Widerſtand gepreßt wird, in der Maſſe A vorhanden, ſo iſt ſie doch ſo beſchaffen, daß ſie, wenn ſie, die Gegenwirkung des Widerſtandes zu reizen, ſich beſtrebt hat, nichts hierauf zuwege bringt, um den Kõrper ſelbſt dem Widerſtande von neuem zu nåhern.

In dieſem Fall iſt keine Bewegung in dem Widerſtand erzeugt worden; ſtellt man ſich aber die gereizte Gegenwirkung des Widerſtandes als einen Effekt vor, und vergleicht dieſen mit einer ſehr kleinen erzeugten Bewegung; ſo iſt doch in dieſem Falle die Bewegung unendlich kleiner, als jene kleinſte Bewegung, die der blos durch ſeine Trågheit widerſtrebende Widerſtand in dem Fall §. 16. empfångt, wo ſeine Maſſe unendlich groß angenommen wurde. Es ſey O der Widerſtand, ſeine kleinſte Grſchwindigkeit do; ſo iſt die Grõße der Bewegung Odo, die in dieſem Fall, wo O endlich iſt, unendlich kleiner ſeyn wird, als in obigem, wo O unendlich groß iſt. Daher der Effekt in gegenwårtigem Falle, Odo^2, ein **Unendlichkleines der zweyten Ordnung** iſt, da es §. 17. der erſten **Ordnung** war. Heißt ferner die im Kõrper A erzeugte Geſchwindigkeit a, und das Element derſelben da, ſo iſt zwar in jetzigem Fall $Ada = Odo$, d. i. die Preſſungen ſind gleich, und $S.Ada = S.Odo$, oder $Aa = Oo$. Da aber in O

auſ-

auſer do nichts zuwege gebracht worden, ſo kann auch nicht ſeyn Aa = Odo wie §. 16.

§. 23.

Fälle, wo ſich der Widerſtand ſelbſt, während der gegenſeitigen Wirkung, gegen den freyliegenden Körper bewegt.

Endlich, um alle Gründe, woraus ſich die gegenſeitigen Wirkungen der Körper einſehen laſſen, zuſammen zu nehmen, iſt noch dieſes hinzuzufügen: Bewegt ſich während der Wirkung der Widerſtand ab (Fig. 3.) ſelbſt in der Richtung BA, ſo muß nothwendig dieſe Wirkung ſelbſt, die er, als ein gegen den Körper A ſich bewegender Körper, hervorbringt, auſer der ganzen Wirkung der bewegenden Kraft, in A übergehen. Daher muß ihr Effekt in A wahrgenommen werden: wenn nämlich Bewegung aus dem Widerſtand überzugehen genöthigt wird. Denn, iſt der Widerſtand unbeweglich, ſo iſt nach vorigem der Effekt in A der ganzen Wirkung der Kraft proportional. In unſerm Fall aber kömmt durch die Bewegung des Widerſtands eine neue Wirkung gegen A hinzu, folglich muß, wenn dieſe Wirkung Effekt mittheilt, welches geſchieht, wenn ſie im Widerſtande verſchwindet; nothwendig dieſer Effekt ebenfalls in A nach der gegenſeitigen Wirkung anzutreffen ſeyn.

Um aber im folgenden die Erſcheinungen aus dieſen Gründen leichter zu erklären, wollen wir das, was in dieſem lezten Falle vorgeht, deutlicher aus einander ſetzen. Es ſeyn A und B (Fig. 11.) zwey Körper, zwiſchen welchen man ſich eine geſpannte Feder ACB gedenkt. Sie wirke in beyde Körper,

indem ſie losgelaſſen wird, und ſich auszudehnen beſtrebt, ſo, daß ihre Wirkung gänzlich aufhört, wenn ſie in die Lage aCb kommt. Hätten ſich alſo erſtlich beyde Körper A und B im Anfang der Wirkung in Ruhe und freyer Lage befunden, ſo würde am Ende der Wirkung A durch den Raum Aa; B aber durch den Raum Bb fortgerückt ſeyn. Wäre zweytens A in ſeiner Stelle A erhalten worden; ſo würde durch die Wirkung der Feder der Körper B allein durch den Raum Bi fortbewegt worden ſeyn, wenn Ai = ab: denn die Feder dehnt ſich eben wie vorhin aus, daß nämlich Ai = ab, folglich bi = Aa. Iſt endlich drittens der Körper A während dieſer Wirkung der Feder aus ſeiner eigenen Bewegung durch den Raum AB fortgerückt; ſo muß auch der Körper B durch den Raum Bf = Ai = AB + Bi = AB + Bb + Aa fortgerückt ſeyn. Der Körper B iſt alſo durch den Raum fortgerückt, den A durch ſeine eigne Bewegung während der Wirkung zurückgelegt hat, worzu noch ſowohl der Raum, durch den A fortgerückt wäre, wenn er ruhig freyliegend die Wirkung der Kraft empfangen hätte, als auch der andere Raum kömmt, wodurch B auch fortgerückt wäre, wenn beyde Körper vor der Wirkung frey geruhet hätten. Die Wirkung in B hat alſo die Länge Bf, wenn ſich die Länge wie der Raum verhält, wodurch ſich der gereizte Körper fortbewegt. Die Intenſität aber, womit B gepreßt wird, iſt in dieſem Falle mit der entgegengeſezten Intenſität gleich, wodurch die Bewegung in A zerſtört wurde. Dieſe leztere Intenſität aber in der Richtung BA hat ihren Effekt in der Zerſtörung dieſer Bewegung erlangt; die andere hat in den Körper B gewirkt. Die Wirkung aber der Kraft in B

verhält

verhält ſich wie die Intenſität in die Länge der Wirkung multiplicirt. Welches Verhältnis ſich hier ebenfalls, wie oben, wenigſtens als eine Hypotheſe, um die Erſcheinungen zu erklären, und ihre Uebereinſtimmung zu zeigen, annehmen läßt.

§. 24.
Erzeugung und Zerſtörung der lebendigen Kräfte.

Dieſe Grundſätze von den Wirkungen der bewegenden Kräfte überhaupt, und ihrer Vertheilung in die Maſſen der gegenſeitig auf einander wirkenden Körper vorausgeſezt; laſſet uns nun zu den eigentlich ſogenannten lebendigen wirkenden Kräften kommen, die die Körper, denen ſie beywohnen, beſtändig von einem Ort zum andern fortrücken.

Wir wiſſen aus dem Falle ſchwerer Körper und aus einer unendlichen Menge anderer Erſcheinungen, daß die Bewegung und die von ihr abhängenden lebendigen Kräfte in den Körpern erzeugt werden, wenn ſie von bewegenden nicht lebendigen Kräften beſtändig getrieben, und durch einen gewiſſen Raum von ihnen fortbewegt werden. Die Wirkungen bewegender Kräfte werden alsdenn bewegende Wirkungen, bleiben nicht Preſſungen, und die Kräfte ſelbſt, die die Bewegung hervorbringen, können dann auch, was die Wirkung betrift, lebendige heiſen.

Ein an einem Faden feſt aufgehangener Körper wird von der Schwere unaufhörlich gereizt. Wirkt aber auch die Schwere durch einen unendlichen Zeitraum ſo auf ihn fort; ſo entſteht doch keine Be-

indem ſie losgelaſſen wird, und ſich auszudehnen beſtrebt, ſo, daß ihre Wirkung gänzlich aufhört, wenn ſie in die Lage aCb kommt. Hätten ſich alſo erſtlich beyde Körper A und B im Anfang der Wirkung in Ruhe und freyer Lage befunden, ſo würde am Ende der Wirkung A durch den Raum Aa; B aber durch den Raum Bb fortgerückt ſeyn. Wäre zweytens A in ſeiner Stelle A erhalten worden; ſo würde durch die Wirkung der Feder der Körper B allein durch den Raum Bi fortbewegt worden ſeyn, wenn Ai = ab: denn die Feder dehnt ſich eben wie vorhin aus, daß nämlich Ai = ab, folglich bi = Aa. Iſt endlich drittens der Körper A während dieſer Wirkung der Feder aus ſeiner eigenen Bewegung durch den Raum AB fortgerückt; ſo muß auch der Körper B durch den Raum Bf = Ai = AB + Bi = AB + Bb + Aa fortgerückt ſeyn. Der Körper B iſt alſo durch den Raum fortgerückt, den A durch ſeine eigne Bewegung während der Wirkung zurückgelegt hat, worzu noch ſowohl der Raum, durch den A fortgerückt wäre, wenn er ruhig freyliegend die Wirkung der Kraft empfangen hätte, als auch der andere Raum kömmt, wodurch B auch fortgerückt wäre, wenn beyde Körper vor der Wirkung frey geruhet hätten. Die Wirkung in B hat alſo die Länge Bf, wenn ſich die Länge wie der Raum verhält, wodurch ſich der gereizte Körper fortbewegt. Die Intenſität aber, womit B gepreßt wird, iſt in dieſem Falle mit der entgegengeſezten Intenſität gleich, wodurch die Bewegung in A zerſtört wurde. Dieſe leztere Intenſität aber in der Richtung BA hat ihren Effekt in der Zerſtörung dieſer Bewegung erlangt; die andere hat in den Körper B gewirkt. Die Wirkung aber der Kraft in B

verhält ſich wie die Intenſität in die Länge der Wirkung multiplicirt. Welches Verhältnis ſich hier ebenfalls, wie oben, wenigſtens als eine Hypotheſe, um die Erſcheinungen zu erklären, und ihre Uebereinſtimmung zu zeigen, annehmen läßt.

§. 24.
Erzeugung und Zerſtörung der lebendigen Kräfte.

Dieſe Grundſätze von den Wirkungen der bewegenden Kräfte überhaupt, und ihrer Vertheilung in die Maſſen der gegenſeitig auf einander wirkenden Körper vorausgeſezt; laſſet uns nun zu den eigentlich ſogenannten lebendigen wirkenden Kräften kommen, die die Körper, denen ſie beywohnen, beſtändig von einem Ort zum andern fortrücken.

Wir wiſſen aus dem Falle ſchwerer Körper und aus einer unendlichen Menge anderer Erſcheinungen, daß die Bewegung und die von ihr abhängenden lebendigen Kräfte in den Körpern erzeugt werden, wenn ſie von bewegenden nicht lebendigen Kräften beſtändig getrieben, und durch einen gewiſſen Raum von ihnen fortbewegt werden. Die Wirkungen bewegender Kräfte werden alsdenn bewegende Wirkungen, bleiben nicht Preſſungen, und die Kräfte ſelbſt, die die Bewegung hervorbringen, können dann auch, was die Wirkung betrift, lebendige heiſen.

Ein an einem Faden feſt aufgehangener Körper wird von der Schwere unaufhörlich gereizt. Wirkt aber auch die Schwere durch einen unendlichen Zeitraum ſo auf ihn fort; ſo entſteht doch keine Be-

wegung in dem Körper, folglich auch keine lebendige Kraft, wo der Körper nicht durch einen gewiſſen Raum weichen kann. Die Wirkung der Schwere bleibt bloſer Druck, wenn der freyliegende Körper nicht fortrückt.

Aber ſogleich wird eine Bewegung hervorgebracht, wenn der Körper durch irgend einen Raum in der Richtung der Kraft weicht. Demnach muß die **Länge der bewegenden Wirkung auf irgend eine Art von dem Raume abhängen, wodurch der Körper während der Wirkung der bewegenden Kraft geführt wird.**

An der Zeit aber, wodurch die Wirkung der Kraft fortgeſezt wird, kann hier nichts liegen, als nur in ſofern die Größe des Raums, wenn der Körper weicht, auch aus der Zeit der Wirkung erkannt werden kann. Ein Körper, der durch den Fall mit einer gewiſſen Höhe eine Geſchwindigkeit erlangt hat, ſezt ſeine Bewegung in der Horizontallinie fort, und wird beſtändig von der Kraft der Schwere getrieben. Aber die Wirkung der Schwere, wodurch die Geſchwindigkeit im Körper erzeugt wird, hängt auf keine Weiſe von der Zeit der Wirkung ab, wenn ihr der Körper nicht weiter weichen, noch durch einen Raum in der Richtung der Kraft getrieben werden kann.

Von der Schwere iſt es bekannt, daß die Intenſität, womit ſie wirkt, in jedem Punkt des Raums, wodurch ein Körper von ihr bewegt wird, wenigſtens in unſern Gegenden, beſtändig gleichgros und unveränderlich, und in jedem Falle der Maſſe der Körper proportional iſt. Demnach beruht die **Größe der Wirkung dieſer Kraft, wodurch die**

leben-

lebendige Kraft erzeugt wird, auf dieſer beſtändigen Intenſität, und auf dem Raum, oder der Höhe, wodurch der Körper fällt.

Die Wirkung der Schwere, indem der Körper durch eine gegebene Höhe fortbewegt wird, iſt von beſtimmter Größe. Folglich auch ihr Effekt, oder die in dem fallenden Körper erzeugte lebendige Kraft, d. i. ihr Vermögen, andere Körper auſer ſich zu bewegen, iſt nur von einer gewiſſen beſtimmten Größe.

Die durch den Fall des Körpers erzeugte lebendige Kraft wird wieder zerſtört, wenn der Körper gegen ſeine Schwere ſteigt. Iſt der Körper zur Ruhe gebracht, ſo bleibt nichts von ſeinen lebendigen Kräften übrig. Auf ähnliche Art können auch durch die Wirkung anderer Kräfte, z. B. der Feder- und Cohäſionskraft, die Bewegungen der Körper, nebſt den lebendigen Kräften, ſowohl vernichtet als erzeugt werden. So wie ſich aber keine lebendigen Kräfte erezugen, wenn nicht die Körper durch einen gewiſſen Raum von der bewegenden Kraft fortgerückt werden, ſo werden auch keine zerſtört, wenn ſie ſich nicht gegen die wirkende Kraft durch einen gewiſſen Raum bewegen. Der ſteigende Körper verliert ſeine Geſchwindigkeit, ehe er wieder fällt; er bewegt ſich aber während dieſer Zerſtörung durch einen gewiſſen Raum in einer der Richtung der Schwere entgegengeſezten Richtung.

Der zu einer gewiſſen Höhe gelangende Körper kann ſich hernach horizontal bewegen; weil aber dieſe Richtung der Richtung der Schwere nicht entgegengeſezt iſt; ſo kann er auch keine Kraft durch dieſen Reiz verlieren. Der Körper bewegt ſich während

des Steigens nicht in der Richtung der Schwere, ſondern in der entgegengeſezten; daher weicht er der Wirkung nicht, ſondern widerſteht ihr mit ſeiner Bewegung. Aber eben deswegen erlangt er auch keine neue Kraft, ſondern wird derjenigen, die er hat, beraubt.

Auch werden die **lebendigen Kräfte** durch ihre Wirkung in andere Körper, denen ſie Bewegung mittheilen, zerſtört. Wir werden aber hernach ſehen, daß ſie in dieſem Falle, wenn ſie vermindert oder zerſtört werden ſollen, Bewegung in einem andern Körper hervorbringen müſſen. Und forſchen wir der Mittheilungsart der Bewegungen weiter nach, ſo wird es uns wenigſtens als wahrſcheinlich erhellen, daß ſie **niemals unmittelbar aus einem Körper in den andern übergehen**, ſondern allemal durch eine mittlere bewegende, nicht lebendige Kraft, von deren Wirkung ſie in dem einen Körper zerſtöret, in dem andern wieder erregt werden.

Wie dem auch ſey, ſo **ſind die lebendigen Kräfte, was die bewegenden Wirkungen betrift, Kräfte von beſtimmter Größe.** §. 8. Bringen ſie daher Bewegung in andere Körper zuwege, ſo kann ihr ganzer Effekt, d. i. die Summe aller Effekte, die ſie bis zu ihrer Aufreibung zu erzeugen vermögen, nicht größer, oder kleiner, als eine gewiſſe beſtimmte Größe ſeyn. Da aber die **lebendigen** Kräfte ſelbſt Effekte der bewegenden Wirkungen der Kräfte ſind, **von welchen ſie erzeugt werden**, ſo ſind ſie auch **den Wirkungen** dieſer **proportional.**

§. 25.

§. 25.
Wirkungen der lebendigen Kräfte in andere Körper. Stoß.

Bey den Wirkungen lebendiger Kräfte iſt eben ſo, wie bey andern Wirkungen bewegender Kräfte, Intenſität und **Länge der Wirkung vorhanden**, die wohl von einander zu unterſcheiden ſind. §. 6. Hierzu kann noch die dritte Abmeſſung geſezt werden, die doch leichter mit der andern zugleich unter dem Namen der Intenſität begriffen wird. Dieſe Wirkungen laſſen ſich alſo auf ähnliche Art, wie §. 6. durch einen Raum ABCD (Fig. 1.) vorſtellen, wo die Linien AB, NO, CD die Intenſitäten; AF, AN, AC die Längen der Wirkungen andeuten.

Bewegende Wirkungen ſich bewegender **Körper** in andere, **deren Länge unmerklich iſt**; d. i. während welchen die gereizten Körper durch einen kleinern Raum ſich bewegen, als ſich bemerken läßt, heiſen **Stöße**. Wird eine Wirkung von beſtimmter Größe, oder der ſie vorſtellende Raum ABCE, wo die, die Intenſitäten andeutenden Horizontallinien unter ſich gleich ſind, mit einem andern gleichgroßen Raum verglichen, wo ebenfalls die, die Intenſitäten vorſtellenden Linien unter ſich gleich ſind: ſo können die Intenſitäten in der einen dieſer Wirkungen ſich zu den Intenſitäten der andern verhalten, wie endliche Größen zu unendlichkleinen; aber dann wird ſich eben ſo umgekehrt die Länge der leztern Wirkung zu der Länge der erſtern verhalten.

Daher läßt ſich eine bewegende Wirkung von gegebener Größe, womit ein bewegter Körper auf einen andern triſt, und ihm ſeine Bewegung eindrückt,

mit einer gleichen Wirkung der Schwere, oder anderer nicht lebendigen Kräfte vergleichen, wodurch eben dieſe Bewegung in einer gewiſſen Maſſe erzeugt wird. Welche Wirkungen mit einander verglichen, ſich ſo verhalten können, daß die Intenſität der Wirkung, die der bewegte Körper äuſert, ſich verhält zu der Intenſität der Wirkung, wodurch die Schwere Bewegung erzeugt, wie eine endliche Größe zu einer unendlichkleinen, oder wie etwas unendlichgroßes zum endlichen, und dann iſt umgekehrt die Länge der Wirkung der Schwere, oder der Raum, wodurch der Körper in Erlangung der Geſchwindigkeit geführt worden, gegen die Länge der von dem bewegten Körper herrührenden Wirkung, von gleicher Größe, d. i. er verhält ſich eben ſo gegen den Raum, wodurch die lebendige Kraft einen andern Körper führt, indem ſie in ihn wirkt. Der Stoß iſt eine ſolche **Wirkung** eines ſich und einen andern bewegenden Körpers, deſſen **Länge**, wenigſtens phyſiſch, unendlichklein, d. i. unmerklich; die **Intenſität** aber unendlichgros, oder überausgros gegen die Länge nnd Intenſität der Wirkung anderer nicht lebendigen endlichen Kräfte iſt, wodurch lebendige Kräfte in den Körpern erzeugt werden können.

Man drücke eine ganze Wirkung ABCE (Fig. 1.) durch $Aa^2 = S. Pdx$ aus, wenn P die Intenſitäten AB, und $dx = AF$, die Elemente der Länge der Wirkung AC andeutet. Es ſey die andere gleichgroße Wirkung $S. Qdy$, wo wiederum dy das Element der Länge, und Q die Intenſität. So wird ſeyn $P : Q = dy : dx$, und wenn P und Q beſtändig ſind, $P : Q = y : x$. Es ſey in der erſten Wirkung $P = A$, $dx = ada$, und $x = a^2$; in der andern $Q = Aa$, $dy =$ da,

da, und y = a : ſo iſt allgemein A : Aa = a : aa, folglich muß auch im Fall A : Aa = Ao : Aa, ebenfalls ſeyn, Ao : Aa = ao : aa; d. i. wenn P : Q ſich verhält wie das unendlichkleine zum endlichen, ſo werden ſich dy : dx, und y : x eben ſo verhalten.

§. 26.

Bewegende Wirkungen lebendiger Kräfte, die keine Stöße ſind.

Ein Körper, ſo durch ſeine Schwere auf einer geneigten Ebene herunterfällt, wie T, (Fig. 11. Taf. I.) drückt zugleich die Ebene in der Richtung TE, und ſezt ſie, wenn ſie frey liegt, in Bewegung. Dieſe ſeine Wirkung iſt von einerley Beſchaffenheit mit der Wirkung der Schwere, wodurch der Körper ſelbſt getrieben wird: ſie iſt nämlich eine Wirkung einer bewegenden nicht lebendigen Kraft. Hier geſchieht kein Stoß, obgleich ein bewegter Körper einem andern Bewegung beybringt.

Trift ein bewegter Körper A (Fig. 12. Taf. XV.) auf die krumme Oberfläche AFE; ſo wirkt er ſeitwärts in den Körper ABCFA ſo, daß ſeine Wirkung ebenfalls von einerley Beſchaffenheit iſt mit der Wirkung einer nicht lebendigen Kraft. Kann ſich der Widerſtand frey bewegen, ſo empfängt er Bewegung in eben der Richtung, nach welcher er getrieben wird. Wird er aber in ſeiner Stelle unbeweglich erhalten; ſo iſt die Wirkung des bewegten Körpers nur ein anhaltender Druck, oder der dem wirkenden Körper durch den Widerſtand beſtändig erwiedert wird. Und in dieſem Falle geſchieht keine Zerſtörung der Kräfte im Körper; nur die Richtung der Bewegung wird verändert.

Gelangt

Gelangt A zu dem Punkt E, ſo bewegt er ſich von dieſem Punkt in der Richtung EB, die auf die Richtung der Bewegung im Punkte A ſenkrecht iſt. Dieſe Aenderung aber iſt dem Grundſatz §. 21. gemäß. Alle kleinſten Wirkungen, wodurch der Widerſtand vom Körper A gereizt worden, haben auf eben der Seite ihren Effekt gehabt, nach welcher der Körper ſich frey bewegen konnte. Die lebendige Kraft iſt Anfangs gegen AB gerichtet; aber in jedem Punkt der Oberfläche AFE wird ein Element derſelben durch die den Widerſtand haltende Kraft zerſtört, und ein gleiches durch eben den Raum der Bewegung wieder erſezt, deren Richtung auf der Oberfläche ſenkrecht, und der Richtung entgegengeſezt iſt, in der der Körper den Widerſtand reizt.

Entſteht keine Bewegung im Widerſtande, ſo geſchieht auch keine Zerſtörung der lebendigen Kräfte. Betrachten wir aber jenen Reiz des Wiſtandes zum Zurückwirken als einen Effekt der Kräfte im Körper A, die die Wirkung und einen Theil der Kräfte verzehrt, ſo wird doch dieſer Effekt, und der hierzu erforderte Theil der Kräfte etwas unendlich-kleines ſeyn, das mit der ganzen Wirkung nicht verglichen werden kann, wie aus §. 22. folgt. Vergl. was der Verfaſſer Zuſ. III. §. 34. ſagt.

Demnach wirken die lebendigen Kräfte zuweilen wie tode ohne Stoß; die Reizungen aber, die ſie ſo äuſern, ſie mögen nun **Preſſungen** bleiben, oder **bewegende Wirkungen** werden, **hängen,** was ihre Größe betrift, **von der Bewegung der Körper,** d. i. **von der Größe der lebendigen Kraft ab,** die in ihnen vorhanden ſind; mit dieſen vermindern ſie ſich, wenn Bewegung entſteht. Vergl. §. 8.

§. 27.

§. 27.

Lebendige Kraft kann nicht mit dem Druck verglichen werden.

Die lebendige Kraft eines Körpers iſt das Vermögen, eine ganze und beſtimmte Wirkung zu äuſern, wenn ſie nämlich ganz angewandt wird. Sie iſt der bewegenden Wirkung gleich, wodurch ſie erzeugt, und wiederum gänzlich aufgerieben werden kann. Aber die hierzu erforderliche Wirkung der bewegenden Kraft kann von unendlichgroßer Intenſität und unendlichkleiner Länge ſeyn; allemal aber muß ſie eine ganze bewegende Wirkung ſeyn. Nennt man alſo mit den meiſten blos die Intenſität, womit die bewegende Wirkung beginnt, **Druck**, ſo folgt, daß **die lebendige Kraft ſchlechterdings durch keinen Druck zerſtört werden kann.** Iſt dieſer gleich unendlichgros, ſo muß ſich doch der gereizte Körper durch einen gewiſſen Raum, er ſey auch noch ſo klein, bewegen. Bey der Wirkung der Waſſerſäule, wodurch in einem Augenblick dem herausſpringenden Flüßigen Geſchwindigkeit eingedrückt wird, iſt doch eine gewiſſe, wenn gleich ſehr kleine Länge vorhanden. Das aus einer Oefnung flieſende Waſſer wird von der bewegenden Kraft durch einen Raum bewegt, der der Seitendicke des Gefäſes an dieſer Stelle gleich iſt. **Der Druck alſo für die Intenſität der Wirkung genommen, kann eben ſo wenig mit der ganzen Wirkung der lebendigen Kräfte verglichen werden, als eine Linie mit einer Fläche.**

Der Stoß iſt eine bewegende Wirkung von endlicher Größe, deren Länge unendlich klein iſt; die

Inten-

Intenſitát dieſer Wirkung wird, in Vergleichung mit den Wirkungen nicht lebendiger Kráfte, unendlich groß ſeyn. Daher kann keine bewegende nicht lebendige Kraft, die zu Hervorbringung der námlichen Wirkung einen gewiſſen endlichen Raum durchlaufen muß, der Intenſitát eines ſtoßenden Kórpers hinreichend widerſtehen. Kein Gewicht iſt ſo groß, daß es nicht wenigſtens etwas von einem mit endlicher Geſchwindigkeit anlaufenden Kórper gehoben werden kann. Vergl. *Borellus* de vi percuſſionis, Cap. XXXIII. prop. CXIII.

Nimmt man den Druck fúr den Anfang der bewegenden Wirkung, und daher fúr eine gewiſſe Wirkung, die ſowohl ihre Intenſitát als Länge hat, in welchem Sinn wir uns dieſes Worts gemeiniglich bedienen, ſo kann zwar ein Druck dem Stoße hinlánglich widerſtehen; aber die Intenſitát deſſelben muß gegen die Intenſitáten anderer nicht lebendiger Kráfte, z. B. der Schwere, unendlichgros, d. i. es muß eine bewegende Kraft von unendlichgroſſer Intenſitát da ſeyn. So kann ein Gewicht von unendlicher Gróße dem Stoße einer unendlichen Maſſe gleich ſeyn und heiſen.

§. 28.

Wirkung und Gegenwirkung der lebendigen Kráfte beym Zuſammenſtoß der Kórper.

Stößt ein Kórper den andern, ſo nennen wir dieſe Wirkung und Gegenwirkung Zuſammenſtoß. Dasjenige aber, was ich von der Natur des Stoßes geſagt habe, vorausgeſezt, múſſen im úbrigen die gegenſeitigen Wirkungen der lebendigen Kráfte beym Zuſammenſtoß eben den allgemeintn Regeln

geln folgen, die wir oben von den Wirkungen der Kräfte überhaupt erklärt haben. Aus eben den Grundſätzen läßt ſich alſo auch der Grund der Veränderungen angeben, die man beym Zuſammenſtoß bemerkt. Um dieſes zu zeigen, wollen wir die vorkommenden Hauptfälle deutlicher aus einander ſetzen; woraus ſich die übrigen beſondern, die der Verfaſſer unten in ſeinen Vorleſungen erklärt, leicht entwickeln laſſen.

Laſſet uns aber die **Adhäſionskraft**, wodurch die Theile der natürlichen Körper verbunden ſind, und ihren Effekt bey Seite ſetzen. Hierauf wird dann erſt zu ſehen ſeyn, wenn wir die **beſondern Bewegungen der weichen, harten und elaſtiſchen Körper** unterſuchen. Was wir hier für die **Maſſen** der Körper annehmen, ſehen wir als **bloſe Trägheiten** an, in welchen entweder nicht mehrere verſchiedene Theilchen vorhanden; oder ſo feſt mit einander verbunden ſind, daß ſie für eine einzige Maſſe gehalten werden können; wir nehmen die Maſſen **vollkommen hart** an. Gedenkt man ſich die Körper **vollkommen elaſtiſch, ſo müſſen nothwendig die Veränderungen beym Zuſammenſtoß mit jenen einerley ſeyn, wenn ſie vollkommen hart wären.** Denn wird die ganze Veränderung, die von der Adhäſionskraft der Theile entſtehen kann, durch die Federkraft wieder vernichtet, indem ſie die vorige Lage der Theilchen wieder herſtellt, ſo iſt der am Ende der Wirkung übrig bleibende Effekt mit demjenigen einerley, wenn keine ſolche Veränderung darzwiſchen gekommen wäre. Eben ſo wie in Zahlen, wenn eine hinzugethan, und eine gleiche wieder weggenommen wird, die erſte Größe unverändert bleibt.

Kein Wunder alſo, daß die allgemeinen Geſetze der Veränderungen beym Zuſammenſtoß der Körper, mit denjenigen einerley ſind, die wir die elaſtiſchen Körper ſehr genau beobachten ſehen. Daher laſſen ſich die mit Körpern dieſer Gattung angeſtellten Verſuche als Zeugniſſe anwenden, um die Wahrheit der allgemeinen Grundſätze zu beſtätigen.

Laſſet uns hier ferner als Hypotheſe annehmen: erſtlich, daß die lebendigen Kräfte verſchiedener Körper durch die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten zu ſchätzen ſind, welches Maas wir bereits oben §. 12. zu Vereinigung der Erſcheinungen anwandten. Zweytens, daß ſich die Längen der Stöße verhalten, wie die, auch noch ſo kleinen Räume, wodurch ſich die geſtoßenen Körper bewegen, und ihre Intenſitäten wie die Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten, d. i. wie die insgemein ſogenannten Größen der Bewegungen. Wir ſetzen Hypotheſen, deren Wahrheit erſt unten unterſucht werden ſoll, die jedoch ſchon dadurch einige Wahrſcheinlichkeit erhalten, daß ſie die Uebereinſtimmung der Erſcheinungen unter ſich und mit den allgemeinen Grundſätzen ins Licht ſetzen.

§. 29.

Wirkung und Gegenwirkung zweyer ſich bewegender Körper, wenn ſie, mit gleicher Geſchwindigkeit nach einerley Richtung fortrückend, von einer bewegenden Kraft nach entgegengeſezten Seiten gereizt werden.

Alles das, woraus das übrige beſondere in der gegenſeitigen Wirkung ſich bewegender Körper hergeleitet

geleitet wird, läßt ſich auf drey Hauptfälle bringen, die wir, um die Natur des Stoßes überhaupt, und die allgemeinen Regeln der Veränderungen zu zeigen, einzeln aus einander ſetzen wollen. Der erſte iſt dieſer, wo **vermittelſt einer nicht lebendigen Kraft die ſich bewegenden Körper gegenſeitig in einander wirken.** Es ſeyn A und B (Fig. 11. Taf. XV.) zwey mit lebendigen Kräften verſehene Körper, die mit gleicher Geſchwindigkeit in der nämlichen Richtung ABg fortrücken: zwiſchen ihnen befinde ſich eine bewegende, nicht lebendige Kraft, z. B. die geſpannte Feder ACB, die losgelaſſen beyde Körper nach entgegengeſezten Richtungen, B nach Bg, A nach Aa, reizt. Man bezeichne die Maſſen der Körper durch die Buchſtaben A und B; die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit vor der Wirkung ſey c, die Geſchwindigkeit, die in A nach der Wirkung übrig bleibt, x, und die in B nach der Wirkung vorhanden iſt, b. Die Weite der Feder vor der Wirkung ſey AB; nach erfolgter Ausdehnung, und verſchwundner Kraft ab, folglich der Ausdehnungsraum ab — AB.

Dieſer Fall gehört zu der Klaſſe derjenigen, die wir bereits §. 23. im Allgemeinen erklärt haben. Im Körper A, der ſich in der, der Wirkung der Feder ACB entgegengeſezten Richtung ABg bewegt, muß eine Verminderung der Kräfte und der Bewegung erfolgen. §. 23. Zu dieſer Verminderung war eine gleiche oder den verlohrnen Kräften proportionale Wirkung der Kraft nöthig. Dieſe Wirkung muß zugleich mit der ganzen Wirkung der Feder, wo nicht auſer der Zerſtörung der Bewegung in A eine neue rückwärts gegen Aa gerichtete erzeugt worden, in den

Körper B übergegangen ſeyn. Denn A iſt nicht allein ein feſter Widerſtand in Anſehung der bewegenden Kraft und des freyliegenden Körpers B, der durch ſeine Bewegung zurückgehalten wird; ſondern auch ein ſich ſelbſt bewegender, der ſeine ſich ſelbſt haltende Kraft verliert, und durch dieſe zugleich eine Bewegung im Körper B erzeugt.

Man kann ſich ferner die Sache auch ſo vorſtellen. Die Intenſität, womit die Feder in den Körper A wirkte, gleich der, womit ſie zugleich in B wirkte, war damit beſchäftigt, daß ſie die Kraft in A verminderte, oder zerſtörte, (wo ſie nicht auch zugleich eine neue Geſchwindigkeit rückwärts erregte); daher war die in dem andern Körper B erzeugte Wirkung, ein aus der Intenſität der Kraft, womit dieſe den Körper B reizte, entſprungene Wirkung. Zugleich aber muß dieſe Wirkung der Wirkung der ganzen Intenſität der Kraft, und der Wirkung, wodurch die lebendige Kraft in A zerſtört wurde, zuſammen genommen, gleich ſeyn. War alſo ihre Intenſität die Hälfte der ganzen Intenſität der Kraft, ſo muß nothwendig ihre Länge um ſo viel größer geworden ſeyn. Denn es kann aus dieſer Vorſtellungsart nichts anders folgen, als aus der vorigen.

Endlich muß auch dieſes ſtatt haben. Stellen wir uns beyde Körper, während der Wirkung der Kraft ACB, ruhend vor; ſo wäre in beyden freyliegenden eine gewiſſe Geſchwindigkeit, in A gegen Aa, in B gegen Bb, erzeugt worden. Berechnen wir dieſe Geſchwindigkeit in A und B, und verbinden ſie mit der, in A entgegengeſezt, in B übereinſtimmend angenommenen, gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit c; ſo müſſen wir nothwendig daraus die Geſchwindigkeit,

nach

nach der Wirkung, ſowohl in A, als in B, bekommen. Laßt uns jezt ſehen, wie alles dieſes mit einander übereinſtimmt.

Es ſeyn die Körper A und B vor der Wirkung in den Punkten A und B, (Fig. 11. Taf. XV.) nach geendigter Wirkung ſey A im Punkte B; ſo iſt AB der Raum, wodurch er während der Wirkung geführt worden. Es ſey Bg = der Weite der ausgedehnten Feder ab, ſo wird B nach der Wirkung im Punkte g ſeyn, und Bg iſt der Raum, wodurch er unter der Wirkung fortgerückt iſt. Es ſeyn Aa und Bb die Räume, wodurch ſich die ruhig freyliegenden von der Kraft ACB gereizten Körper bewegt hätten; ſo wird ſeyn die Länge der Wirkung in B, oder Bg = Aa + AB + Bb = ab.

Die Geſchwindigkeit in A nach der Wirkung iſt x, folglich die Verminderung der Geſchwindigkeit c — x; in B iſt die Geſchwindigkeit nach der Wirkung b, vor der Wirkung c; alſo ihr Wachsthum b — c, und wegen der auf beyden Seiten gleichen Größe der Intenſität (§. 12.) iſt A (c — x) = B (b — c).

Die Wirkung in den Körper A iſt gleich der Verminderung der Kräfte A ($c^2 - x^2$); die Wirkung der Kraft zu Hervorbringung der Geſchwindigkeit c — x in A, iſt A $(c - x)^2$; und die Wirkung zu Erzeugung der Geſchwindigkeit b — c im ruhenden B, iſt B $(b - c)^2$. Demnach iſt die Summe der in B ererzeugten Wirkungen, A ($c^2 - x^2$) + A $(c - x)^2$ + B $(b - c)^2$, addirt man hierzu Bcc, ſo erhält man die Summe der Kräfte in B nach der Wirkung.

Die Länge der Wirkung, die in B durch die Wirkung erzeugt wird, iſt die ganze Wirkung durch

die Intenſität dividirt. Die Intenſität aber iſt $A(c-x)=B(b-c)$, vergl. §. 12. und die Vorausſetzung §. 28. Daher iſt die Länge der Wirkung

$$\frac{A(c^2-x^2)}{A(c-x)} + \frac{A(c-x)^2}{A(c-x)} + \frac{B(b-c)^2}{B(b-c)} = c+x$$

$+c-x+b-c = 2c+b-c$. Und die ganze Wirkung, oder die Vermehrung der lebendigen Kräfte in $B=(2c+b-c)\,B(b-c)=A(c^2-x^2)+A(c-x)^2+B(b-c)^2$. Folglich iſt die Summe der Kräfte in B nach der Wirkung $Bc^2+B(2c(b-c)+(b-c)^2)=B(c^2+2c(b-c)+(b-c)^2=B(c+b-c)^2=Bb^2$.

Wenn $B=A$, ſo iſt $c-x=b-c$, und $2c=b+x$, und wenn $x=0$, oder wenn A zur Ruhe gekommen; ſo wird $b=2c$, d. i. die Geſchwindigkeit c in A iſt ganz in den Körper B übergegangen, wie dieſes beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper erfolgt, wodurch unſere Schlüſſe §. 28. beſtätigt werden.

§. 30.

Wenn ein ſich bewegender Körper auf einen unbeweglichen Widerſtand trift.

Trift der Körper C (Fig. 13. Taf. XV.) in ſeiner Bewegung gegen Cd auf den unbeweglichen Widerſtand AB, man mag ſich hierbey Federkraft gedenken oder nicht, ſo kann nichts weiter daraus entſtehen, als Zurückſpringen vom Widerſtand gegen CE, aber kein Verluſt an Geſchwindigkeit und Kräften. Dieſes erhellet unmittelbar aus den Grundſätzen. §. 17. 22. Denn die lebendige Kraft

des Körpers C iſt eine bewegende Kraft von beſtimm̃ter Größe, die auf der einen Seite einen unbeweglichen Widerſtand, auf der andern einen freyliegenden Körper findet. Es wird daher eine Bewegung und Effekt nach derjenigen Seite erzeugt, nach welcher ſich der Körper frey bewegen kann.

Da ſich aber einige die Sache anders vorzuſtellen pflegen, ſo will ich die Schlüſſe, worauf ihre Vorſtellungen führen, entwickeln.

Stellt man ſich vor, daß der im Punkte F anlaufende Körper C ſeine Geſchwindigkeit allmählig verliert, indem er ſich durch einen ſehr kleinen Raum bewegt; ſo muß man nothwendig auch zugeben, daß durch eben die Kraft durch den kleinen Raum, durch welchen die lebendige Kraft zerſtört wird, ſelbige auch wieder erweckt und erſtattet werden kann. Daher wird die den Widerſtand haltende Kraft die ganze erloſchene Kraft in der entgegengeſezten Richtung nach §. 22. wieder erſetzen; ſie wirkt wie ein elaſtiſcher Körper; und wenn wir auf ſolche Wirkungen, die in der Natur wirklich vorkommen, und nicht der Theorie wegen erſonnen werden, zurückſehen, ſo iſt es ausgemacht, daß alle auf dieſe Art vollbracht werden, wo nicht aus Mangel der Federkraft ein Theil der zu Veränderung der Lage der Theile angewandten Kräfte, von der Cohäſionskraft vernichtet wird. Es ſey aber alsdenn ſowohl der anlaufende Körper C, als der Widerſtand AB vollkommen hart; ſo muß doch nothwendig der Körper C, ſobald er zur Berührung im Punkt F gelangte, zur Ruhe gebracht und ſeiner ganzen lebendigen Kraft beraubt werden. Hier geſchah alſo ein Stoß, deſſen Intenſität unendlich groß, die Länge aber nichts

 war.

war. Daher wirkte die Intenſität wie ein unendlichgroßer Druck auf den Widerſtand, und reizte ſeine haltende Kraft zu gleichem Reiz. Daher im Augenblick des Zuſammenſtoßes zwo unendlichgroße und entgegengeſezte Reizungen im Punkte F; in Anſehung deren die Maſſe des Körpers C, aller lebendigen Kraft beraubt, freyliegend angenommen worden. Daher muß auch nothwendig nach dem Grundſatz §. 22. der Reiz des zurückwirkenden Widerſtandes in die freyliegende Maſſe C übergehen.

Zwar ſcheint die Sache für ſich betrachtet ſich anders vorſtellen zu laſſen. Wie, wenn die lebendige Kraft des anlaufenden Körpers C eine gleiche Gegenwirkung des Widerſtands AB erregt; ſollte nicht daher in der Maſſe C ſelbſt ein Gleichgewicht und gegenſeitige Zerſtörung dieſer Reizungen erfolgen? Allein, zu geſchweigen, daß dieſes der Analogie der Natur und den Grundſätzen §. 15. 17. 22. widerſtreitet, ſo wird auch, wenn wir die Sache in dieſer Vorſtellung aufmerkſamer betrachten, der Effekt einer und derſelben Wirkung verdoppelt. Die lebendige Kraft im Körper C erregt erſtlich die gleiche Gegenwirkung des Widerſtands; hernach muß eben dieſelbe der Gegenwirkung des Widerſtands in die Maſſe C hinreichend widerſtehen, und die von der leztern entſtehende Bewegung verhindern. Welches nicht geſchehen kann, wo ſie nicht gleich der Schwere, oder einer, ihre unbeſtimmte Wirkung ſtets wiederholenden Kraft wirkt. Vergl. §. 22. Hat der Stoß des Körpers nur ein Beſtreben zur Bewegung im Widerſtande erregt, ſo hat er ſeinen ganzen Effekt ſchon erreicht, und vermag nicht weiter zu wirken; denn die lebendige Kraft gehört zu den zerſtörbaren

Kräf-

Kräften, und ihre Reizungen reiben ſich auf, indem ſie gleiche Reizungen in andern Körpern erzeuger. Folglich geht dieſe Wirkung im Körper C verlore.. Aber die zurückwirkende Kraft des Widerſtands iſt gereizt worden, und dann iſt nichts im Körper C übrig, das ſeine Maſſe hindern könnte, die bewegende Wirkung dieſer Kraft zu empfangen.

Erſtlich, damit wir in der Abfertigung eines falſchen Begriffs nicht auf halbem Wege ſtehen bleiben, laſſet uns annehmen, der anlaufende Körper C gebe ſeine halbe Kraft an den Widerſtand ab, und errege dadurch deſſen gleiche Gegenwirkung; aus welcher, da ſie dem übrigen gleichen Theil der Kraft in C entgegengeſezt iſt, gegenſeitiges Gleichgewicht und Ruhe in C entſtehen ſollte. Ich ſage aber, dieſes kann nicht ſtatt haben, weil, wenn der Körper C zur Ruhe gebracht worden, ſeine ganze lebendige Kraft vernichtet iſt. Sie muß alſo ganz übergegangen, und der Körper hierauf in Rückſicht der, zwiſchen dem Körper und dem Widerſtand, auf irgend eine Art eintretenden, bewegenden Kraft freyliegend geweſen ſeyn. Hieraus folgt wiederum, daß der Körper C die ganze Wirkung nach der entgegengeſezten Seite CE empfangen muß. §. 22. Aber weg mit dieſen Hypotheſen, da wir in unſern Begriffen von der Art und Weiſe, wie die Erſcheinungen erfolgen, keiner andern Richtſchnur als der Analogie der Erfahrung folgen dürfen, die durch allgemeine aus den Erſcheinungen abgezogene Grundſätze zu beſtimmen iſt.

Aus dieſem Fall aber ſieht man unmittelbar, was beym Zuſammenſtoß zweyer gleichen und mit gleicher Geſchwindigkeit gerade gegen einander

laufenden Körper erfolgen muß. Beyde werden nämlich in entgegengeſezter Richtung mit der nämlichen Geſchwindigkeit zurückſpringen Denn jeder iſt während der gegenſeitigen Wirkung gegen den andern ein feſter Widerſtand. Daher wird A ſeine lebendige Kraft anwenden, um in B Bewegung hervorzubringen, B aber wird in A wirken, und dieſem ſeine lebendige Kraft eindrücken.

§. 31.

Wenn ein ſich bewegender Körper auf einen ruhenden freyliegenden trift.

Endlich wollen wir auch den dritten Fall aus den oben angenommenen Grundſätzen erklären. Es treffe nämlich ein ſich bewegender Körper A (Fig. 7.) auf den ruhenden, doch freyliegenden Körper B; was für Veränderung muß in beyder Bewegung und Kräften, den Geſetzen der Vertheilung der Kräfte in der Wirkung und Gegenwirkung gemäs, entſtehen? Hier müſſen wir aber blos beym Allgemeinen ſtehen bleiben; in der Folge wird es Gelegenheit geben, die Wirkungs- und Gegenwirkungsart insbeſondere deutlich zu erklären. Die Maſſe der Körper A und B werde durch die Buchſtaben A und B angedeutet; die Geſchwindigkeit des Körpers A vor dem Stoß ſey a, und ſeine lebendige Kraft Aa^2. Nach der Wirkung finde ſich in A die Geſchwindigkeit x, in B die Geſchwindigkeit b. So wird die Verminderung in A ſeyn $A(a^2-x^2)$; die neuen in B erzeugten Kräfte aber ſind Bb^2.

Auf was für Art aber A in B wirkt; ſo iſt die Intenſität der beyderſeitigen Wirkung, wodurch die Kräfte in A zerſtört, und in B erzeugt werden, gleich.

gleich. §. 12. Und weil die Kraft in A zerſtörbar iſt, ſo wird die Größe der Bewegung, in der Richtung der Bewegung genommen, die in dem einen Körper verloren geht, in dem andern B wiederum erzeugt.

Ferner iſt auch die Länge der Wirkung einerley, oder der Raum, wodurch beyde Körper, während dem Stoß, von der bewegenden Kraft fortbewegt werden, iſt in beyden einerley. Denn die Körper müſſen einander immer zunächſt berührt haben. Da alſo Intenſität und Länge in der Wirkung und Gegenwirkung einerley ſind, ſo iſt auch die Wirkung, von welcher die Zerſtörung der Kräfte in A abhängt, mit derjenigen, ſo in B neue Kräfte hervorbringt, gleichgros, daher auch die Effekte beyder Wirkungen gleichgros. Demnach iſt $A(a^2-x^2) = Bb^2$. Aber die Intenſität der Wirkung in A verhält ſich überall wie $A(a-x)$; in B, wie Bb. Daher auch $A(a-x) = Bb$. Folglich die Länge der Wirkung in A, wie $\frac{A(a^2-x^2)}{A(a-x)} = a+x$; in B, wie $\frac{Bbb}{Bb} = b$. Daher $a+x = b$; $A(a-x) = B(a+x)$ und $x = \frac{Aa-BA}{A+B}$. Welches vollkommen mit der Erfahrung übereinſtimmt. Vergl. unten Vorl. XVII, §. 297. Iſt $A = B$, ſo wird die in A übrig gebliebene Geſchwindigkeit $x = 0$; iſt $B > A$, ſo wird die Geſchwindigkeit in A verneint,

d. i. der anlaufende Körper ſpringt mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit in der entgegengeſezten Richtung zurück.

§. 32.
Erhaltung der lebendigen Kräfte.

Beym Stoße der Körper kann, wenn wir die Cohäſionskräfte der Theile nebſt den andern Kräften bey Seite ſetzen, keine Zerſtörung der Kräfte vorgehen. Wir finden auch nichts davon beym Zuſammenlaufe elaſtiſcher Körper, wo die Anfangs zerſtörten Kräfte durch die Wirkung der im erſten Augenblick zuſammengedrückten Federn wieder hergeſtellt werden. Mit Recht aber läßt ſich aus dem Erfolg bey elaſtiſchen Körpern ſchlieſen, daß eben dieſes bey jedem Zuſammenſtoß der Körper ſtatt findet, wenn gar keine Zuſammendrückung möglich wäre. Denn werden beym Zuſammenſtoß vollkommen harter Körper, oder Körper überhaupt, die Cohäſionskraft bey Seite geſezt, die lebendigen Kräfte vermindert; ſo muß eben dieſes auch beym Zuſammenſtoße elaſtiſcher erfolgen. Denn was hierbey von den Federkräften wieder erſezt wird, kann nicht größer ſeyn, als das, was auf die Zuſammendrückung der Federn verwendet worden. Gieng alſo auſer dieſem Theil der Kräfte noch ein anderer durch die bloſe Mittheilung der Kräfte an einem andern Körper verloren, ſo könnte dieſer verloren gegangene Theil durch die Wirkung der Federkraft nicht wieder erſezt werden. Daher müßte überall, auch beym Zuſammenſtoß vollkommen elaſtiſcher Körper, einige Veränderung wahrzunehmen ſeyn, welches ſich doch anders verhält.

Daß

Daß keine Kräfte beym bloſen Zuſammenſtoß verloren gehen, ſchließt s'Graveſand (Phyſ. Elem. math. Lib. IV. Cap. 2.) auch daraus, daß er in allen Verſuchen, die er über die Größe der beym Zuſammenſtoß weicher Körper zerſtörten Kräfte anſtellte, eine ſolche Eindrückung der Theile fand, die als der ganze Effekt der verlohrnen Kräfte anzuſehen war. Alſo konnte durch den bloſen Uebergang der Kräfte aus einer Maſſe in die andere nichts zerſtört worden ſeyn.

Demnach erhalten ſich die lebendigen Kräfte in der gegenſeitigen Wirkung der Körper, wo nicht die zuſammenhängende Kraft der Theile, oder andere Kräfte im Wege ſtehen. Die Größe der lebendigen Kräfte wird alſo vor und nach dem Zuſammenſtoß einerley ſeyn. Man nimmt aber die Bedingung an, daß dieſe Größe bey jedem Körper aus dem Produkt der Maſſe in das Quadrat der Geſchwindigkeit zu ſchätzen ſey.

Da keine lebendige Kraft beym Zuſammenſtoß zweyer Körper verlohren geht, ſo können auch beyde Körper nach der gegenſeitigen Wirkung nicht mit gleicher Geſchwindigkeit nach einerley Richtung fortgehen, wenn der eine vor dem Anlauf des andern ruhte. Denn es bleibt die nämliche reſpektive Geſchwindigkeit nach dem Stoß, die vorher war, wie ſolches von dem Verfaſſer unten erwieſen wird, und auch aus den bisherigen Gründen ſich leicht herleiten läßt. **Daher entſteht bey jedem Zuſammenſtoß in den Körpern ein Beſtreben, ſich von einander zu entfernen.** Sie können alſo nicht mit gemeinſchaftlicher Geſchwindigkeit nach einerley Seite fortlaufen, noch verneint bleiben, wo nicht eine Cohäſions-

häſionskraft hinzukommt, die die reſpektive Geſchwindigkeit der Theile und die davon abhängende lebendige Kraft hemmt, und einen Theil derſelben vernichtet.

Hieraus ſcheint eine neue Schwierigkeit zu entſpringen, die ſich der **Erhaltung** der lebendigen Kräfte auch beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper entgegenſezt.

Denn läuft A (Fig. 7. n. 2.) gegen B, und ſtößt das Theilchen b dieſes Körpers B; ſo muß die in dieſes Theilchen übergetragene lebendige Kraft durch die ganze Maſſe des Körpers B vertheilt werden, damit allen ihren Theilen gleiche Geſchwindigkeit beygebracht wird. Welches doch ohne Zerſtörung eines Theils der lebendigen Kräfte nicht wird geſchehen können. Es ſcheint alſo, wo nicht im Augenblick des Zuſammenſtoßes ſelbſt, doch nachher eine Verminderung der Kräfte erfolgen zu müſſen. Dieſem Zweifel wird aber begegnet, wenn wir zweyerley Fälle unterſcheiden, einmal, wo die Theilchen der Körper vereinigt auf einander wirken; zweytens, wo die Wirkung und Gegenwirkung zwiſchen nicht zuſammenhängenden Körpern geſchieht. Denn iſt dem Theilchen b des Körpers B, von dem ſtoßenden A, eine gewiſſe Kraft und Geſchwindigkeit eingedrückt worden; ſo wird dieſe allerdings, indem ſie ſich den übrigen Theilchen des Körpers B mittheilt, durch die Cohäſionskraft vermindert, und in dem Augenblicke ſelbſt werden die in dem Körper B vorhandenen Springfedern zuſammengedrückt. Aber durch die hierauf folgende Wiederherſtellung der Springfedern wird die verlohrne Kraft wieder erſezt, und zwar noch während dem Zuſammenſtoß des Körpers B mit A. Folglich wirkt

wirkt die zerſtörte lebendige Kraft, indem ſie wieder hergeſtellt wird, von neuem in A, und es entſteht der erwartete Effekt. Die Federkraft hat nämlich in der Maſſe B nichts bewirkt, als daß die Wirkung in das Theilchen b, zugleich eine Wirkung in die ganze Maſſe wurde. Und es iſt einerley, ob wir uns einmal b durch den Stoß des Körpers A allein, und hernach vermittelſt dieſem auch die übrigen Theilchen in B in Bewegung geſezt denken; oder ob wir die ganze Maſſe B als Eine Materie anſehen, deren Theile wegen ihren Zuſammenhang anders nicht, als alle zugleich, eben ſo, wie eine einzige Maſſe, gereizt werden können. In den von B abgeſonderten Körper A aber wirkte zugleich die Federkraft; daher geſchah nicht zwiſchen den Theilchen des Körpers B, ſondern zwiſchen der Maſſe B und A eine ſolche Vertheilung der Kräfte, daß die Größe nach der Wirkung eben wie vorher war.

Anders verhält ſich die Sache, wenn man annimmt, irgend eines von den verſchiedenen zuſammenhängenden Theilchen des Körpers B, z. B. b, habe durch die Wirkung einer Kraft, auf die es hernach nicht zurückwirken konnte, eine gewiſſe Gewalt bekommen. Dieſe dem Theilchen b anhängende lebendige Kraft, die, wenn die Cohäſionskraft der Theile gereizt wird, ſich durch die ganze Maſſe der zuſammenhängenden Theilchen ausbreitet, muß gewiß zum Theil zerſtört werden, wenn allen Theilchen eben dieſelbe gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit mitgetheilt werden ſollte. Ein ſolcher Effekt der Kräfte aber, womit die Theilchen unter ſich zuſammenhängen, iſt bey vollkommener Federkraft nicht zu erwarten. Vielmehr muß ſich die Bewegung von dem

einen

einen Theilchen b zu dem andern auf die Art fortpflanzen, wie dieſes beym Zuſammenſtoß zweyer abgeſonderter Körper geſchieht; und wenn im Anfange eine Zerſtörung von Kräften vorgeht, dieſe doch hernach wieder erweckt werden. **Daher wird eine beſtändige Annäherung und Entfernung der Theile von einander, gleich der Schwungbewegung, vorhanden ſeyn,** ſo daß niemals in allen zugleich die nämliche gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit wahrgenommen wird. Doch hindert dieſes nicht, daß der **Mittelpunkt der ganzen Maſſe,** oder des Körperſyſtems während dieſem beſtändigen Zuſammenſtoß der Theile, ſich nicht mit gleichförmiger und ſtets gleicher Geſchwindigkeit bewegt. In dieſem Fall wird nämlich eben das erfolgen, was beym Zuſammenſtoß mehrerer abgeſonderter Körper ſtatt findet, zwiſchen welchen es eine beſtändige Wirkung und Gegenwirkung, oder einen immer wiederholten Stoß giebt. **Denn in einem ſolchen Syſtem wird nie eine gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit aller Theile, die Größe der lebendigen Kräfte aber einerley ſeyn.**

Die Zerſtörung der Kräfte hat allgemein ihren Grund in der zuſammenhängenden, oder zurückſtoßenden Kraft; wovon jene die Theile, die ſich von einander zu entfernen beſtreben, dieſe die einander ſich nähernden, zurückhält und hindert. **Keine den Theilchen anhängende bewegende Kraft aber kann eine lebendige Kraft zerſtören, wo nicht Bewegung erfolgt.** Daher gelangen wir zu einem allgemeinen Grundſatz, woraus ſich beurtheilen läßt, in welchem Körperſyſtem, oder Maſſe, Zerſtörung der Kräfte wahrzunehmen iſt oder nicht. **Denn wo**

das

das Ganze zuſammengedrückt, oder ausgedehnt, oder ſeine Theile näher an einander gebracht, oder weiter aus einander gerückt werden, und ſich in ihre vorige Lage nicht wieder verſetzen können, daſelbſt wird die Größe der Kräfte vermindert; hingegen aber, wo keine Zuſammendrückung, oder Ausdehnung geſchehen kann, oder wo auf die geſchehene ſtets Rückkehr zur erſten Lage folgt, daſelbſt werden auch keine lebendigen Kräfte durch die gegenſeitigen Wirkungen und Gegenwirkungen zerſtört. Demnach muß in Flüßigkeiten, die ſich nicht zuſammendrücken laſſen, oder die vollkommen elaſtiſch ſind; wo entweder keine Veränderung in der Weite, worinn die Theile bey einander liegen, entſteht, oder, wenn ſie geſchehen iſt, von einer bewegenden Kraft wieder aufgehoben wird, beſtändig einerley Größe lebendiger Kräfte erhalten werden, was auch für eine Verſetzung der einzelnen Theile vorgehen mag. Hier iſt alſo der Grund, warum in der Hydraulik der Satz von Erhaltung der lebendigen Kräfte ſicher, und als allgemein angewendet werden kann, wo nicht zugleich andere, ihm entgegenſtehende Bedingungen angenommen werden.

§. 33.

Erhaltung der Größe der Bewegung nach einerley Richtung, auch bey Zerſtörung der Kräfte.

Werden die lebendigen Kräfte in freyliegenden Körpern zerſtört; ſo kann doch die Gleichheit der Größe der nach einer Seite erzeugten und nach der entgegengeſezten zerſtörten Bewegung nicht

nicht verändert werden. Ueberall bleibt dieſelbe Bewegung des Schwerpunkts, oder dieſelbe Richtungsgröße der Bewegung. Die Größe der in jedem Körper beſonders betrachteten Bewegung wird zwar beym Zuſammenſtoß harter und elaſtiſcher Körper vermindert und vermehrt. Vorl. XVII. §. 302. 303. aber die Größe der Bewegung nach einerley Seite bleibt überall, nach Abzug der Bewegungen nach gegenſeitigen Richtungen, dieſelbe. Vergl. §. 14.

Denn ſetzet, die Feder BCA (Fig. 2.) werde durch den Anlauf des Körpers B zuſammengedrückt; ſo kann dieſe Zuſammendrückung nicht ohne Widerſtand der Feder ſelbſt geſchehen. Daher wirkt der Körper B mit einer gewiſſen Intenſität gegen die Feder, und dieſe muß mit gleicher Intenſität gegen B zurückwirken, folglich widerſtehen. Demnach iſt eben die Intenſität, womit die Feder gegen B wirkt, auch auf der andern Seite gegen den Körper A, als einen Widerſtand, vorhanden. §. 12. 15. B liegt aber frey und wird durch gleiche Zeit der Wirkung gereizt. Daher wird eben die Größe der Bewegung in A erzeugt, die in B in der Richtung AE oder BA zerſtört wird. §. 12. Folglich bleibt die Größe der Bewegung nach der Seite BA unveränderlich. Die Längen der Wirkungen ſind zwar auf beyden entgegengeſezten Seiten nicht einerley, aber doch wirken zu gleicher Zeit gleiche Intenſitäten.

Dieſer Satz von der unveränderlichen Größe der Bewegung nach einerley Seite, erſtreckt ſich alſo darinnen weiter, als der Satz von Erhaltung der lebendigen Kräfte, da er bey einer jeden freyen Bewegung, und auch in denjenigen Fällen vorkommt,

wo

wo durch die Cohäſionskraft ein Theil der Kräfte zerſtört wird. Daher iſt auch ſein Nutzen in Beſtimmung der Geſetze des Zuſammenſtoßes ausgebreiteter, wenn die zuſammenſtoßenden Körper freyliegend angenommen werden. Dagegen aber iſt er darinn von eingeſchränktern Umfange, daß er auf Erſcheinungen, wo bewegte Körper auf unbewegliche Widerſtände treffen, nicht angewendet werden kann. Denn hier wird, indem der Widerſtand unbeweglich bleibt, in dem freyliegenden Körper eine neue Bewegung nach der einen Seite, die vorher nicht da war, erzeugt; §. 21. und dagegen die vor dem Zuſammenſtoß vorhandene Bewegung in der gegenſeitigen Richtung aufgehoben. §. 29. Doch bleibt hier dieſelbe Summe lebendiger Kräfte. Hier werden aber andere Veränderungen, die aus der Wirkung des Körpers in den Widerſtand, in dieſem, oder in andern ihm zunächſt liegenden Körpern, entſtehen, beyſeite geſezt. Denn man nimmt den Widerſtand feſt und ganz unbeweglich an. Betrachten wir aber die Sache, wie ſie wirklich iſt, ſo finden wir allerdings in dieſen Fällen eine, dem Grundſatze von gleicher Größe der Bewegung nach einerley Seite gemäße, gegenſeitige Wirkung. Denn der Widerſtand leidet, während der Wirkung der Kraft, einen Druck von ſolcher Intenſität, daß dadurch in einem freyliegenden Körper eine Bewegung erzeugt werden könnte, deren Größe der nach der entgegengeſezten Seite hervorgebrachten Bewegung gleich iſt. Der Widerſtand wird aber durch den Zuſammenhang mit andern Körpern gehalten. Daher muß er nothwendig in eben dem Augenblick, da er von der einen Seite gereizt wird, auch nach der

andern in die anliegenden Körper wirken, und in dieſen, wenn ſie frey liegen, Bewegung, oder Zerſtörung einer andern Bewegung, oder, wenn dieſe Körper gleichfalls gehalten werden, Beſtreben zu gleicher Bewegung bewirken. Betrachtet man daher den Widerſtand ſelbſt, nebſt allen verknüpften Körpern, von der einen Seite der bewegenden Kraft als einen freyliegenden Körper von unendlichgroßer Maſſe, und ſieht zugleich auf deſſen Bewegung zurück; ſo läßt ſich allerdings richtig behaupten, daß die Größe der nach beyden entgegengeſezten Seiten von der bewegenden Kraft erzeugten Bewegung einerley ſey. Denn die Lage oder die Bewegung des Schwerpunkts dieſer ganzen Maſſe, und des von der bewegenden Kraft gereizten freyliegenden Körpers, kann auf keine Weiſe durch die Wirkung dieſer Theile geändert werden. Eben ſo kann man auch ſagen, daß in dem Fall, wo ein, auf eine unbewegliche Fläche anlaufender Körper mit gleicher Geſchwindigkeit zurückſpringt, in dem Widerſtande oder den von der andern Seite anliegenden Körpern eine Bewegung hervorgebracht oder auch zerſtört wird, die derjenigen gleich iſt, womit der Körper auf die Fläche ſtößt, und die er im Zurückſpringen in der gegenſeitigen Richtung zurückhält oder empfängt.

Der Grundſatz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte hat beym Zuſammenſtoß weicher Körper nicht ſtatt, wenn dieſe von allen übrigen abgeſondert gedacht werden. Läßt ſich aber daraus ſicher ſchlieſen, daß allerdings lebendige Kräfte zerſtört werden, und aus der Körperwelt verlohren gehen, da ſie in einem Theile derſelben verlohren gegan-

gen

gen ſind? Will man daraus, daß von dem im Feuer verbrannten Holz viele körperliche Theile davon gegangen ſind, ſchlieſen, daß ſelbige auch aus der Reihe vorhandener Dinge verſchwunden ſind? Denn es iſt ſehr wahrſcheinlich, daß keine bewegende, Cohäſions- und Federkraft in einem Theile der Natur überwältigt und zerſtört wird, die nicht eine andere zur Wirkſamkeit reizt, oder ihre Wirkung vermehrt und verſtärkt. Keine Ausdehnung in einem Theile geſchieht ohne gleiche Zuſammendrückung in einem andern; noch umgekehrt, Zuſammendrückung in einem Körper ohne gleiche Ausdehnung in einem andern.

§. 34.

Grundſatz des Stätigen in der Wirkung körperlicher Kräfte.

Die gegen die Schwere aufſteigenden Körper werden allmählig ihrer Bewegung und Kräfte beraubt, ſo wie ſie ſelbige durch den Fall erlangen. Daß eben ſo in den übrigen Fällen, wo Bewegungen von bewegenden nicht lebendigen Kräften erzeugt und zerſtört werden, der Uebergang von der Bewegung zur Ruhe, und von der Ruhe zur Bewegung nach einerley Geſetz des Stätigen nach und nach und ſtufenweiſe erfolgt, läßt ſich theils aus den Erſcheinungen ſelbſt augenſcheinlich erweiſen, theils aus andern Gründen ſchlieſen, überall aber als wahrſcheinlich annehmen. Laſſet uns dieſes Geſetz, ſoweit es zur allgemeinen Weltkunde gehört, und ſeine von den größten Männern behauptete Allgemeinheit beyſeite ſetzen. Schränken wir ſeinen Umfang auf die Naturlehre ein, und wenden es auf die Er-

zeugungen und Zerſtörungen der Kräfte und Bewegungen an, ſo finden wir den allgemeinen Grundſatz: in keinem Körper enſteht eine endliche Veränderung der Geſchwindigkeit und Bewegung, die nicht nach und nach durch kleinere, und phyſiſch unendlichkleine, unbeſtimmbare Grade erzeugt werden, durch eine ſolche Menge von Beobachtungen und Erfahrungen, ſowohl unmittelbar, als durch daraus hergeleitete leichte und natürliche Vernunftſchlüſſe, in jedem Augenblick beſtätigt, daß ich keinen Grundſatz weiß, ſelbſt Newtons erſtes Geſetz von der Beharrung des Körpers in ſeinem Zuſtand der Bewegung oder Ruhe nicht ausgenommen, von deſſen Wahrheit wir ſtärker überzeugt ſeyn können. Daher er auch, wegen einiger Schwierigkeiten, oder weil er in dieſem oder jenem Falle beym erſten Anblick nicht ſtatt zu haben ſcheint, nicht ſogleich zu verwerfen iſt. Denn ehe der Verſtand von einem ſolchen aus Empfindung geſchöpften, und durch Vernunft beſtätigten Grundſatz abgeht, muß er vielmehr vorher alle Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen ſuchen, und ihn nicht, als nur durch die offenbare Deutlichkeit der Gegengründe gezwungen fahren laſſen.

Allein, ſagen einige, dieſes kann beym Zuſammenſtoß der Körper ſchlechterdings nicht ſtatt haben. Welches ſchon zu ſeiner Zeit **Borellus**, *) und neuerdings **Beguelin** **) zu erweiſen ſuchten. Läuft ein harter Körper gegen einen andern ruhenden gleicher Art, ſo muß dieſer leztere zugleich in eben dem Augen-

*) De vi percuſſionis, Cap. VII.

**) Memoires de l'Académie de Berlin, An. 1761.

genblicke, da er von dem anlaufenden geſtoßen wird, von dem Zuſtand der Ruhe zu dem Zuſtand der Bewegung übergehen: Denn er muß mit gleicher Geſchwindigkeit fortrücken, womit ihn der anſtoßende während der Wirkung fortſtößt. Es ſeyn beyde Körper elaſtiſch, und die Bewegung, zwar nicht in der ganzen Maſſe, aber doch in einem Theile, demjenigen nämlich, der unmittelbar von dem anlaufenden getroffen wird, ſo ſcheint ſie im Augenblick zu entſtehen. Denn es wird wenigſtens dieſer Theil in eben dem Augenblick mit gleicher Geſchwindigkeit von dem anlaufenden mit fortgeriſſen.

Dieſe Schwierigkeiten aber, die auch dem **Gaſſendi** Nachdenken erregten, ſcheinen mir nicht von ſo großem Gewicht zu ſeyn. Ich geſtehe: wenn wir uns in einem Körper nichts als die bloſe Materie denken; wenn wir uns Berührung und Zuſammenſtoß nach jenen blos **geometriſchen** Begriffen vorſtellen; **wenn wir unmittelbar Trägheit an Trägheit bringen**, und einander Bewegung und Geſchwindigkeit eindrücken laſſen, ſo haben dieſe Einwürfe ihre Richtigkeit; woher wiſſen wir aber, ob nach dieſen durch die Sinne erlangten unvollkommenen und undeutlichen Begriffen von der Art und Weiſe des Zuſammenſtoßes das, was in der Natur vorgeht, wenigſtens hier zu beurtheilen iſt. **Newton**, indem er aus ſeinen Verſuchen Schlüſſe zieht, zeigt, daß das Licht von der Spiegelfläche nicht, wie man insgemein glaubte, als ein von der Wand zurückſpringender Federball zurückgeworfen werden könne; er ſchloß vielmehr, es müſſe in der zurückwerfenden Fläche eine anziehende und zurückſtoßende Kraft vorhanden ſeyn, die in den Lichtſtral vor ſeiner Berührung

mit der Fläche wirkt. Kann nicht etwas ähnliches bey jedem Zuſammenſtoße der Körper ſtatt finden? Vergleichen wir die verſchiedenen Verſuche mit einander, ſo ſcheint es mir auſer Zweifel, daß ſchlechterdings **keine unmittelbare gegenſeitige Wirkung oder Uebergang lebendiger Kräfte aus einer Materie in die andere geſchieht.** Daß die lebendigen **Kräfte ſich nicht einander unmittelbar zerſtören**; daß vielmehr jede Zerſtörung derſelben von der Wirkung anderer nicht lebendigen Kräfte, womit die Theile der Körper zuſammenhängen, herrührt, habe ich oben mit **Graveſand** wenigſtens als wahrſcheinlich behauptet. Daß ſie aber **auch nicht unmittelbar von Körper zu Körper übergehen, oder ſich mittheilen, ſcheint mir ebenfalls** aus der Uebereinſtimmung der Erſcheinungen **wenigſtens wahrſcheinlich zu ſeyn.** Dem ſey aber wie ihm wolle, ſo iſt es doch gewiß, daß der Zuſammenſtoß **nicht harter** Körper ſich wenigſtens ſo erklären **läßt**, daß der Grundſatz des Stätigen beybehalten wird, anders als **Beguelin** glaubte. Muß denn nothwendig, wenn Körper an Körper läuft, auch ein Theilchen des geſtoßenenen **mittelbar** von einem Theilchen des anſtoßenden getroffen werden? Die lebendige Kraft des anlaufenden Körpers kann gegen die zuſammenhängende Kraft der Theile des geſtoßenen Körpers eben ſo wirken, wie ein aufſteigender Körper gegen die Schwere. Es ſcheint alſo nicht nöthig zu ſeyn, daß ein Theilchen des anlaufenden Körpers unmittelbar ein Theilchen des geſtoßenen berührt. Es ſind Zwiſchenräume vorhanden, in welchen das erſte anlaufende Theilchen ſeine Bewegung durch eine gewiſſe Länge fortſetzen kann. Ueberwältigt

tigt die lebendige Kraft des anlaufenden Theilchens die zuſammenhängende Kraft, ſo zerreißt ſie die Theile des Körpers; überwältigt ſie ſie aber nicht, ſo wird die Wirkung und die lebendige Kraft des Theilchens, die ſich in den leeren Zwiſchenräumen des geſtoßenen Körpers verläuft, von der widerſtehenden Cohäſionskraft nach und nach, wie die Bewegung von der Schwere in einem aufwärts geworfenen Körper, zerſtört. Indem aber die Cohäſionskraft wirkt, iſt mit der Zerſtörung der Bewegung in den Theilchen des anlaufenden Körpers zugleich die Erzeugung der Bewegung in den Theilchen des ruhenden Körpers verbunden; die ebenfalls nur nach und nach ihre endliche Geſchwindigkeit erhalten. Und ſo wird die Bewegung in dem einen Körper von einer bewegenden nicht lebendigen Kraft aufgehoben, und zugleich von eben der Kraft in dem andern Körper erzeugt. Verhält ſich dies ſo, ſo folgt daraus: **die Mittheilung der Bewegung beſtehe in gleichzeitiger Zerſtörung derſelben in dem einen, und Erzeugung in dem andern, mittelſt einer bewegenden nicht lebendigen Kraft.** Da auf dieſe Art der Zuſammenſtoß und die Mittheilung der Bewegung wenigſtens möglich und begreiflich iſt, auch zugleich der unmittelbare Stoß der Materie an eine andere ſich richtig vorſtellen läßt: ſo iſt kein einleuchtender Beweisgrund vorhanden, daß hier die Bewegung im Augenblick ſich ändern, und der Grundſatz des Stätigen nicht gerettet werden könne.

Maas der bewegenden Kräfte.

§. 35.

Maas der Preſſungen.

Was bisher von den bewegenden Kräften und ihren Wirkungen geſagt worden, gehört mehr in den phyſiſchen, als mathematiſchen oder mechaniſchen Theil der Dynamik. Es iſt noch übrig, die Meſſungsart dieſer Größen zu erklären, und ſolchergeſtalt den Grund zur Kräftemeſſung zu legen. Zwar habe ich bereits im vorhergehenden das Maas der lebendigen Kräfte angewandt, aber blos als Hypotheſe, um daraus die Lehren von der Natur und Eigenſchaft der gegenſeitigen Wirkungen zu erläutern, und, wenn ſie aus andern Gründen erwieſen ſind, zu beſtätigen, oder wenigſtens wahrſcheinlich zu machen. Nun iſt noch übrig, aus den Erſcheinungen ſelbſt das wahre Maas der Kräfte zu beſtimmen.

Dasjenige vorausgeſezt, was oben §. 9. von Beſtimmung der Größe der Kräfte überhaupt vorgetragen worden; laſſet uns erſtlich die Kräfte für ſich, mit Weglaſſung anderer Umſtände und ihres Zuſammenhangs, wodurch die eine die Wirkung der andern verhindern oder befördern kann, betrachten. Ziehen wir aber die Umſtände mit in Betracht, ſo müſſen ſelbige in den verſchiedenen Kräften und Wirkungen, deren Größen zn beſtimmen ſind, einerley ſeyn. Die Gewichte betrachten wir hier nicht am Hebel, ſondern jedes für ſich freywirkend; und nimmt man ſie am Hebel an, ſo muß man ſie doch eben ſo, wie ſie unter einander verglichen werden, annehmen.

Es ſeyn die Kräfte A und B drückende Kräfte, ſo fragt man nach der Art, die Größen ihrer Preſſungen zu beſtimmen, die Preſſungen ſelbſt aber verhalten ſich wie die Drückungsvermögen unter eben den Umſtänden, worinn die Preſſungen angenommen werden. §. 9. Man laſſe jede für ſich frey wirken.

Es iſt aber die uns bekannte Schwere, deren Effekt dasjenige iſt, was wir das **Gewicht** in den Körpern nennen, eine drückende Kraft. Wird der Körper unterſtüzt, daß er nicht fallen kann; ſo beſteht die Wirkung der Schwere im bloſen **Druck**, und dieſer Wirkung iſt der **Effekt**, oder das Beſtreben zur Bewegung, ſo das **Gewicht der ſchweren Körper** ausmacht, proportional. Auch wird die eine Zeitlang fortgeſezte Wirkung weder vermehrt noch vermindert; noch auch die Kraft ſelbſt durch die Wirkung geſchwächt oder vernichtet. Da ſich die Gewichte unter einander vergleichen, und ihre Größen durch eine angenommene Einheit meſſen laſſen, ſo erhellt, daß man die für das Maas der **Gewichte** angenommene Einheit auch als Maas der Preſſungen ähnlicher drückenden Kräfte anwenden kann.

Demnach verhalten ſich die Preſſungen und die drückenden Kräfte A und B, wie gleichgroße Gewichte; d. i. welchen ſie in gegenſeitiger Richtung hinreichend widerſtehen, oder womit ſie unter einerley Umſtänden im Gleichgewicht ſind. Kann die Kraft A den Druck nicht unbeſtimmt fortſetzen, wird ſie durch Wirkung geſchwächt, welches ſich bey der Schwere anders verhält; ſo iſt hier zugleich die Zeit, oder die Länge mit in Betracht zu ziehen; wenn die

ganze Summe der Preſſungen, wozu ſie vermögend iſt, gemeſſen werden ſoll. Die einzelnen Preſſungen aber in den einzelnen Momenten verhalten ſich wie die erhaltenden Gewichte in die Zeitmomente multiplicirt.

Wird die Kraft durch Wirkung geſchwächt, ſo kann ſie ſich ſo verhalten, daß ſie dem Gewichte, womit ſie im erſten Augenblick im Gleichgewicht ſteht, im zweyten nicht zureichend widerſtehen kann. Man nehme die Summe aller Gewichte, denen ſie, nach und nach angebracht, bis zu ihrer Aufreibung hinlänglich widerſteht: dieſe Summe drückt das Maas des ganzen Drückungsvermögens der Kraft A aus.

Ich erinnerte aber oben zu Ende des §. 8., daß ſolche Fälle zu den erdichteten gehören. Wir haben in der That kein Beyſpiel, wo es ausgemacht iſt, daß eine Kraft durch bloſen Druck ſich verſchwächt. Die Kraft, wenn ſie nur drückt, ſcheint ſich niemals zu verſchwächen. Anders verhält es ſich aber, wenn ihre Wirkung bewegend wird.

§. 36.

Fortſetzung.

Unſere Schwere, wenn ſie als eine von den Körpern, worauf ſie wirkt, verſchiedene bewegende Kraft betrachtet wird, iſt den Maſſen beſtändig proportional. Unterſcheiden wir daher beym Druck der Schwere die Intenſität, womit die einzelnen Theilchen beſonders gereizt werden, von der ganzen Wirkung in eine Maſſe von beſtimmter Größe; ſo verhält ſich dieſe Wirkung und das Gewicht wie I. M; d. i. wie die Intenſität in die Maſſe: aber

aber die Intenſität iſt beſtändig einerley, wie auch die Maſſe ſich ändert.

Anders verhält ſich die Sache bey andern drückenden Kräften, z. B. bey der Wirkung einer Feder in mehrere Körper, die zugleich gereizt werden. In dieſem Fall verhält ſich der Druck allemal wie die Intenſität deſſelben in die Maſſe multiplicirt: aber die Intenſität bleibt bey veränderter Maſſe nicht einerley. Die Wirkung aber ſolcher Kräfte iſt, wo ſie nicht von der gereizten Maſſe abhängt, von beſtimmter Größe, und daher beſtändig einerley Gewichte gleich. Demnach iſt das Gewicht P = I.M, und in verſchiedenen gleichgroßen Preſſungen verhalten ſich die Intenſitäten verkehrt wie die Maſſen.

Die Intenſität iſt das, was der Verfaſſer (Vorl. I. §. 16.) mit andern beſchleunigende Kraſt nennt: oder das, wovon die Größe des Beſtrebens zur Bewegung in jedem Theilchen der Maſſe abhängt. Demnach verhält ſich die beſchleunigende Kraft gerade wie der ganze Druck, und umgekehrt wie die gereizte Maſſe, oder $I = \frac{P}{M}$.

§. 37.

Grundſatz des Gleichgewichts.

Bey jedem Druck von Kräften, die ſämmtlich frey in die Körper wirken, ſind alſo zwey Abmeſſungen vorhanden; nämlich eine gewiſſe Intenſität, womit die einzelnen Theilchen der Materie gereizt werden; dann auch eine gewiſſe Breite, die

auf

auf der Größe der gedrückten Maſſe beruht. Wir nehmen aber hier die Kräfte ſämmtlich in die Körper frey wirkend, und die **dritte Abmeſſung**, wenn ſie bey ihnen vorhanden iſt, bey ihrer Vergleichung unter einander, einerley und gleichgros an.

Daß aber auch bey den Preſſungen selbſt eine **dritte Abmeſſung** vorhanden iſt, lehrt uns die Erfahrung beym **Gleichgewicht der** am Hebel angebrachten **Körper.** Es seyn zwey **gleiche Preſſungen** der Schwere, die hinreichend ſind, einerley Gewicht in einerley Entfernung vom Ruhepunkt zu erhalten, ſo müſſen dieſe Preſſungen I. M und i. m gleich ſeyn, wenn I und i die **Intenſitäten**; M und m aber die **Maſſen** der Körper bedeuten. Wir wiſſen aber, daß einerley Gewicht auf der einen Seite des Ruhepunkts durch verſchiedene auf der andern Seite angebrachte Körper erhalten wird, wenn die Maſſen ſich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen vom Ruhepunkt. **Die Intenſitäten** der freywirkenden **Schwere ſind überall gleich**; alſo verhielten ſich die drückenden Wirkungen I. M und im wie die Maſſen, d. i. ſie wären ungleich, wenn die Maſſen M und m ungleich ſind, welches ſich doch anders verhält. Die entgegengeſezten Wirkungen der Kräfte aber müſſen einander gleich ſeyn, wenn eine der andern hinreichend widerſtehen, und ein Gleichgewicht daraus erfolgen ſoll. Bey dieſer Verknüpfung von Kräften aber giebt es kein Gleichgewicht, wenn nicht die **Entfernungen vom Ruhepunkt** ſich verkehrt verhalten wie die Maſſen; folglich ſind die entgegengeſezten Wirkungen der ſolchergeſtalt mit einander verknüpften Kräfte nicht gleich. Die Wirkungen aber der Körper am Hebel ſind Preſſungen, deren Verhältnis

alſo

alſo aus den Verhältniſſen der abſoluten Intenſitäten, der Maſſen und der Entfernungen vom Ruhepunkt zuſammengeſezt iſt. Aber die Entfernungen der hier verknüpften Preſſungen verhalten ſich wie die Räume, wodurch ſich die Gewichte in gleicher Zeit ſich zu bewegen beſtreben. Denn die Wirkungen am Hebel ſind reſpektive Wirkungen, deren Längen ſich verhalten wie die Entfernungen oder Räume, wodurch die Kräfte die gereizten Maſſen zugleich zu bewegen ſich beſtreben. Daher verhalten ſich die Preſſungen ſchwerer Körper in verſchiedenen Entfernungen, wie L. I. M : l. i. m; wenn L und l die Längen der Preſſungen andeuten, und weil I = i, ſo verhalten ſie ſich wie L. M : l. m, und ſind gleich, wenn L : l = m : M.

Beym Gleichgewicht iſt keine Bewegung, ſondern nur **Beſtreben zur Bewegung**; auch wird keine Wirkung durch einen gewiſſen Raum hervorgebracht; aber doch **Beſtreben**, ſich **durch** einen **Raum** zu bewegen, oder Wirkung durch ein **Element des Raums**. Und obgleich weder endliche Bewegung vorhanden iſt, noch endliche Räume durchlaufen werden; ſo hindert dieſes doch nicht, daß die Elemente der Räume nicht verſchiedene Größen haben, und auch die Längen der Elementarwirkungen ſich verhalten können wie dieſe Elemente des Raums. Denn die reſpektive Intenſität, womit die einzelnen Punkte der Maſſe gereizt werden, wächſt in der Verhältnis dieſer Räume. **Demnach** ſind bey jedem **Druck** einer **Kraft** auch **drey Abmeſſungen** vorhanden; und die **Preſſungen** ſtehen in zuſammengeſeztem **Verhältnis** aus den abſoluten Intenſitäten, den **Maſſen** und den **Elementarlän**gen,

gen, oder den Elementen des Raums, wodurch die gereizten **Maſſen zu weichen ſich beſtreben.** Das Gleichgewicht zweyer Preſſungen erfordert alſo, daß IML = iml. In den von unſerer Schwere gereizten Körpern iſt I = i, folglich ML = ml, wie vorhin.

Sind mehrere Kräfte dergeſtalt mit einander verbunden, daß während der gegenſeitigen Wirkung der Raum, wodurch die eine wirkt, mit dem Raum der andern einerley iſt, ſo iſt auch L = l, und die Preſſungen verhalten ſich wie M : m.

Wirken aber beyde Kräfte frey, ſo verhalten ſich die Längen oder die Räume, wie die **Elementar- oder anfänglichen Geſchwindigkeiten**, die in den einzelnen Theilchen entſtehen. Folglich verhalten ſich die Preſſungen wie IMV : imv, wenn V und v die Elementargeſchwindigkeiten bedeuten. Verhalten ſich überdies I und i wie die **anfänglichen Geſchwindigkeiten, ſo verhalten ſich auch die ganzen Preſſungen** wie MVV : mvv, oder **wie die Produkte aus den Maſſen in die Quadrate der Elementargeſchwindigkeiten.** Bezeichnen P und p die ganzen Preſſungen, d. i. die ganzen bewegenden Wirkungen, die ſich verhalten wie IMV : imv, und iſt zugleich V = v; ſo verhalten ſich $\frac{P}{M} : \frac{p}{m} = I : i$; d. i. wie die **beſchleunigenden Kräfte.** Sind V und v ungleich, ſo iſt $\frac{P}{M} : \frac{p}{m} = IV : iv$. Es iſt aber zu merken, daß V : v oder jenes Verhältnis der Ge-

ſchwindigkeiten, das Verhältnis der Räume ausdrückt, wodurch die gereizten Körper der Wirkung der bewegenden Kraft zugleich oder in eben dem Augenblick weichen, d. i. das Verhältnis der Geſchwindigkeiten, womit die Körper während der Elementarwirkung fortzurücken, ſich beſtreben; oder die Länge der Wirkungen, nicht aber das Verhältnis der Geſchwindigkeiten, die von der Wirkung der Kräfte in den Körpern hervorgebracht werden, wenn jede Kraft beſonders wirkt. Denn dieſe Geſchwindigkeiten verhalten ſich wie I : i, oder wie die beſchleunigenden Kräfte. Es ſind aber $\frac{P}{M}$ und $\frac{p}{m}$ die von den drückenden Kräften in den einzelnen Theilchen der Materie hervorgebrachten Effekte; verhalten ſich dieſe wie IV : iv, d. i. im zuſammengeſezten Verhältnis der abſoluten beſchleunigenden Kräfte und der anfänglichen Geſchwindigkeit, die die einzelnen Theilchen in der Verknüpfung der Kräfte empfangen, ſo kann IV : iv das Verhältnis der reſpektiven beſchleunigenden Kräfte heiſen; wenn die beſchleunigende Kraft allgemein durch $\frac{P}{M}$ ausgedrückt iſt.

An der Zeit kann nichts liegen, wo von bloſen einander hinreichend widerſtehenden Preſſungen und ihrer Vergleichung die Frage iſt; denn wäre ſie auch noch ſo ſehr in Betracht zu ziehen, ſo kann ſie hier doch aus der Rechnung weggelaſſen werden, da in beyden Wirkungen, ſo lange das Gleichgewicht dauert, die Zeiten gleich ſind.

§. 38.

§. 38.
Fortſetzung vom Grundſatz der Statik.

Hier haben wir die wahre phyſiſche Urſache des Gleichgewichts ſowohl der feſten als flüßigen Körper. Denn die bewegenden Kräfte wirken in alle Theilchen der Maſſe mit einer gewiſſen Intenſität, die ſich durch die Länge der gleichſam auf einmal auszuübenden Wirkung, d. i. durch den Raum, wodurch die Körper ſich zu bewegen ſtreben, erſtreckt. Beym Gleichgewicht ſind die entgegengeſezten drückenden Wirkungen gleich, und dieſe Gleichheit muß nicht allein bey den bewegenden Wirkungen vorhanden ſeyn, die bey der endlichen Bewegung erfolgen, d. i. bey den erſt durch Wirkung zu erzeugenden Bewegungen; ſie muß bereits in den drückenden Wirkungen ſelbſt, die die Anfänge der bewegenden Wirkungen ſind, da ſeyn. Und ſo verhält es ſich auch. Gleiche Gewichte drücken auch gleichſtark, wenn jedes beſonders wirkt: wirken aber beyde zugleich, ſo hängt die reſpektive Größe der Wirkung nicht nur von der abſoluten Intenſität ab, ſondern auch von einer größern oder kleinern Erſtreckung derſelben, die daher entſteht, daß ſie durch einen längern Raum, gleichſam zu wiederholten malen und zugleich mit einer andern auf einmal ſich äuſert. Einerley Gewicht am Hebel in größerer Entfernung vom Ruhepunkt angebracht, empfängt, in Anſehung des andern Gewichts, ein größeres Beſtreben zur Bewegung oder Druck, im Verhältnis der Räume, wodurch ſie von der Schwere zugleich gereizt werden.

Daher in größerer Entfernung größerer Reiz, größere Intenſität und größere Gewalt, ſich zu bewe-

bewegen. Das gegenwärtige Gleichgewicht in dieſem Augenblick entſteht alſo nicht erſt aus den Wirkungen bey aufgehobenem Gleichgewicht und erfolgter Bewegung; es entſteht aus den im Augenblick des Gleichgewichts ſelbſt vorhandenen Wirkungen, und ihrer Gleichheit.

Ich weiß wohl, daß es unter den neuern Geometern ſehr einſichtsvolle Männer giebt, denen dieſer ſchon von **Carteſius**, wiewohl nicht völlig auf eben die Art angewandte Grundſatz der Statik, zu ſehr in die Naturlehre einzuſchlagen ſchien, und die an deſſen Stelle in der Mechanik einen andern **augenſcheinlichern** zu ſetzen ſich bemühten. Jener wird uns nur aus Erfahrung bekannt, und ſcheint daher von der **verwandten** Natur der Körper abzuhängen. Sie wandten daher einen andern an, deſſen Wahrheit unmittelbar erhellt, und der, ohne Rückſicht auf Sinne und Erſcheinungen erkannt werden kann, folglich unter die **reinen Vernunftwahrheiten** gehört. Es ſey die Linie AB (Taf. V. Fig. 5.) ein unbiegſamer Hebel ohne eigenthümliche Schwere, in dem ſo angenommenen Punkte D, daß DA = DB, hinreichend unterſtüzt. In den Punkten A und B wirken in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkte D zwey gleiche Gewichte oder Kräfte in vertikaler Richtung, die, da ſie den unterſtüzten Hebel nach einerley Richtung nicht bewegen können, ihn um den Punkt D nach entgegengeſezten Seiten zu drehen ſuchen. **Sind daher die Kräfte, die in gleicher Entfernung vom Ruhepunkte den Hebel um den Punkt D nach entgegengeſezten Seiten zu drehen ſtreben, gleichgros; ſo muß nothwendig ein Gleichgewicht da ſeyn.** Daß allerdings dieſer Grundſatz zu den Vernunft-

wahrheiten gehört, geb' ich gern zu. Denn bey gleichen entgegengeſezten Kräften unter gleichen Umſtänden werden nicht nur, ſondern müſſen auch ſchlechterdings ihre entgegengeſezten Wirkungen gleich ſeyn, und daher ein Gleichgewicht entſtehen. Welches auch unmittelbar alſo erhellt. Man nehme an, es entſtehe am Hebel eine Bewegung nach der einen Seite, ſo muß zugleich eine gleiche Bewegung nach der andern entgegengeſezten erfolgen; weil zu Hervorbringung der leztern völlig eben die Urſachen, wie zu jener, vorhanden ſind. Da jedoch dieſes nicht möglich iſt, ſo iſt offenbar, daß auch auf jener Seite keine Bewegung geſchehen kann.

Da ſie aber aus dieſem Grundſatze die übrigen Geſetze der Statik durch eine nothwendige Folge zu erweiſen ſuchen; ſo befürchte ich, es möchte ihnen eben das, was vor Zeiten einigen Geometern begegnen, die den berühmten Grundſatz des **Euklides** von den Parallellinien zu beweiſen ſuchten, und wirklich bewieſen zu haben ſich einbildeten, doch mit Unrecht, wie man jezt nicht mehr zweifelt. Denn ſezt man zu dem erſten Satz: **gleiche Kräfte in gleichen Entfernungen vom Ruhepunkt ſtehen mit einander im Gleichgewicht**, auch den umgekehrten hinzu: **ungleiche Kräfte in gleichen Entfernungen, oder gleiche Kräfte in ungleichen Entfernungen vom Ruhepunkt ſtehen mit einander nicht im Gleichgewicht**; ſo wird der Satz allgemein und adäquat, woraus die übrigen hergeleitet werden können. Denn obgleich ſolchergeſtalt kein Grund angegeben wird, warum ein Gleichgewicht da ſey; ſo ſieht man doch aus dieſem Satz ein, daß es da ſey. Denn die Bedingungen werden hinreichend

chend beſtimmt, woraus auch in andern Fällen erkannt werden kann, ob ein Gleichgewicht vorhanden iſt oder nicht. Nimmt man aber ſo den Satz doppelt, oder zwey Theile des Satzes an, ſo zweifle ich, ob leztere mit dem erſtern, aus deſſen Umkehrung er folgt, für gleich einleuchtend zu halten iſt. Denn warum, frag ich, iſt nicht auch Gleichgewicht da, wo die Kräfte gleich ſind; obgleich die eine dem Ruhepunkt näher angebracht iſt, als die andere: und aus welchem Grunde wird die Wirkung eben derſelben Kraft mit der Entfernung auch gröſſer oder kleiner? Meines Erachtens fehlt viel daran, daß man dieſes als einen Grundſatz annehmen kann.

Wollen ſie dieſen leztern Satz nicht hinzufügen; ſo behaupte ich, daß ſich die Geſetze des Gleichgewichts in der Statik aus dem erſtern Satze nicht herleiten laſſen. Es laſſen ſich zwar einige bejahende Kennzeichen daraus abnehmen, woraus man, wenn ſie vorhanden ſind, erkennt, daß auch ein Gleichgewicht da iſt; z. B. wenn das in der einfachen Entfernung vom Ruhepunkt angebrachte doppelte Gewicht, dem einfachen Gewicht in der doppelten Entfernung entgegengeſezt iſt, ſo dreht ſich der Hebel nicht. Ein anders iſts aber, daß dieſe Bedingungen zum Gleichgewicht nothwendig erfordert werden, und daß dieſes nicht da ſeyn kann, wenn bey einerley Gewichten die Entfernungen ſich ändern. Wie aber dergleichen Bedingungen, aus deren Abweſenheit wir auch auf Nichtdaſeyn des Gleichgewichts ſchlieſen können, blos aus jenen erſten Satz feſtzuſetzen ſind, ſeh ich im geringſten nicht ein.

Wollen ſie die Umkehrung des erſten Satzes aus dem Satz ſelbſt und ſeinen Folgen herleiten, ſo unterneh-

ternehmen ſie, meines Erachtens, eine ganz unmögliche Sache. Auf eine ähnliche Umkehrung des allgemeinen bejahenden Satzes kam es beym Erweis des Grundſatzes von den Parallellinien an. Ein Grundſatz war es zwar, daß beſtändig gleichweit von einander abſtehende gerade Linien nicht zuſammenlaufen, noch auch einander ſchneiden können; allein nun ſuchte man den umgekehrten Satz, daß nämlich gerade Linien, die verlängert einander nicht ſchneiden, auch nicht zuſammenſtoſen können, ſondern überall gleichweit von einander abſtehen. Nun läßt ſich aber nach den Regeln der Vernunftlehre, bey der einfachen Umkehrung eines allgemeinen Satzes, die Allgemeinheit des umgekehrten Satzes, auf keine Weiſe aus dem erſtern oder aus ſeinen Folgen, ja nicht einmal durch Schlüſſe erweiſen, die jenen erſten Satz oder eine ihm eigenthümliche Folge vorausſetzen. Vielweniger läßt er ſich unmittelbar daraus folgern. Diejenigen bemühen ſich alſo fruchtlos, die die Umkehrung unſers erſten Grundſatzes aus dieſem Grundſatz ſelbſt darthun wollen.

Endlich geſtehe ich, daß ich überhaupt jeden Verſuch, die Geſetze des Gleichgewichts und der Bewegung aus blos geometriſchen Gründen und Begriffen herzuleiten, für fruchtlos halte. Dieſe ſind vielmehr in der Naturlehre aufzuſuchen, die allgemeine Grundſätze aus den Erſcheinungen ſammelt, und aus der Uebereinſtimmung der leztern die Wahrheit der erſtern beſtätigt. Ob es aber noch eine einfachere Erklärung, als die hier vorgetragene, giebt, iſt mir unbekannt. Indeſſen verdient dasjenige, was der Abt de Catalano in den Actis Eruditorum, Lipſ. 1684. S. 414. hierüber erinnert, nachgeleſen zu werden.

§. 39.

§. 39.

Maas der lebendigen Kräfte.

Bisher vom Maas der **Preſſungen**. Nun auch vom Maas der **bewegenden Wirkungen**, wodurch Bewegungen in den Körpern erzeugt werden. Da aber dergleichen Wirkungen in den meiſten Fällen nicht unmittelbar in die Sinne fallen, daß ſie beobachtet werden können, und da ſie auch beſtändig ihren Effekten, die in den **Bewegungen** der Körper ſelbſt, oder in den **lebendigen Kräften**, die ſie hervorbringen, beſtehen, proportional ſind; ſo laſſet uns vorher die Größen der **lebendigen Kräfte** aus den Erſcheinungen beſtimmen, ehe wir vom Maas der bewegenden Wirkungen handeln.

Die ſich bewegenden Körper beſitzen ein **Vermögen**, andere Körper zu **bewegen**. Dies heißt ihre **lebendige Kraft**, wie §. 7. erklärt worden. Sie iſt von beſtimmter Größe, vermindert ſich durch Wirkung, und verliert ſich endlich ganz, wenn der Körper zur Ruhe gebracht iſt. §. 23. Daß aber das Maas dieſer Kräfte oder **ihres ganzen Bewegungsvermögens das Produkt aus den Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten** iſt, ſetzen ſowohl ſeines Erfinders **Leibnitzens** und anderer Beweisgründe, als auch **Poleni** und **s'Graveſands** Verſuche auſer Zweifel. Hier will ich die vornehmſten, aus den Erſcheinungen hergenommenen Gründe, worauf die ganze Sache beruht, zuſammentragen. Denn meines Erachtens kann man auf keinen andern Weg, als durch die Erfahrung zum wahren Maaſe gelangen.

I. Sind die **Bewegungen** der Körper, **Effekte bewegender nicht lebendiger Kräfte.** Man nehme alſo eine bewegende Kraft von beſtimmter **Größe**, dergleichen eine bis auf einen gewiſſen Grad geſpannte Feder iſt, die nachgelaſſen, ſich durch eben den Raum ausdehnen, und dem Körper eine gewiſſe Geſchwindigkeit eindrücken kann. Eben dieſe Kraft wirke auf gleiche Art in mehrere ungleiche Maſſen, ſo, daß ſie ihr ganzes Vermögen auf die Wirkung und Bewegung verwendet. Vergleicht man hierauf die in verſchiedenen Fällen entſtehenden Bewegungen, ſo findet man, daß **von eben der auf einerley Art wirkenden Kraft, einerley Effekt erzeugt wird, wenn dieſer aus der Maſſe des Körpers, in das Quadrat der Geſchwindigkeit multiplicirt, geſchätzt wird.** Vergl. §. 12. n. 4.

II. Sind ferner die **lebendigen Kräfte** bewegende **Urſachen**, und nehmen wir an, daß in verſchiedenen Fällen **einerley Effekt** von ihnen hervorgebracht wird, worauf ihre ganze in den Körpern vorhandene Größe verwendet wird, z. B. einerley Widerſtände überwunden, gleiche Hölen in weichen Thon eingedrückt, dieſelbe Feder auf denſelben Grund zuſammengedrückt u. d. g. wo der Effekt, oder die zuwege gebrachte Veränderung, was für eine es auch ſey, überall gleich iſt. In dieſen Beyſpielen findet man abermals, daß **bey gleichen Effekten die Produkte aus den Maſſen der Körper in die Quadrate der Geſchwindigkeiten gleich ſind.**

III. **Die lebendigen Kräfte erregen Bewegungen** in andern ruhenden Körpern, ſo **daß** ſie nicht ganz aufgerieben werden, ſondern **nur ein Theil auf dieſen Effekt verwendet wird.** Addiren wir

alsdenn

alsdenn den in dem einen Körper erregten Theil der Kräfte zu dem in dem wirkenden zurückgebliebenen, ſo muß dieſe Summe der vor der Wirkung in dem wirkenden Körper vorhandenen Summe der lebendigen Kräfte gleich ſeyn; wo nämlich kein Theil der Kräfte ohne Effekt aufgerieben worden; iſt aber ein, nach der allgemeinen Regel zu beſtimmender Theil beym Zuſammenſtoß verloren gegangen, ſo muß dieſer ebenfalls zu der Summe der Kräfte nach der Wirkung addirt werden, damit die Summe mit der Summe der Kräfte vor der Wirkung gleich ſey. Es lehren aber die Regeln des Zuſammenſtoßes, daß man, um dieſe Gleichheit zu erhalten, **die Maſſe, in das Quadrat der Geſchwindigkeit multiplicirt, für das Maas der lebendigen Kräfte im Körper annehmen muß.**

Es ſey z. B. der Körper A (Fig. 2. Taf. XIII.) mit einer Geſchwindigkeit = AB verſehen, und berühre im Punkt B einen andern Körper von **gleicher Maſſe** F; triſt er dieſen ſenkrecht, und ſind **beyde Körper federhart**, ſo daß kein Theil der Kräfte verloren geht, ſo erhält F die Geſchwindigkeit AB, und A wird ruhen. Die Summe der Kräfte nach der Wirkung iſt alſo $F.AB^2 = A, AB^2$, d. i. = der Summe vor der Wirkung.

A laufe ferner an F in der **ſchiefen Richtung** AD, ſo iſt, unter eben der Vorausſetzung, nach der Wirkung in F die Geſchwindigkeit AD vorhanden, in A aber die Geſchwindigkeit BD übrig geblieben; AD und BD auf einander in D ſenkrecht geſezt. Die Summe der Kräfte nach der Wirkung iſt $F.AD^2 + A.BD^2 = A.AB^2$, der Summe der Kräfte vor der Wirkung.

Sind die Körper weich, oder geht allgemein bey der Berührung A in B, entweder durch Eindrückung der Theile, oder aus andern Urſachen beſtändig die Hälfte der Kräfte in der Bewegung der Körper verloren: ſo treffe A auf F ſenkrecht, und die Geſchwindigkeit in A wird nach der Wirkung ſeyn $\frac{1}{2}AB$; die Geſchwindigkeit in F ebenfalls $\frac{1}{2}AB$; addirt $\frac{1}{4}AB^2.A + \frac{1}{4}AB^2.F$, hierzu die andere verlohrne Hälfte der Kräfte addirt, ſo bekommt ihr $\frac{1}{2}AB^2.A + \frac{1}{2}AB^2.A$, d. i. eben die Summe, wie vor der Wirkung. Läuft ferner A auch ſchief an F in der Richtung AD, ſo iſt die Geſchwindigkeit in F $= \frac{1}{2}AD$; eben ſo die Geſchwindigkeit A nach der Richtung AD $= \frac{1}{2}AD$; in der Richtung BD aber $= BD$; folglich, die Diagonale des Rechtecks, deſſen Seiten $\frac{1}{2}AD$ und BD, gezogen, die Geſchwindigkeit des Körpers A in dieſer Diagonale $= \sqrt{(\frac{1}{4}AD^2 + BD^2)}$. Addirt man nun die lebendigen Kräfte nach der Wirkung, ſo erhält man die Summe $\frac{F.AD}{4} + \frac{A.AD^2}{4} + A.BD^2$ hierzu den durch den Zuſammenſtoß in der Richtung AD verlohrnen Theil $= \frac{F.AD^2}{4} + \frac{A.AD^2}{4}$ addirt; bekommt man (weil $F = A$) $A\left(\frac{AD^2}{4} + \frac{AD^2}{4} + \frac{AD^2}{4} + \frac{AD^2}{4} + BD^2\right) = A\,(AD^2 + BD^2)$ eben die Summe, wie vor der Wirkung.

Dieſe-

Diejenigen, ſo beym Zuſammenſtoße weicher Körper keinen Verluſt der Kräfte annehmen, und die Kräfte ſelbſt aus der Größe der Bewegung, oder dem Produkt aus der Maſſe in die Geſchwindigkeit ſchätzen, ſuchen dieſe Gleichheit vergebens. Denn nach dieſer Vorausſetzung iſt die Summe der Kräfte vor der Wirkung A. AB; nach der Wirkung aber

$$\frac{F.AD}{2} + A.BD = A\left(\frac{AD}{2} + BD\right),$$ aber dieſe

Summe iſt mit A. AB nicht einerley. *)

Hier ſieht man weder auf die **Dauer** der Wirkungen, wodurch die lebendigen Kräfte in den Verſuchen (I) hervorgebracht werden, noch auf die **Dauer** der Wirkungen der lebendigen Kräfte, die in dem Fallen (II.) einerley Effekt zuwege bringen. Man ſieht blos auf die Gleichheit der **beſtimmten Kraft** der Feder, die beſtändig gleichgros iſt, ſie mag in **kürzerer** oder **längerer** Zeit wirken, und ſich durch Wirkung verzehren; und auf die **Gleichheit des Effekts**, wenn gleich die Wirkungszeiten ungleich ſind. Ob aber dieſe Zeit auch in Betracht zu ziehen iſt, werden wir hernach ſehen. Durch dieſe Erfahrungen halte ich das Leibnitziſche Maas der lebendigen Kräfte für hinlänglich beſtätigt und auſer Zweifel geſezt. Denn wir mögen die lebendigen Kräfte als **Effekte**, oder als **Urſachen**, oder wir mögen die Fälle betrachten, wo das ganze Vermögen, oder andere, wo nur ein Theil angewendet wird: ſo erſcheint überall einerley Folge. Wir ſehen nämlich, daß das

*) Dieſes Beweisgrunds hab' ich mich ſchon anderswo in einem, **Karſtens Beytr. zur theoret. Math. IV. Th.** beygefügten Aufſatze bedient.

ganze Bewegungsvermögen des bewegten Körpers, nicht allein deſto größer iſt, je größer ſeine Geſchwindigkeit, ſondern auch je größer das Quadrat ſeiner Geſchwindigkeit iſt: wenn man die Zeit, wodurch die Kräfte ihre Wirkung bis zu ihrer Aufreibung fortſetzen können, aus der Acht läßt. **Demnach ſind auch bey den lebendigen Kräften drey Abmeſſungen**; denn ſie verhalten ſich wie MCC, wenn M die Maſſe und C die Geſchwindigkeit des Körpers bedeutet.

§. 40.

Maas der bewegenden Wirkungen.

Laſſet uns nun die **bewegenden Wirkungen** der Kräfte vergleichen.

Es ſeyn 1.) die **bewegenden Kräfte in Anſehung der bewegenden Wirkung von unbeſtimmter Größe**, ſo daß ſie ins unendliche zu wirken vermögen, dergleichen unſere Schwere iſt. Man nehme zwey bewegende Wirkungen, wovon die eine die bewegende Kraft Mcc, die andere eine andere Nvv hervorgebracht hat. M und N drücken die Maſſen der Körper, c und v die am Ende der Wirkung erlangten Geſchwindigkeiten aus. Die ganzen Wirkungen der Kräfte ſtellen die Räume ABCD (Fig. 1. Taf. XV. n. 1.) und abcd (Fig. 1. n. 2.) vor; die Intenſitäten der Wirkungen P in erſterm, Q in leztern, während der Wirkung verhalten ſich wie die Linien AB, NO, CD in n. 1. und wie die Linien ab, no, cd in n. 2. Die Längen der Wirkungen aber wie AC; ac.

Alſo verhalten ſich die ganzen Räume ABCD und abcd wie die Effekte Mcc und Nvv.

Es

Es lehrt aber die **Erfahrung**: 1.) daß, wenn die in einerley **Maſſe** wirkenden Intenſitäten der bewegenden Kraft gleichgros und unveränderlich, die in ungleiche Maſſen wirkenden aber, im Verhältnis dieſer Maſſen ungleichgros ſind; dergleichen in unſerer Schwere, und den übrigen gleichförmig wirkenden Kräften ſind, d. i. wenn AB = NO = CD; auch die **Quadrate der erzeugten Geſchwindigkeiten ſich verhalten wie die Räume**, wodurch die Körper von der bewegenden Kraft während der Wirkung bewegt worden ſind. Daher P.AC : Q.ac = Mcc : Nvv. Folglich verhalten ſich AC, ac oder die **Längen der Wirkungen wie die Räume oder Höhen**, wodurch die Körper von der Schwere niederwärts getrieben werden.

2.) **Sind die Räume**, wodurch die Körper bewegt werden, gleich, ſo **verhalten ſich die Intenſitäten, wie die Maſſen in die Quadrate der Geſchwindigkeiten multiplicirt.** Wenn man nämlich die Intenſitäten von einerley Kraft während der Wirkung unveränderlich annimmt. Denn es verhalten ſich die Räume wie S : s, ſo wird

$$PS : Qs = Mcc : Nvv$$

und wenn S = s, ſo wird P : Q = Mcc : Nvv.

Beyſpiele hiervon haben wir in der **Hydraulik**. Denn die aus einem, bis auf eine gewiſſe Höhe, angefüllten Gefäße herausſpringende Flüßigkeit, wird von der drückenden Gewalt der obern Flüßigkeit durch einen zwar ſehr kleinen, aber in mehrern Fällen gleichen Raum gereizt, und erhält von der Wirkung durch dieſen Raum Geſchwindigkeit und Gewalt. Durch einerley Oefnung wird auf einmal einerley Maſſe des Flüßigen herausgetrieben; ſind die Oef-

nungen

nungen ungleich, ſo verhalten ſich die Maſſen des auf einmal herausſpringenden Flüßigen wie dieſe Oefnungen. Aber die erzeugten Geſchwindigkeiten verhalten ſich wie die Quadratwurzeln aus den Höhen des Waſſers über den Oefnungen, d. i. wie die Quadratwurzeln aus den Gewichten oder den gleichgroßen Preſſungen der Schwere. Daher iſt in der Verhältnis PS : Qs = Mcc : Nvv; bey einerley Oefnungen S = s, und M = N; ſind die Maſſen ungleich, ſo ſind auch die Grundflächen der drückenden Waſſerſäulen in eben der Verhältnis der Maſſen M : N ungleich. Aber P und Q im erſtern Fall verhalten ſich wie die aufliegenden Gewichte oder wie die Höhen, d. i. wie die Intenſitäten, und vermöge der Erfahrung wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten cc : vv. Im leztern ſtehen die Intenſitäten in zuſammengeſezten Verhältnis aus den Höhen und Grundflächen der drückenden Säulen; d. i. in der zuſammengeſezten Verhältnis aus M : N, und cc : vv.

So **verhalten ſich** allgemein **die ganzen bewegenden Wirkungen wie die Intenſitäten und Räume: und auch die Räume ſind den Längen der bewegenden Wirkungen proportional.** Vergl. §. 23.

Sind die Intenſitäten in allen Punkten der Länge der Wirkungen ungleichgros; doch überall, wie die Schwerkräfte, im Verhältnis der Maſſen; ſo läßt ſich die Wirkung durch den krummlinigten Raum ABCD, oder abcd angeben, **welche Räume ſich verhalten, wie die Quadrate der erzeugten Geſchwindigkeiten.** Denn es ſind, wenn alles genau ausgedrückt wird, drey Abmeſſungen, ſowohl in der

Wir-

Wirkung, als im Effekt, vorhanden. Denn die Intenſität der Wirkung verhält ſich hier, wie die Intenſität der einzelnen Theilchen, oder die beſchleunigende Kraft in die Summe der Theilchen multiplicirt. Daher iſt P = IM, folglich PS = IMS, und in der andern Wirkung Q = iN; und Qs = iNs. Alſo IMS : iNs = Mcc : Nvv und

$$IS : is = cc : vv.$$

Die Elemente aber der bewegenden Wirkungen verhalten ſich Pds, oder wie die ganze Intenſität in das Element des Raums multiplicirt; folglich wie Mcdc, d. i. wie die Elemente der Effekte, nämlich der in den Maſſen erzeugten lebendigen Kräfte; und die einzelnen Elementarwirkungen während der ganzen Wirkung; d. i. die einzelnen Reizungen überhaupt, wodurch die Kräfte in den Körpern entweder im Anfang erzeugt oder hernach vermehrt werden, verhalten ſich wie Pds = Mcdc.

§. 41.

Fortſetzung vom Maas der bewegenden Wirkungen.

Ruhte der Körper im Anfange der Wirkung, ſo war ſeine Geſchwindigkeit c. Daher iſt der Reiz, womit die Kraft zu wirken beginnt, und das Element der Geſchwindigkeit hervorbringt, wenn ſie in ihrem Fortgang gehindert wird, nichts als ein bloßer Druck; ſie verhält ſich zu einem andern Reiz, oder Elementarwirkung, wodurch die endliche Geſchwindigkeit um einen gleichen unendlichkleinen Theil wächſt, wie etwas unendlichkleines zum endlichen. Denn es verhält ſich der Druck, oder der Anfang der Wirkung Pds|, wie Mdc. §. 37.

iſt

iſt aber M mit einer endlichen Geſchwindigkeit verſehen, ſo verhält ſich der Reiz, wodurch c um den Theil dc vermehrt wird, wie Mcdc. Folglich verhält ſich der Druck zu einem ſolchen Reiz, wie Mdc : Mcdc = dc : c, d. i. wie etwas unendlichkleines zum endlichen. **Demnach iſt die Elementarwirkung der Kraft, wodurch die Geſchwindigkeit im Körper um einen unendlichkleinen Grad wächſt, unendlich größer als der anfängliche Druck**, wodurch eben dieſer kleinſte Grad in dem ruhenden Körper im erſten Augenblick erregt wird.

Der Zeit der Wirkung iſt bisher nicht gedacht worden. Die **Länge** der Wirkung iſt ihr nicht proportional, ſondern dem Raum, wie die Erfahrung gelehrt hat. Da jedoch die **Räume**, wodurch ſich die Körper während der Wirkung in den einzelnen **Zeitelementen bewegen, ſich verhalten wie die Geſchwindigkeiten der Körper in das Zeitelement multiplicirt**, ſo gelangen wir zu einer Gleichung der Zeit, die wir in der Mechanik mit Recht als einen allgemeinen Grundſatz anwenden.

Die Elementarwirkungen Pds : Qdz = Mcdc : Nvdv, wenn die Elemente des Raums ds, dz heiſſen. Aber ds : dz verhält ſich überall wie cdt : vdT, wenn dt, dT die Zeiten der Bewegung durch die Elemente des Raums andeuten. Daher Pcdt : = QvdT = Mcdc : Nvdv, folglich Pdt : QdT = Mdc : Ndv, d. i. **die Intenſitäten, in die Zeitelemente multiplicirt, ſind den Maſſen, in die Elemente ihrer Geſchwindigkeiten multiplicirt, proportional**; und S. Pdt : S. QdT = Mc : Nv. Demnach läßt ſich die Gleichung S. Pdt = Mc, und Pdt = Mdc als **Grundſatz** anwenden. Daraus folgt aber

aber nicht, Pdt drücke das Element der Wirkung aus, ſo wie auch $S. Pdt$ nicht die ganze endliche Wirkung andeutet.

Iſt $dt = dT$, d. i. nimmt man die Elementarwirkungen, ſo wie auch die ganzen Wirkungen, alle von gleicher Dauer an, ſo wird $P : Q = Mdc : Ndv$; und $S. Pdt : S. Qdt = P : Q$, wenn dt beſtändig angenommen wird, $= Mc : Nv$. In dieſem Sinn ſchlieſen diejenigen richtig, die da behaupten, daß die Kräfte (Intenſitäten in gleicher Zeit) ſich verhalten wie die Größen der Bewegung, d. i. wie die Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten. Man vergleiche, was der Verfaſſer oben §. 264. Vorl. XV. erinnert. Daher können die Gelehrten in allem, was die Natur und Eigenſchaft der bewegenden Wirkungen angeht, mit einander übereinſtimmen, und doch, das Wort: Kräfte, in verſchiedenem Sinn gebraucht, die Größe derſelben verſchiedentlich meſſen.

Preſſungen ſind die Anfänge der Wirkungen. In ihnen iſt alſo allemal $dt = dT$. Folglich verhalten ſich ihre Intenſitäten, wie $Mdc : Ndv$, die jedoch die ganze drückende Wirkung nicht ausmachen. §. 37.

§. 42.

Maas bewegender Wirkungen der Kräfte von beſtimmter Größe, in Anſehung ihrer bewegenden Wirkung.

Sind Wirkungen beſtimmter Kräfte, die ſie hervorbringen können, bis ſie zu wirken aufhören, z. B. Federn, zu meſſen; ſo kann jene ganze Wirkung von beſtändiger Größe ſeyn, obgleich die Zeit, worinn ſie ſich äuſert, ungleich iſt. Denn es verhält

ſich

ſich die ganze Wirkung wie S. Pds, oder wie S. P. cdt. Es kann aber P in jedem Punkt des Raums dieſelbe Intenſität, und ds oder die Elemente des Raums gleichgros ſeyn, obgleich die Zeitelemente dt ungleich ſind. Es werden aber dt, gerade wie ds, und verkehrt wie die Geſchwindigkeiten c, ſich verhalten.

Sind die Intenſitäten einerley auf einerley Art gebogener Federn in jedem **beſtimmten Punkte des Raums**, wodurch ſie den Körper in Bewegung ſetzen, **gleichgros, wenn gleich die** von ihnen gereizten **Maſſen ungleich ſind; ſind ferner die ganzen Räume**, wodurch ſie ſich in den einzelnen Wirkungen ausdehnen, **von gleicher Länge**, ſo **werden** auch **ihre ganzen Wirkungen gleich** ſeyn, ſie **mögen** eine **größere oder kleinere Maſſe bewegen**. Daher Mcc das beſtändige Maas der Größe der Wirkung, wie ſolches die Verſuche, ſowohl bey kürzerer als längerer Zeit der Wirkung beſtätigen. S. s'Gravesande Elem. phyſic. math. Lib. II. Cap. 2. §. 745. Die Größe der Zeit hängt von der Größe des Raums und der Geſchwindigkeit ab. Der Raum iſt bey den ſich ausdehnenden Federn einerley; die Geſchwindigkeit aber größer, wenn die gereizte Maſſe kleiner iſt. Daher mag die Zeit der Wirkung größer oder kleiner ſeyn, ſo findet ſich dennoch der beſtändige Effekt Mcc.

Aber auch in dieſem Falle wird ſeyn Pdt = Mdc und S. Pdt = Mc. Denn Pds = Pcdt = Mcdc, daher Pdt = Mdc, und S. Pdt = Mc. Aber S. Pdt iſt nicht die ganze Wirkung, auch nicht unveränderlich in mehrern Ausdehnungen derſelben Feder, wenn nicht dabey einerley Maſſe M genommen wird. Unveränderlich hingegen findet man durch Verſuche Mcc

oder

oder S. Pcdt, oder S. Pds. Es iſt aber $P = \frac{Mdc}{dt}$, folglich in einerley Feder in jedem beſtimmten Punkt des Raums, wodurch ſie ſich ausdehnt, $\frac{Mdc}{dr}$ gleich-gros und unveränderlich, weil es P iſt.

§. 43.

Maas der ſtoßenden Wirkungen.

Stoß iſt eine bewegende Wirkung lebendiger Kräfte, ſeine Elemente oder Reizungen ſind Mcdc, Nvdv, wenn wiederum M und N die Maſſen, c und v die Geſchwindigkeiten bedeuten.

Daher erhellt 1.) daß der Anfang des Stoßes ſich verhält wie Mcdc, folglich jeden Druck einer nicht lebendigen Kraft, wie Mdc, unendlich übertrift. §. 41.

2.) Bey der Wirkung lebendiger Kräfte in andere bewegende Kräfte, z. B. Federn, oder in ruhende oder bewegte Körper, ſind ebenfalls Intenſitäten und Längen, die ſich verhalten, wie die Räume, wodurch die gereizten Körper weichen, zu unterſcheiden. Demnach iſt, wie im vorigen §., wenn wir auf die Elementarwirkungen ſehen,

$$Mcdc : Nvdv = Pds : Qdz.$$

Weil aber die lebendigen Kräfte von beſtimmter Größe ſind, ſo laßt uns zwey dergleichen, die durch Räume ABCD, abcd (Fig. 1. n. 1. 2.) von gegebener Verhältnis vorgeſtellt ſind, in gleichviel ähnliche Elementarwirkungen ABFG, NOST ꝛc. und

abfg, nost, getheilt denken, ſo daß ſich die Theile in n. 2. eben ſo wie die Theile in n. 1. und die Elementartheile ABFG zu den gehörigen abfg verhalten, wie die ganzen Wirkungen. Die Linien AF, FN, NO ꝛc. deuten wie af, fn, no, die **Räume** oder die **Längen** der ähnlichen Elementarwirkungen an; und die, die **Intenſitäten** ausdrückenden Horizontallinien der Figuren, ſind ebenfalls in gegebener Verhältnis. Eben ſo denke man ſich die **Zeiten** der ganzen Wirkungen in **gleichviel** Momente getheilt, ſo **werden die Abnahmen der Geſchwindigkeiten** in den einzelnen Elementarwirkungen **ſich verhalten wie die ganzen Geſchwindigkeiten.** Man nimmt nämlich an, daß die Kräfte auf **ähnliche Art wirken.**

Dieſes vorausgeſezt, wirken zwey ſolche Kräfte, jede für ſich frey

1.) **gegen eine Kraft, wie unſere Schwere, die dergeſtalt widerſteht, daß die Intenſitäten des Widerſtands ſich verhalten wie die Maſſen;** ſo bekommt man aus

$$Mcdc : Nvdv = Pds : Qdz$$

weil $M : N = P : Q$

$cdc : vdv = ds : dz = cdt : vdT$, daher

$dc : dv = dt : dT.$

Die Räume, wodurch ſie **aufſteigen,** oder die Längen der Wirkungen, **ſtehen** im zuſammengeſezten **Verhältnis der Geſchwindigkeiten und Zeiten; die Abnahmen der Geſchwindigkeiten, und die Geſchwindigkeiten ſelbſt verhalten ſich wie die Zeiten,**

2.) ſo, daß die **Zeiten der ganzen Wirkung,** folglich auch die Zeittheilchen der Elementarwirkungen **gleich** ſind, wie es ſich beym Zuſammenſtoß der

Körper

Körper verhält. Alsdenn iſt $Mcdc : Nvdv = Pcdt : QvdT = Pc : Qv$ und $Mdc : Ndv = P : Q$, d. i. die Intenſitäten verhalten ſich in dieſem Fall, in den einzelnen Elementarwirkungen, wie die Produkte aus den Maſſen in die Abnahmen der Geſchwindigkeiten, oder wie $S. Mdc : S. Ndv = Mc : Nv$. Es iſt aber zu merken, daß hier c und v die Summen der verlohrnen Geſchwindigkeiten, nicht aber die im Anfange vorhandenen Geſchwindigkeiten bedeuten, wo nicht die ganze Kraft und Geſchwindigkeit in der Wirkung aufgerieben worden.

3.) Mit gleichen Intenſitäten; dann verhalten ſich die Elementarwirkungen wie die Räume $ds : dz = cdt : vdT$, d. i. im zuſammengeſezten Verhältnis aus den Geſchwindigkeiten und Zeiten. Sind auch die Zeiten gleich, ſo verhalten ſich die Räume, oder die Längen der Wirkungen, und die ganzen Wirkungen, wie die Geſchwindigkeiten.

Daher verhalten ſich auch die Elementarwirkungen $Mcdc$, $Nvdv$, wie die Abnahmen der Geſchwindigkeiten $dc : dv$, die ſich verhalten wie die Geſchwindigkeiten $c : v$ ſelbſt. Daher $Mc = Nv$.

Beym Zuſammenſtoß der Körper ſind die Zeiten und Intenſitäten gleich; ſoll daher ein Körper mit ſeiner ganzen lebendigen Kraft in den andern wirken, ſo muß nothwendig $Mc = Nv$, d. i. die Größen der Bewegung vor der Wirkung müſſen in beyden gleichgros ſeyn. Sind dieſe Größen vor der Wirkung nicht gleich, ſo können nicht die ganzen lebendigen Kräfte wirken. Was aber auch für ein Theil der Kräfte wirkt, ſo muß doch die daher entſtandene Veränderung ſo beſchaffen ſeyn, daß $Mc = Nv$, oder, daß die Größe der

in dem einen nach der einen Seite erzeugten Bewegung der in dem andern nach der entgegengeſetzten Seite verlohrnen gleich iſt, ſo **daß einerley Größe der Richtung** bleibt. §. 14.

Sind die Körper M und N und die ganzen Wirkungen gleich, ſo verhalten ſich die Elementarwirkungen wie cdc : vdv = Pds : Qdz = Pcdt : QvdT, und wenn P = Q, wie cdt : vdT. Daher cdc : vdv = cdt : vdT. Aber in dieſem Fall können die Zeiten nicht gleich ſeyn, wenn nicht zugleich c = v. Denn ſonſt kann die Verhältnis cdc : vdv = c^2 : v^2 mit c : v nicht einerley ſeyn.

Einige ſtellen ſich die **lebendige Kraft** des Körpers A mit einer Geſchwindigkeit = 2, **doppelt** ſo groß vor, als die lebendige Kraft eben dieſes mit einer Geſchwindigkeit = 1 fortlaufenden Körpers; daß er aber auch zugleich in doppelter Zeit ſeine Wirkung fortſetzen könne und müſſe. Allerdings muß dieſes unter der Bedingung ſtatt haben, wenn die abſoluten Widerſtände gleich, folglich den Maſſen proportional ſind, wie wir oben n. 1. geſehen haben: dieſes kann aber nicht allgemein gelten. Denn die Zeit der ganzen Wirkung kann gleich ſeyn, wenn bey einerley Maſſe die Widerſtände ſich verhalten wie die Geſchwindigkeit des Körpers. **Aber beym Zuſammenſtoß können die Längen der gegenſeitigen Wirkungen nicht gleich ſeyn**, wenn die lebendigen Kräfte in beyden Körpern ſo **wirken können**, wie jede **für ſich ungehindert** in eine Maſſe oder Widerſtand wirken könnte. Denn die Längen der Wirkungen verhalten ſich wie cdt : vdT, und weil dt = dT, wie die **Geſchwindigkeiten** im Anfang. Daher bewegen ſich auch die Körper, die während der

gegen=

gegenſeitigen Wirkung zuſammengedrückt werden, durch einen gewiſſen Raum fort. Aber dieſe Räume, oder Längen, wodurch ſie einander zuſammenmendrücken, verhalten ſich wie die Längen.

4.) Sind aber beym Zuſammenſtoß ſolcher Maſſen, die ſich nicht zuſammendrücken laſſen, wo auſer den unmittelbar gegenſeitig auf einander wirkenden Trägheiten nichts vorkommt, die Räume, wodurch die Körper während der Wirkung beſtändig zunächſt an einander fortrücken, gleich, ſo wird in dieſem Falle $ds = dz$, und $dt = dT$ angenommen. Daher iſt auch während der Wirkung $c = v$. Aber c und v können nicht Geſchwindigkeiten ſeyn, womit die Körper in gerader Richtung einander entgegen laufen. Oben §. 34. hab' ich von dieſen Fällen geſagt, es ſey unwahrſcheinlich, daß ſich dergleichen wirklich in der Natur finden. Finden ſie ſich aber, wovon wir in der Mechanik die Möglichkeit wenigſtens zugeben müſſen, ſo iſt es doch ausgemacht, daß die Körper in ſelbigen nicht auf eben die Art wirken, wie ſie jede für ſich gegen andere widerſtehende Kräfte wirken würden. **Dergleichen Wirkungen aber gehören zu den reſpektiven Wirkungen der Kräfte**, deren Längen, auf beſtimmte Richtungen gebracht, von den gleichzeitigen Wirkungen anderer Kräfte beſtimmt werden; davon im folgenden.

§. 44.

Zuſammenſetzung der Kräfte.

Kräfte ſind zuſammengeſezt, wenn ſie in eine und dieſelbe Maſſe zugleich ſo vereinigt wirken, daß ſie ſelbige in eben dem Augenblick mit einer Wirkung

reizen, die von den Wirkungen verſchieden iſt, die ſie von eben dieſen Kräften erlitten hätte, wenn jede für ſich beſonders gereizt hätte. Z. B. Zwey Kräfte, die ihrer Intenſität und Länge nach den Seiten eines Parallelogramms proportional ſind, bringen vereinigt in gleicher Zeit eine Wirkung zuwege, die Intenſität und Länge nach der **Diagonale** proportional iſt.

Laſſet uns zuerſt die zuſammengeſezten Wirkungen bewegender Kräfte **von unbeſtimmter Größe** betrachten. Bey dieſen Kräften ſind zwar die **abſoluten Intenſitäten von beſtimmter Größe**; aber die Längen der Wirkungen können unendlich verſchieden ſeyn; auch ſchwächt ſich das **unbeſtimmte** Wirkungsvermögen nicht, wie groß auch die Wirkung iſt, die es in gegebener Zeit äuſert. Um aber zu zeigen, was aus der **Zuſammenſetzung der Kräfte** erfolgt, wollen wir vorher die Verhältniſſe der Wirkungen, ihrer Intenſitäten und Längen beſtimmen, wenn die einzelnen Kräfte auf eine und dieſelbe Maſſe zu gleicher Zeit **beſonders** wirken. Es wirken zwo Kräfte **beſonders** in **gleiche Maſſen** mit den unveränderlichen Intenſitäten AB, BC (Fig. 14. Taf. XV.), in beſtändigen Verhältniſſen gegen einander, und ihre Wirkungen werden **in gleicher Zeit** vollbracht; ſo verhalten ſich

1.) **Die Geſchwindigkeiten**, die ſie in **gleicher Zeit in einerley Maſſe** vom Anfang an erzeugen, wie die **Intenſitäten**.

Denn Pds : Qdz = Mxdx : Mydy, wenn x und y die in der Maſſe erzeugten Geſchwindigkeiten ausdrücken; aber Mxdx : Mydy = xdx : ydy, und mit Beybehaltuug der §. 43. gebrauchten Zeichen, Pds : Qdz

$Qdz = Pxdt : QydT$. Daher (weil $dt = dT$) $Px : Qy = xdx : ydy$, und $P : Q = dx : dy$.

Da $P : Q$ ein beſtändiges Verhältnis, ſo iſt das Verhältnis $dx : dy$ einerley mit dem Verhältnis der vom Anfang an erzeugten Geſchwindigkeiten $x : y$ ſelbſt.

2.) **Verhalten ſich die Intenſitäten wie die Räume, oder wie die Längen der Wirkungen vom Anfange.** Denn $ds : dz = xdt : ydT$, d. i. (weil $dt = dT$) $= x : y$, oder wie die **Intenſitäten.** (1). Da das Verhältnis derſelben beſtändig iſt, ſo verhalten ſich auch die Längen der Wirkungen in gleicher Zeit, wie die Intenſitäten.

3.) **Die bewegenden Wirkungen von gleicher Dauer, oder in gleicher Zeit vollendet, verhalten ſich, wie die Quadrate der Räume. Eben ſo die Preſſungen.**

Denn $Pds : Qdz = Mxdx : Mydy$. Weil aber $dx : dy = x : y$, ſo wird $Pds : Qdz = Mxx : Myy$, d. i. wie die ganzen bewegenden Wirkungen. Da ferner $P : Q = ds : dz = s : z$, ſo wird $Pds : Qdz = S.Pds : S.Qdz = P^2 : Q^2 = s^2 : z^2$. Sind daher die Intenſitäten AB und BC beſtändig, ſo verhalten ſich ſowohl die **Preſſungen**, als die **bewegenden Wirkungen**, wie $AB^2 : BC^2$.

Wirkt alſo in eben die Maſſe eine Kraft, deren Intenſität $= AB + BC$, ſo wird ſich die bewegende Wirkung dieſer Intenſität, zu der Summe der Wirkungen, die die in zwey gleiche Maſſen beſonders wirkenden Kräfte AB, BC **in gleicher Zeit** hervorgebracht hätten, verhalten wie $(AB + BC)^2 : AB^2 + BC^2$. (3). **Demnach iſt die in einerley Maſſe wirkende vereinigte Kraft ſtärker, als die ein-**

zelnen in gleiche Maſſen beſonders wirkenden Kräfte.

Wirken zwey bewegende Kräfte von unbeſtimmter Größe, deren Intenſitäten AB und BC, vereinigt zugleich in einerley Maſſe M; ſo iſt die Intenſität der vereinigten Kräfte AB + BC. Daher bringen ſie eben das zuwege, was eine einzige mit der Intenſität AB + BC reizende Kraft. Den phyſiſchen Grund hiervon ſehen wir leicht ein. Hätte die Kraft AB allein gewirkt, ſo würde ſie die Maſſe M in eben der Zeit durch einen der Intenſität AB proportionalen Raum fortgerückt haben. Kömmt aber die Intenſität B hinzu, die zu gleicher Zeit durch den proportionalen Raum BC reizt, ſo wird die Länge der bewegenden Wirkung der vereinigten Kräfte AB + BC. Folglich iſt die Wirkung der Kraft AB = AB (AB + BC), die Wirkung der Kraft BC = BC (AB + BC), und ihre Summe = (AB + BC) (AB + BC).

§. 45.

Parallelogramm der Kräfte.

Setzet alſo, zwey Kräfte wirken in den Richtungen AB und AC, unter einem gegebenen Winkel BAC, (Fig. 15. Taf. XV.) mit Intenſitäten, die ſich wie die Seiten AB und AC des Parallelogramms ABDC verhalten, und reizen zugleich die Maſſe in A in der Richtung der Diagonale AD auf eben die Art und mit gleicher Kraft, womit dieſe Maſſe von zwey vereinigten Kräften, deren Intenſitäten ſich verhalten wie Ae und Af (Be und Cf auf AD ſenkrecht gezogen), in eben der Richtung AD getrieben würde. Dieſes vorausgeſezt erhellt, daß jene Seitenkräfte die

die Maſſe in A in den Richtungen AD eben ſo reizen werden, wie eine Kraft, die mit der Intenſität AD in dieſer Richtung AD frey in die Maſſe wirkt. Denn ſind die Intenſitäten Ae und Af = eD in eben der Richtung vereinigt, ſo vermehrt die andere eD durch ihre gleichzeitige Wirkung mit Ae die Länge der Wirkung der Kraft Ae um den Theil eD. Daher entſtehen die bewegenden Wirkungen Ae. AD + eD. AD = AD². Folglich der Effekt demjenigen gleich, den die ungehinderte Kraft mit der Intenſität AD, allein in der Maſſe in A in eben der Zeit hervorgebracht hätte. §. 44. 3.

Demnach läßt ſich deutlich einſehen, wie ſich die Vereinigung mehrerer Kräfte, um eine einzige mittlere Kraft hervorzubringen, verhält. Auf dieſe Art erklären wir die Sache; daß ſie ſich ſo verhält, werden wir hernach zeigen. Wirken die Kräfte AB und AC ſeitwärts, ſo iſt die Wirkung AB in der Richtung AB einerley mit den beyden Wirkungen in den auf einander ſenkrechten Richtungen AM und MB, wovon die eine AM auf AD ſenkrecht, die andere MB (= Ae) in der Richtung mit AD gleichlaufend iſt. Ferner iſt auch die Wirkung der Kraft AC einerley mit den Wirkungen AN und NC (= Af), wenn AN auf AD ſenkrecht, und zugleich der Wirkung AM gleich iſt, und NC oder Af in gleichlaufender Richtung mit der Diagonale AD. Demnach ſind vier Wirkungen vorhanden, nämlich in AM und AN, ferner in Ae und Af. Jene AM und AN ſind in derſelben Richtung entgegengeſezt und gleich, ſowohl den Intenſitäten nach, die ſich verhalten wie AM : AN, als auch den Längen in gleicher Zeit nach, die ſich

eben ſo verhalten, und daher auch gleich, weil AM = AN. Die eine hebt alſo die andere auf, d. i. ſie machen mit einander ein Gleichgewicht aus. §. 17. Die beyden übrigen Wirkungen in den Richtungen Ae und Af **vereinigen ſich**, und bringen die Wirkung Ae. AD + Af. AD = AD^2 hervor, d. i. = der Wirkung einer Kraft, die die Maſſe in A durch AD reizt, und deren Intenſität = AD.

Iſt der **Winkel der Kräfte** CAB ein rechter Winkel, ſo iſt die **Summe der gleichen und entgegengeſezten Wirkungen** AM, AN, **die ſich einander verhindern, einerley mit dem Zuwachs der Wirkungen in der Diagonale** AD, der aus der Vereinigung der Kräfte entſteht. **Daher iſt die mittlere Wirkung in dieſem Fall mit der Summe der einzelnen Wirkungen gleichgros.** In dieſem Sinn kann man ſagen, **daß die unter einem rechten Winkel zuſammengeſezten Kräfte einander weder helfen noch hindern.** Denn im Grunde geſchieht **beydes**: ſie widerſtehen einander zum Theil, zum Theil vereinigen ſie ſich, **und** jede vermehrt zugleich die Länge der vergeſellſchafteten Wirkung.

Da ſich die **Preſſungen** hier eben ſo verhalten wie die **bewegenden Wirkungen**, §. 4. 3. ſo folgt unmittelbar, daß, was hier von den bewegenden Wirkungen geſagt worden, auch auf die Preſſungen anwendbar ſey. Daher ſcheint mir **Bilſinger** (Anm. z. Ende Vorl. XV.) die Sache zu weit hergeholt, und die Schwierigkeiten ohne Noth gehäuft zu haben.

§. 46.

§. 46.

Läßt ſich dieſes auf die lebendigen Kräfte anwenden?

Aus demjenigen, was von der Vereinigung der Kräfte zu einer einzigen, und dem daher entſtandenen Zuwachs der Wirkung geſagt worden, erhellt zugleich, daß ſich dieſes auf die lebendigen Kräfte, ſo wie auch alle übrigen, die von beſtimmter Größe ſind, nicht anwenden läßt. Dieſe verhalten ſich ganz anders. Sind AB und AC lebendige Kräfte, und betrachtet man ihre Wirkungen durch Ae und Af, die in einerley Richtung mit einander übereinſtimmen, ſo entſtehen daher zwey Wirkungen in der Diagonale, wovon die eine ſich verhält wie Ae^2; die andere wie Af^2, oder die zuſammengenommen die Intenſitäten und Längen Ae und Af haben. Wären ſie vereinigt, ſo erhielte die Wirkung von der Intenſität Ae durch die gleichzeitige Wirkung der andern Kraft durch Af, die Länge $Ae + Af = AD$, und aus Ae^2 würde $Ae. AD$. Folglich wäre ihre Wirkung $Ae. AD$; und zugleich würde auf ähnliche Art die Intenſität Af von Ae unterſtüzt. Da aber die Wirkung Ae^2 ſich in $Ae. AD$ verwandelt; ſo kann dieſe Vermehrung $=$ der Wirkung $Ae. eD = Ae. Af$ nur durch die Wirkung der andern Kraft Af^2 bewirkt werden, die jedoch um ſo viel kleiner wird. Demnach kann nach ſo vermehrter Wirkung Ae^2, nicht die ganze Wirkung Af^2 übrig bleiben, noch vielweniger kann auch dieſe, durch die gleichzeitige Wirkung Ae^2 vermehrt werden. Die Summe der lebendigen Kräfte in der Richtung AD kann nicht größer, und nicht kleiner werden, als $Ae^2 + Af^2$. Nur

in

in dem Fall, wenn der Winkel der Kräfte ein rechter iſt, würde die mittlere Wirkung der Summe der lebendigen Seitenkräfte gleich ſeyn. Und nicht einmal in dieſem Fall iſt von der Wirkung zweyer lebendiger Seitenkräfte eben der Effekt in die Maſſe A zu erwarten, der von einer einzigen lebendigen mittlern Kraft AD entſteht. Denn laufen an die Maſſe in A zwey gleiche Maſſen, mit den Geſchwindigkeiten AB und AC in der Richtung dieſer Seiten; ſo gehen die durch AM und AN in einerley Richtung einander entgegengeſezten Theile der lebendigen Kräfte nicht in die Maſſe A über; ſondern werden auf die Zurücktreibung der durch AM und AN anlaufenden Maſſen verwendet. Der in die Maſſe A übergehende Theil der lebendigen Kräfte iſt nur $Ae^2 + Af^2$, welches kleiner iſt als AD^2. Demnach ſind die Veränderungen in den Bewegungen zuſammenſtoßender Körper aus den Geſetzen der Bewegung lebendiger Kräfte, nicht aus den Regeln der im Parallelogramm vereinigten Kräfte zu beſtimmen.

§. 47.

Gleichheit der Seitenkräfte mit der mittlern.

Es iſt noch übrig zu erweiſen, was wir vorausgeſezt haben: daß nämlich zwo durch AB und AC mit dieſen **Linien proportionalen Intenſitäten wirkenden Seitenkräfte**, in der **Bewegung eines Körpers nach der mittlern Richtung** eben das leiſten, was die **mittlere Kraft** AD auszurichten vermag. Den Beweis hiervon giebt der Verfaſſer oben in der III. **Vorl.** zum §. 60. Ueberhaupt aber erhellt, daß dieſe Gleichheit nicht ſtatt finden kann, wo nicht die Elementarwirkungen der

Kräfte

Kräfte AB und AC auf die mittlere Richtung bezogen, gleich ſind; d. i. wo nicht ihre Wirkungen, wodurch der Körper in der mittlern Richtung gereizt wird, mit der Wirkung der mittlern Kraft AD gleich ſind. Findet ſich aber dieſe Gleichheit, ſo muß nothwendig in der mittlern Richtung von gleichen Kräften gleiches bewirkt werden. Damit alſo dieſe Gleichheit erhellt, ſo laſſet uns annehmen, die mittlere Kraft wirke auf eine entgegengeſezte Art durch AR; und wir werden finden, daß die Elementarwirkung dieſer Kraft AR, gleich iſt der Summe der Wirkungen der Kräfte AB und AC, die ihr widerſtehen, und ſie zu hindern ſtreben. Die Intenſitäten dieſer drey Kräfte ſollen ſich verhalten, wie die Linien AD, AB, AC, und die Längen der Elementarwirkungen, wie dn; dx; dy. Demnach muß ſeyn $AD.\,dn = AB.\,dx + AC.\,dy$; und die Kräfte müſſen ſo wirken, daß die leztern die Wirkung der erſtern zu hindern ſtreben.

Um aber dieſe Gleichheit zu erhalten, müſſen hier die Wirkungen der Kräfte AB und AC beſonders gemeſſen werden, und die Kräfte AB und AC dürfen nicht vereinigt nach einerley Richtung in einerley Maſſe wirken. Denn ſind ſie vereinigt, ſo iſt ihre Wirkung nicht $AB.\,dAB + AC.\,dAC$, ſondern vielmehr $(AB+AC).\,d\,(AB+AC)$ nach §. 44. Alſo müſſen dieſe Kräfte abgeſondert bleiben, welches, da ſie auf einerley Maſſe in A angewandt werden, hier nicht anders möglich iſt, als wenn ihre Richtungen abgeſondert bleiben. Denn man begreift überhaupt, wenn die Summe der Wirkungen abgeſonderter Kräfte, z. B. $Pds + Qdz$, gegeben iſt; ſo wird dieſe Summe verändert, wenn die Kräfte vereinigt ſind, daß daraus eine Kraft $P+Q$

wird

wird. Soll dieſe Vereinigung vermieden werden; ſo müſſen entweder ihre Richtungen abgeſondert bleiben; oder, wenn ſie auch in übereinſtimmender oder gleichlaufender Richtung wirken, müſſen ſie in verſchiedene Maſſen wirken, wie ſolches beym Hebel geſchieht, wenn zwey Gewichte an eben dem Hebelarm in verſchiedenen Entfernungen vom Ruhepunkte aufgehangen werden. Die Gleichheit einer Wirkung mit der Summe mehrerer abgeſonderter Wirkungen, iſt von der Gleichheit mit der Wirkung dieſer mehrern in eine vereinigten Kräfte weit verſchieden. Zum Gleichgewicht aber wird Gleichheit der einander hindernden Wirkungen erfordert, damit keine davon bewegend wird. Sind auf einer Seite mehrere ungleiche Wirkungen vorhanden, ſo können ſie in einerley entgegengeſezten Richtung, und auch in verſchiedener wirken; im erſten Fall wirken ſie entweder beſonders; oder ſie vereinigen ſich zu einerley Wirkung. Dieſe drey Fälle ſind zu unterſcheiden.

Dieſes vorausgeſezt, ſieht man die Gleichheit der entgegengeſezten Wirkungen in unſerm Fall leicht ein. Setzet, es geſchehe eine Bewegung in der Richtung der Linie AD, oder AR, durch den ſehr kleinen Raum Am; ſo würde die Maſſe aus dem Punkt A in den Punkt m verſezt, und die Länge dieſer Elementarwirkung wäre Am, d. i. dAD; die angenommene Intenſität aber iſt AD. Wird alsdenn mit dem Halbmeſſer BA aus B der Bogen An; und mit dem Halbmeſſer CA aus C der Bogen Ao beſchrieben; ſo iſt mn der Raum oder die Länge der Wirkung der Kraft AB, und mo die Länge der Wirkung der Kraft AC.

Man

Man verzeichne das Parallelogramm ABCD; und es wird ſeyn Am : mn = r : ſin. mAn = r : coſ. AmB. Da aber BA und Bm als unendlich nahe und gleichlaufend angeſehen werden können; ſo wird Am : mn = r : coſ. DAB.

Aber r : coſ. DAB = AB : Ae, folglich $mn = \frac{Ae. Am}{AB}$, oder $dx = \frac{Ae. dn}{AB}$. Eben ſo erhellt, daß

$$mo = dy = \frac{Af.}{AC} dn.$$

Multiplicirt die Intenſitäten in die Länge, ſo bekommt ihr die mittlere Elementarwirkung AD. dn

$$= AB. \frac{Ae}{AB}. dn + \frac{Af}{AC}. AC. dn = (Ae + Af) dn.$$

Umgekehrt ſchließt man aus dieſer Gleichheit, daß Ae + Af = der Diagonale des Parallelogramms AD. Denn bey jeder Lage der mAfD muß die **Elementarwirkung** der in dieſer Linie in der Richtung AmR wirkenden Kraft = (Ae + Af) dn ſeyn, um das Gleichgewicht zu erhalten. Da aber die **Länge** dieſer Elementarwirkung dn iſt, ſo muß ihre Intenſität ſeyn = Ae + Af = AB. coſ. BAD + AC. coſ. DAC, was für eine Lage auch die Linie RAD hat. Die **Richtung** der wirkenden **Kraft** aber iſt die gerade **Linie**, worinn ihre Intenſität am größten: denn dies iſt ein ſolches Kennzeichen der Richtung einer Kraft, daß ſich dieſe durch jenes beſtimmen läßt. Aber AB. coſ. BAD + AC. coſ. DAC iſt ein Größtes in der **Diagonale** des unter dem gegebenen Win-

kel CAB, und den zugleich gegebenen Seiten AB und AC verzeichneten Parallelogramms.

Denn AB. coſ. BAD + AC. coſ. DAC = AB. $\surd$(1 — ſin. BAD²) + AC. $\surd$(1 — ſin. DAC²). Daher im Fall des Größten $\frac{-\text{AB. Sin. BAD. d. Sin. BAD}}{\text{coſ. BAD}} - \frac{\text{AC. ſin. DAC. d. ſin. DAC}}{\text{coſ. DAC}} = 0$, und weil BAD + DAC = Conſtans, ſo iſt auch $\frac{-\text{d. ſin. BAD}}{\text{coſ. BAD}} = \frac{\text{d. ſin. DAC}}{\text{coſ. DAC}}$. Hieraus erhält man AB. ſin. BAD = AC. ſin. DAC, d. i. Be = Cf, wenn Be, Cf Lothe auf die Linie AD. Dies iſt ein Zeichen, daß die Linie AD die Diagonale. Eben dies iſt klar, in was für einer Lage man auch die Linie RAD annimmt, wofern nur der Winkel BAC, oder Summe, oder Unterſchied der Winkel BAD und CAD, die die Linie RAD mit AB und AC macht, beſtändig geſezt wird.

§. 48.

Reſpektive Kräfte.

Aus dieſem Fall erhellt, daß die Wirkungen der Kräfte AB und AC, in den Richtungen AB und AC, ſich verhalten wie Ae. dn, und Af. dn, wenn eine Bewegung in der Diagonale AD erfolgt. Dieſe Wirkungen verknüpfter Kräfte nenne man, in Rück-

Rükſicht auf eine gewiſſe beſtimmte Richtung, worinn die Bewegung erfolgen ſoll, reſpektive oder relative Wirkungen, um ſie deſto deutlicher von den abſoluten Wirkungen der Kräfte zu unterſcheiden, die ſie in eben den Richtungen, nach welchen ſie, jede beſonders, ſtreben, auszuüben ſuchen.

Wirken mehrere Kräfte in eine und dieſelbe Maſſe, ſo müſſen die einander hindernden reſpektiven Kräfte gleich ſeyn, um ein Gleichgewicht zu erhalten. Die Größe aber dieſer reſpektiven Wirkungen wird aus der Intenſität der abſoluten Kräfte, und der Länge der reſpektiven Wirkung, oder dem Raum beſtimmt, wodurch ſie die Maſſe in einer gegebenen Richtung zu bewegen ſtreben, und bey erfolgender Bewegung wirklich bewegen. Beym Gleichgewicht der am Hebel angebrachten Kräfte haben wir ein Beyſpiel von ſolchen reſpektiven Wirkungen, die wir oben §. 37. betrachtet haben.

§. 49.

Reſpektiver Stoß.

Es laufen die Körper A und B (Fig. 16. Taf. XV.) mit den Geſchwindigkeiten a und b, in eben dem Augenblick auf die Punkte A und B, der unbiegſamen, in C dergeſtalt befeſtigten Linie AB, daß ſie ſich um C zwar drehen, ſonſt aber nach keiner Seite weichen kann. Wird daher der Arm CA niedergedrückt, ſo wird der Punkt B des Arms CB gehoben; und da entweder beydes zugleich, oder keines von beyden erfolgen muß, ſo werden ſich die Räume, wodurch ſich die Punkte A und B zu gleicher Zeit bewegen, wie CA und CB verhalten. Entſteht keine Bewegung wegen dem Gleichgewicht einander hindernder

Wirkungen, ſo werden doch Beſtreben oder Elementarwirkungen von ſolchen Längen da ſeyn, die ſich verhalten wie die Räume, d. i. wie die Längen der Arme.

Die Größe des Stoßes lebendiger, nicht frey, ſondern zugleich auf einmal wirkender Kräfte, wovon jede durch ihre gleichzeitige Wirkung die Länge der andern beſtimmt, zu finden; ſuchet die Intenſitäten der einzelnen beſonders wirkenden Kräfte, und multipliciret ſie in die Längen der reſpektiven Wirkungen. §. 48. Aber die Intenſitäten lebendiger Kräfte verhalten ſich wie die Maſſen in die Geſchwindigkeiten multiplicirt. §. 43. 2. Die Längen der Wirkungen wie CA : CB. Folglich die reſpektiven Wirkungen wie Aa. CA : Bb. CB, wenn a und b die abſoluten Geſchwindigkeiten der Körper A und B ausdrücken, d. i. die reſpektiven Wirkungen der Körper verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten und Entfernungen vom Ruhepunkt. Iſt daher Aa = Bb, ſo werden dieſe reſpektiven Wirkungen im Gleichgewicht ſeyn, wenn CA = CB. Der Punkt C, wenn auf beyden Seiten Gleichheit entgegengeſezter Wirkungen, folglich Gleichgewicht vorhanden iſt, heißt der Mittelpunkt des Stoßes.

Die ſtoßenden Wirkungen ſich bewegender vollkommen harter, und gegenſeitig in einander wirkender Körper, ſind ebenfalls reſpektive, wenn ſie unmittelbare Wirkungen einer Maſſe in die andere ſind. Denn obgleich die Richtungen der Wirkungen in eben der Linie einander entgegengeſezt ſind; ſo beſtimmt doch die, an die andere ruhende, oder langſamere, anlaufende Maſſe, die Länge der Gegenwirkung,

wirkung, ohne ihre Intenſität zu vermehren. Eben dieſes findet beym Zuſammenlauf der Körper ſtatt. Denn der anlaufende Körper reißt den andern in eben dem Augenblicke, da er ihn berührt, durch eben den Raum zugleich mit ſich fort, ehe er ihm die verhältnismäßige Geſchwindigkeit eingedrückt hat, wodurch er für ſich ſelbſt durch jenen fortbewegt würde. Denn die von der anlaufenden fortbewegte Maſſe muß im Anfange nicht mit ihrer eignen, ſondern mit der fremden Geſchwindigkeit der anlaufenden fortrücken. Aber die **Intenſitäten der Wirkung und Gegenwirkung** verhalten ſich wie die Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten; und die **Längen** wie die **gleichen** Räume. Folglich iſt die **ganze Gegenwirkung** des leidenden Körpers der **ganzen Wirkung** gleich. Daher auch die in der einen Maſſe verlohrnen **lebendigen Kräfte** den in der andern erzeugten gleich, und auch die **Intenſitäten** der Wirkungen und die **Zeiten** gleich. Vergl. §. 31. 33. und 44. 3. Dieſes wird unten zu Ende der XVI. §. 294. mit einem beſondern Beyſpiele erläutert werden.

Sechszehnte Vorleſung.

Vom Zuſammenſtoß ſich bewegender Körper, und den daher entſtehenden Bewegungen.

Inhalt.

§. 280 — 285. Zuſammenſtoß harter, weicher und elaſtiſcher Körper. Das allgemeine und beſondere hierbey. §. 286 — 294. Allgemeine Regeln des geraden Stoßes, woraus ſich der Erfolg in beſondern Fällen beſtimmen läßt. Die §. 294. beygefügte Anmerkung erklärt einen hier vorkommenden widerſinnigen Satz.

---

§. 280.

Wir kommen jezt zu den Regeln, die zwey Körper bey ihrem Zuſammenſtoß beobachten, ſowohl wenn beyde in Bewegung, als wenn nur einer ſich bewegt. Erſt müſſen wir aber von der verſchiedenen Beſchaffenheit zuſammenſtoßender Körper kürzlich reden. Wir verſtehen hier feſte, von flüßigen verſchiedene Körper, deren Theile, innerer Bewegung beraubt, mit einer merklichen Kraft unter ſich zuſammenhängen. Wir übergehen hier flüßige Körper, die von anderer Beſchaffenheit ſind, deren Theile jedem Druck weichen, und innere Bewegung annehmen. Was von ihrem Zuſammenſtoß zu ſagen, gehört in die Hydraulik. Die feſten Körper theilen ſich in harte und weiche. Jene ſind, deren Theile innerhalb des Körpers einander nicht näher kommen können, ſo daß, wollte man einige einzeln

einzeln ohne die übrigen bewegen, man ſie völlig ab- ſondern müßte: weiche aber heiſen, welche Theile haben, die ſich einwärts ſtoßen oder drücken, und ohne Zerreiſung des Körpers aus ihrer Stelle ver- rücken laſſen. Und dann heiſen ſie im engern Ver- ſtande ſo, wenn die einwärts gedrückten Theile nach aufhörender Wirkung der äuſern Kraft nicht wieder zurücktreten, noch in ihre vorige Lage, entweder ganz oder wenigſtens zum Theil zurückkehren. **Elaſtiſche** aber heiſen, deren Theile zwar dem Eindruck äuſerer Kräfte weichen, bey deſſen Nachlaſſen aber ſogleich ihre vorige Stelle und Lage entweder ganz oder zum Theil wieder einnehmen. Wir übergehen, was ſich über die Natur der Kraft, wodurch der Theile Zu- ſammenhang in den Körpern zuwegebracht und er- halten wird, fragen lieſe: dies iſt in der Naturlehre, nicht in der Mechanik, zu erörtern.

§. 281.

Vollkommen harte Körper heiſen, deren Theile ſchlechterdings nicht nachgeben, noch ſich beugen laſ- ſen. Da ſich aber der Zuſammenſtoß, wodurch ein Körper dem andern ſeine Bewegung mittheilt, nicht begreifen läßt, wo nicht beyde Körper gleiche Verän- derung von einander leiden; und da dies nicht geſche- hen kann, wenn die Körper mit vollkommener Härte verſehen ſind, weil ihre Theile keiner Kraft weichen, **ſo ſchlieſen wir daraus, daß ſolche Körper keine Bewegung aus dem Zuſammenſtoß empfangen.** Auch findet man dergleichen in der Natur nicht, ſo- viel die Erfahrung lehrt; ſieht nicht ein, wozu ſie, wären ſie da, nützen. Hingegen findet man deren in großer Menge, die zwar durch anderer Stoß ver-

ändert werden, aber nur wenig, weil ihre Theile in dem Augenblick, da ſie der Wirkung widerſtehen, nur eine ſehr kleine Bewegung empfangen. Und ſolche Körper, die der Erfahrung nach elaſtiſch ſind, pflegt man doch **harte** zu nennen, wenn ſie von der geringſten Bewegung der Theilchen zerſpringen oder zerreißen, und überhaupt, wenn die Theilchen dergeſtalt von einander getrennt werden, daß ihr Zuſammenhang völlig aufhört. Daß ſie aber elaſtiſch ſind, lehrt der Schall, den ſie beym Zerſpringen von ſich geben, und der ein Zeichen der zitternden Bewegung iſt, ſo die Theilchen vom Stoß erhielten. Hieher gehört die marmorne Kugel, die beym Fall auf eine mit Wachs dünn überzogene marmorne Tafel durch ihren Stoß nicht blos einen Punkt, ſondern einen ziemlich beträchtlichen Fleck in dem Wachſe hervorbringt.

§. 282.

Weiche im engern Sinn, heiſen die Körper, deren Theile in der Richtung des Stoßes weichen, weder nach dem Stoß zurückſpringen, noch dem geſtoßenen Körper die erſte Geſtalt wieder geben. §. 280. Dieſe leiden alſo beym Zuſammenſtoß eine Aenderung der Geſtalt, und ihre einwärts bewegten Theile nehmen hernach eine andere Lage an. Hierinn ſind weiche Körper harten, deren Geſtalt bey und nach dem Zuſammenſtoß unverändert bleibt, entgegengeſezt. Darinn hingegen kommen beyde überein, daß die Theile nicht rückwärts ſtreben, noch ſich, die erſte Geſtalt anzunehmen, bewegen, als welche in den einen nicht verloren gieng, in den andern verloren nicht zurückkehrt. Wegen dieſer Uebereinſtimmung begreiſen

ſen wir auch beyde, ſonſt verſchiedener und entgegengeſezter Art, unter einer Gattung.

§. 283.

Die andere entgegengeſezte Gattung enthält die elaſtiſchen Körper. Unter dieſer Benennung verſteht man diejenigen, deren Theile ihre Lage beym Zuſammenſtoß verändern, aber zur erſten nach dem Stoß wieder zurückkehren, und dem Körper ſeine vorige Geſtalt wieder geben. Hierinn ſind ſie das Gegentheil ſowohl harter als weicher Körper. Auf was für Art aber dieſe Aenderung und Wiederherſtellung der Geſtalt geſchieht, und was die Urſache der Elaſticität, frag uns der Leſer hier nicht. Dies, nebſt der weitern Erklärung der Eigenſchaften elaſtiſcher Körper, überlaſſen wir den Naturforſchern.

Einen einzigen Verſuch wollen wir doch beybringen, um zu zeigen, was für Veränderung elaſtiſche Körper beym Zuſammenſtoß leiden. Können wir ſchon, da wir hier mit der Mechanik zu thun haben, was in die Naturlehre gehört, und worauf ſich der Kalkul ſtüzt, als Hypotheſe oder Foderung annehmen, ſo pflegen wir doch gern, was wir auch in vorigem gethan, die erſten Grundlehren mit unzweifelhaften Verſuchen zu beſtätigen.

§. 284.

Es ſey alſo ABCG (Taf. XII. Fig. 5.) ein eiſerner oder ſonſt metallener, an einem Faden in A aufgehängter Ring. Man bringe in L eine kleine hölzerne Kugel in einer Entfernnng von 3 oder 4 Linien von A. Schlägt man alsdenn ſtark auf den Ring in C, ſo fährt die Kugel in L ſchnell nach dem Punkt C,

woraus zur Genüge erhellt, daß der Punkt A ſogleich im Augenblick, da der Schlag geſchah, ſich gegen E bewegt hat. Hieraus ſehen wir, daß die kreisrunde Geſtalt des elaſtiſchen Ringes in die eyrunde übergeht, und plattgedrückt wird: folglich nicht nur die vom ſchlagenden Körper unmittelbar berührten, ſondern alle und jede Theile des ganzen Körpers beym Zuſammenſtoß ihre Lage verändern.

Eben ſo verhält es ſich bey einer elaſtiſchen Kugel. Denn man denke ſich die Holung des Ringes voll ähnlicher elaſtiſcher Ringe, ſo iſt offenbar, daß ſie ſich insgeſammt eben ſo bewegen. Daher werden auch elaſtiſche Körper in allen ihren Theilen verändert, und nehmen, während des Stoßes, eine andere Geſtalt an.

§. 285.

Man findet viel Körper, die nach dem Stoß ihre vorige Geſtalt dem Anſchein nach vollkommen wieder annehmen, und **vollkommen elaſtiſche** heiſſen. Andere, deren Geſtalt nach dem Stoß nur zum Theil mit der vorhergehenden einerley iſt, ſind **unvollkommen elaſtiſch**. Jene werden wir hier betrachten, um aus ihren Bewegungen beym Zuſammenſtoß auch der **harten** und **weichen** Bewegungen einzuſehen. Denn dieſer Zuſammenſtoß wird aus jener ihrem leicht hergeleitet. Auch begreift man hier harte Körper mit den weichen unter einer Gattung.

§. 286.

Trift ein Körper auf einen andern; dieſer mit ſeiner Gegenwirkung, jener mit ſeiner Wirkung, ſo widerſtehen ſie einander ſo lange, bis beyde einerley Geſchwin-

Geſchwindigkeit erhalten haben. Dann hört aber ſogleich aller Zuſammenſtoß auf, wo nicht die Körper, die verlohrne Geſtalt wieder annehmend, eine neue Bewegung hervorbringen, d. i. wo nicht die Körper mit Federkraft verſehen ſind. Hört aber der Zuſammenſtoß auf, ſo werden die Körper mit jener gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit ſich zu bewegen fortfahren, was für eine Bewegung ſie auch vor dem Stoß hatten. Werden hingegen die Körper beym Zuſammenſtoß zuſammengedrückt, und ſtreben ſie; nach Empfang gleicher Geſchwindigkeit in ihre Geſtalt ſich wieder herzuſtellen, ſo entſteht ein neuer Zuſammenſtoß, wodurch die durch den vorhergehenden Stoß vereinigten Körper nach entgegengeſezten Richtungen wieder getrennt werden. Wo aber jenes nicht erfolgt, daſelbſt trennen ſie ſich nicht, verändern auch nicht die gemeinſchaftliche Richtung und Geſchwindigkeit.

§. 287.

Werden aber die Körper durch den Stoß zuſammengedrückt, oder ſonſt verändert, und ſetzen ſich hernach nicht wieder in die erſte Geſtalt, ſo geht die Kraft, die der bewegende auf dieſe Aenderung der Geſtalt verwendet, nothwendig verloren. Daher geht beym Zuſammenſtoß ein Theil der Kräfte, folglich auch der Bewegung verloren: da nichts hingegen verloren geht, wenn vollkommen elaſtiſche Körper nach dem Stoß ſich völlig wieder herſtellen. Denn hier wird der in Aenderung der Geſtalt erſt verlorne Theil der Kräfte, von der die Geſtalt mit eben der Kraft, womit ſie verändert wurde, wieder herſtellenden Schnellkraft wieder erſtattet.

§. 288.

Hierauf gründet ſich die Berechnung der Bewegungen nach dem Zuſammenſtoß, wenn man die Körper entweder vollkommen elaſtiſch, oder vollkommen hart, oder weich annimmt. Zugleich iſt aber zu merken, daß der Stoß entweder **gerad** oder ſchief. **Gerad** heißt er, wenn die Richtung der Bewegung zuſammenſtoßender Körper in der Linie durch die Mittelpunkte beyder Körper, und auf ihre Oberfläche, wo die Berührung geſchieht, ſenkrecht iſt. In den übrigen Fällen heißt der Stoß allemal ſchief. Zuerſt wollen wir den **geraden** betrachten

§. 289.

Um uns die Sache deſto leichter vorzuſtellen, laßt uns für die in ihrer Bewegung auf einander treffenden Körper Kugeln annehmen; ſo erhellt ſogleich, daß der Stoß hier allemal gerade, wenn die Körper ſich in der geraden Linie durch ihre Mittelpunkte bewegen. Es ſeyn alſo A und B (Taf. XII. Fig. 6.) zwo Kugeln, die Bewegung von A nach D ſey bejaht; die von D nach A hingegen verneint; A bewege ſich gegen B in der Richtung AD; B in eben der Linie von c gegen E.

§. 290.

Ferner iſt die Bewegung, womit die Körper ſich von einander entfernen, oder einander ſich nähern, ſo die **relative** heißt, von ihrer **abſoluten** Bewegung, die in jedem für ſich betrachtet vorhanden, zu unterſcheiden. Es erhellt aber, daß die relative Bewegung allemal entweder] die Summe oder der Unterſchied der abſoluten Bewegungen. Sezt man

nämlich

nämlich des Körpers A Geſchwindigkeit = H, des Körpers B, = h, und bewegen ſich die Köeper in entgegengeſezten Richtungen, nähern ſie ſich, oder entfernen ſie ſich von einander, ſo iſt H + h = der relativen Geſchwindigkeit; verfolgt aber der eine den andern, ſo iſt die relative Geſchwindigkeit H — h. Dies iſt für ſich klar.

§. 291.

Die Bewegung der Körper läßt ſich auch in anderer Rückſicht noch weit leichter als relativ anſehen. Man gedenke ſich zwey Körper auf einer wagerechten Ebene, die Ebene ſelbſt bewege ſich mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, die alſo beyden Körpern A und B gemein iſt! die Körper aber bewegen ſich unterdeſſen in entgegengeſezten Richtungen mit Geſchwindigkeiten, die ſich verkehrt verhalten, wie die Maſſen. Denn daß ſich die Geſchwindigkeiten zweyer Körper A und B jede in zwo andere zerlegen laſſen, wovon die eine beyden Körpern gemein, die andere ſich umgekehrt verhält wie die Größe der Materie, wollen wir durch Rechnung ſogleich beſtätigen.

§. 292.

Z. B. bewegen ſich beyde Körper A und B in bejahter Richtung CD (§. 289.) die Maſſe des Körpers A ſey M, des Körpers B, m; des Körpers A Geſchwindigkeit ſey C, des Körpers B Geſchwindigkeit c; und die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit f. Die Geſchwindigkeit aber im verkehrten Verhältnis der Maſſe ſey in A = y, io iſt ſie in B = $\frac{My}{m}$, die =

$-\frac{My}{m}$ zu ſetzen, weil man annimmt, daß ſich B mit dieſer Geſchwindigkeit in verneinter Richtung gegen A bewegt. Demnach

$$1.)\ f + y = C. \quad 2.)\ f - \frac{My}{m} = c,$$ woraus

man, f aus beyden Gleichungen gefunden, erhält

$$C - y = c + \frac{My}{m},\ \text{folglich}\ y = \frac{m.(C-c)}{M+m}.$$

Dies iſt die Geſchwindigkeit des Körpers A ſeiner Maſſe umgekehrt proportional genommen. *)

Sezt

*) Die Summe dieſer Geſchwindigkeiten $y + \frac{My}{m}$ iſt = der reſpektiven Geſchwindigkeit der Körper, d. i. = dem Unterſchied der Geſchwindigkeiten C und c, wenn ſi nach einer; = ihrer Summe, wenn ſie nach entgegengeſezter Seite ſich bewegen oder einander begegnen. Denn $y = \frac{m.(C-c)}{M+m}$, folglich $\frac{My+my}{m} = C-c$, oder $\frac{My}{m} + y = C-c$, wenn die Geſchwindigkeit c mit C nach eben der bejahten Seite gerichtet iſt. Begegnen ſich die Körper, ſo iſt die Größe c verneint zu nehmen, und

Sezt man den Werth der Geſchwindigkeit y in der Gleichung $f = C - y$, ſo findet man

$$f = \frac{CM + cm}{M + m},$$

welches die Geſchwindigkeit iſt, die wir beyden Körpern gemein angenommen, oder womit ſich die Ebene, worauf die Körper A und B liegen, bewegt, und zugleich A und B fortrücken, indeß ſie ſich in der Ebene ſelbſt mit Geſchwindigkeiten bewegen, die ihren Maſſen umgekehrt proportional ſind.

§. 293.

Iſt gleich das, was wir geſagt haben, daß ſich nämlich die Geſchwindigkeit, womit die Körper fortrücken, in zwo andere zerlegen läßt, deutlich genug, da die Rechnung lehrt, daß die geſuchten Größen die zu beſtimmenden ſind: ſo halten wir doch nicht für unnütz, die Sache mit einem Beyſpiel zu erläutern und zu beſtätigen. Es ſey alſo die Geſchwindigkeit des Körpers $A = C = 6$; und ſeine Maſſe $= M = 8$; die Geſchwindigkeit in $B = 4 = c$, und die Maſſe $= m = 10$: ſo iſt die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit der Ebene

$$f = \frac{CM + cm}{M + m} = \frac{48 + 40}{18} = 4\tfrac{8}{9},$$

und

$$y = \frac{m(C - c)}{M + m} = \tfrac{20}{18} = 1\tfrac{1}{9};$$

daher $f + y = = 4\tfrac{8}{9}$

und es wird

$$y + \frac{My}{m} = C + c.$$

Daher iſt die hier geforderte Zerlegung der Geſchwindigkeiten der Körper ſehr leicht. (T.)

$= 4\frac{8}{9} + 1\frac{1}{9} = 6$. Dieſe Geſchwindigkeit aber iſt genau mit der in A angenommenen einerley: woraus erhellt, daß es einerley, ob wir ſagen, A bewege ſich mit der Geſchwindigkeit $= 6$ in der Richtung AD; oder ob wir ihm eine doppelte Geſchwindigkeit beylegen, eine gemeinſchaftliche $= 4\frac{8}{9}$ und die andere $= 1\frac{1}{9}$, die im verkehrten Verhältnis der Materie des Körpers ſteht. Eben dies ſehen wir beym Körper B. Denn die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit $f = 4\frac{8}{9}$, die andere verneinte aber, womit er gegen A fortrückt, und die ſich zur gehörigen Geſchwindigkeit in A verhält wie die Maſſe in A zur Maſſe in B, findet man $= -\frac{8}{9}$, daraus wird die ganze Geſchwindigkeit des Körpers B $= 4\frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 4$, d. i. ſo groß, als wir ſie Anfangs annahmen.

Man nehme an, die Körper bewegen ſich in entgegengeſezten Richtungen gegen einander, ſo muß man mit Beybehaltung der vorigen Benennungen ſtatt c ſetzen $-c$, dadurch wird die gemeinſchaftliche

Geſchwindigkeit $f = \frac{CM - cm}{M + m} = \frac{48 - 40}{18} = \frac{4}{9}$;

die Geſchwindigkeit in A, die ſeiner Maſſe verkehrt

genommen proportional, oder $y = m. \frac{C + c}{M + m} = \frac{100}{18} = 5\frac{5}{9}$, und die ganze Geſchwindigkeit in A $= f + y = \frac{4}{9} + 5\frac{5}{9} = 6 = C$, wie angenommen worden. Ferner hat auch B die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit $f = \frac{4}{9}$, und zugleich eine andere ſeiner Maſſe umgekehrt proportional $= -\frac{50}{9} \cdot \frac{8}{10} = -4\frac{4}{9}$, daß alſo die ganze Geſchwindigkeit in B $=$

$-4\frac{4}{9}$

$-4\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=-4$, einerley mit der dem Körper B Anfangs gegebenen. Aber -4, eine verneinte Größe, weil B ſich in der, wegen der bejahten Richtung CD, verneinten Richtung DC bewegt.

§. 294.

Aus dem vorgetragenen und erwieſenen findet man die Regel der Bewegung beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper ohne Schwierigkeit. Denn da die Körper, ſofern ſie ſich mit der gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit der Ebene bewegen, weder auf einander wirken, noch von einander leiden, ſo hängt die ganze beym Zuſammenſtoß entſtehende Veränderung blos von den Geſchwindigkeiten im verkehrten Verhältnis der Maſſen ab.

Hier verhält es ſich aber ſo: Die Geſchwindigkeiten und Kräfte der Körper werden zur Zuſammendrückung der elaſtiſchen Körper angewendet, und in Aenderung ihrer Geſtalten gänzlich verzehrt; bey welchem Geſchäfte ſie wie drückende Kräfte wirken, und auch für ſolche zu halten ſind. (*) Nach geendigtem Stoß

(*) Hier ſcheint das Maas der **lebendigen Kräfte** beym erſten Anblick eine neue Schwierigkeit zu leiden. Denn was wir hier behaupten, ſcheint ſo viel ſagen zu wollen, als entſtünde einerley und gleichgroßer Effekt von Körpern, deren Geſchwindigkeiten ſich verkehrt verhalten wie die Maſſen: die doch, da ſie ungleiche Kräfte haben, nicht gleiches hervorbringen können. Denn ihre Kräfte ſind ungleich. Es verhalten ſich z. B. die Maſſen zweyer Körper wie 4 : 1, und die Geſchwindigkeiten wie 1 : 4; dann verhalten ſich zwar die Preſſungen wie 4.1 : 1.4, d. i. ſie ſind gleichgros,

Stoß aber geben die Körper, indem ſie zur erſten Geſtalt zurückkehren, die aufgezehrten Kräfte einander gros, und daher auch die Wirkungen und Effekte, die ſie im erſten Augenblick äuſern, gleichgros, aber doch verhalten ſich die lebendigen Kräfte wie 4. 1 : 1. 4. 4 = 4 : 16 = 1 : 4, und ſind daher verſchieden.

Mit Recht fragen wir alſo, wie Gleichgewicht hier Statt haben kann, da die Kräfte ungleich ſind. Man könnte ſagen, daß etwas ähnliches öfters bey lebendigen Kräften vorkommt, und unter andern im Parallelogramm der Kräfte gefunden wird. Dieſe Ausflucht iſt aber nicht nöthig. Die Urſache hiervon wird ſich gerade zu offenbaren, wenn wir die Wirkungsart erwägen, wie hier die Körper, wo ihre Maſſen ſich umgekehrt verhalten wie die Geſchwindigkeiten, ihre Kräfte und Bewegungen einander mittheilen. Die Sache verhält ſich ſo: Die Körper wirken im erſten Augenblick des Stoßes auf einander, und jeder ſtrebt des andern Bewegung, wo möglich, ganz zu hemmen und zu zerſtören. Die Menge der auf B wirkenden Theile in A iſt = 4, und der in B = 1; die Geſchwindigkeit aber, womit jedes Theilchen des Körpers B auf A wirkt, iſt = 4; da die Geſchwindigkeit der einzelnen Theile in A nur = 1. Der Anfang aber der Wirkung der Kräfte geſchieht durch den Druck, aus dieſer Urſache iſt der Druck der mit der Geſchwindigkeit = 4 verſehenen Maſſe 1 im erſten Anfang der Wirkung = dem Druck der Maſſe 4, deren Geſchwindigkeit = 1, und es iſt Gleichgewicht: denn die drückenden Kräfte ſind gleich, wenn die Maſſen in die Geſchwindigkeiten gleich ſind. Stellt man ſich daher vor, der ganze Stoß des einen Körpers auf den andern

beſtehe

der zurück; daher wird alles wieder, wie vorhin, in=dem blos die Richtungen der Geſchwindigkeiten ver=ändert

beſtehe in gleichgroßen auf einander folgenden Preſſun=gen, ſo iſt meines Erachtens augenſcheinlich genug, daß in der ganzen Zeit, worinn der Stoß verrichtet wird, die auf einander folgenden Preſſungen einan=der zerſtören, da dies in jedem Augenblick geſchieht: die Preſſungen in dem einen Körper machen mit den im andern ein Gleichgewicht aus, und es bleibt be=ſtändig Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Offenbar iſt hier nichts vorhanden, welches hindert, daß die lebendigen Kräfte ſich nicht verhalten können wie die Quadrate ihrer Geſchwindigkeiten in die Maſ=ſen der Körper multiplicirt. Wir ſagten, der Druck beym Zuſammenſtoß der Körper ſey eine Reihe Fol=gen, und der Stoß werde nicht im Augenblick voll=bracht. Daß dieſes der Natur gemäs, lehrt ſowohl der Schall, den die Körper beym Zuſammenſtoß von ſich geben, als auch das allgemeine Naturgeſetz, nach welchem keine Veränderung durch Sprünge geſchieht; ſondern alles durch unendlich kleine Grade ſich ver=mehrt und vermindert, doch ſo, daß die Zu= oder Ab=nahmen bald langſamer, bald ſchneller auf einander folgen.

Noch eine andere, hier nicht unnütze Bemerkung, will ich beyfügen. Die Lehren von den **toden** und **lebendigen** Kräften hängen ſo genau mit einander zuſammen, daß ſich dieſe aus jenen, und umgekehrt, jene aus dieſen herleiten laſſen, weit gefehlt, daß ſie einander zuwider. Denn gleichwie wir in der An=merkung zu §. 271. erwieſen, daß das Geſetz und Maas der lebendigen Kräfte im Geſetz der Preſſun=

 gen

ändert ſind. Daher iſt nun in A 1.) die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit f, und 2.) die, womit ſich A gegen B bewegt, mit veränderter Richtung; daß alſo die ganze Geſchwindigkeit des Körpers A nach dem Stoß $= \frac{CM+cm}{M+m} - \frac{m(C-c)}{M+m} =$

$C.(M-m)$

gen gegründet iſt; ſo läßt ſich hier auch zeigen, daß vom Geſetz der lebendigen Kräfte das Geſetz für tode abhängt. Denn aus §. 261. Vorl. iſt klar, daß Preſſungen nichts anders als unendlichkleine, oder Elemente lebendiger Kräfte. Sind alſo v und V die Geſchwindigkeiten zweyer Körper, deren Maſſen M und m, und zugleich $M : m = V : v$, oder $V = \frac{Mv}{m}$; ſo iſt auch $dV = \frac{M}{m} dv$, und daher dV proportional dv. Es ſey nun $Mvv = mVV$, oder die lebendigen Kräfte gleichgros; man ſucht das Verhältnis der Preſſungen. Setzet $\frac{M}{m} = a$, ſo iſt $2Mvdv = 2mVdV$, und $2Mvdv = 2amVdv$, daraus wird $Mv = amV$, folglich Mv proportional mV. Daher verhalten ſich die Preſſungen wie die Maſſen durch die Geſchwindigkeiten multiplicirt. Was für Geſchwindigkeiten wir aber auch annehmen, ſo läßt ſich $dV = adV$ ſetzen, woraus man wegen der Wahrheit des Geſetzes der lebendigen Kräfte ſieht, daß das geſagte von allen Preſſungen wahr iſt. (V.)

$\frac{C.(M-m)+2mc}{M+m}$. Und die ganze Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß $= \frac{CM+cm}{M+m} + \frac{M}{m}.$ $\frac{(C-c)m}{M+m} = \frac{2MC+(m-M)c}{M+m}$. Aus dieſen Gleichungen werden alle Regeln des geraden Stoßes hergeleitet, wie wir in der nächſtfolgenden Vorleſung mit mehrerm ſehen werden.

Anmerkung. Dieſen Knoten, ſo es einer, ſcheint mir der Herr Verfaſſer nicht gehörig aufgelößt zu haben. Iſt $Mv = mV$, d. i. verhalten ſich die Geſchwindigkeiten der Körper verkehrt wie die Maſſen, ſo kann nicht zugleich ſeyn $Mvv = mVV$, wo nicht $v = V$, und $M = m$. Man kann alſo nicht annehmen, die lebendigen Kräfte in gerad auf einander ſtoßenden Körpern ſeyn gleichgros, wenn die Geſchwindigkeiten im verkehrten Verhältnis der Maſſen ſtehen, den einzigen Fall ausgenommen, wo ſowohl die Geſchwindigkeiten ſelbſt, als auch die Maſſen gleich ſind.

Sind aber die entgegengeſezten lebendigen Kräfte nicht gleich, ſo können auch weder ihre Wirkungen noch Effekte gleich ſeyn, wie doch ſcheint. Denn die lebendige Kraft Mvv hat im Körper m nach dem Zuſammenſtoß die lebendige Kraft mVV hervorgebracht, und die lebendige Kraft mVV ſcheint in die Körper M die lebendige Kraft Mvv hervorgebracht zu haben.

Die wahren Gründe der Auflöſung ſind in den Anfangsgr. der Dynamik, §. 44. 3. und §. 49. ausgeführt. Sind die auf einander ſtoßenden Körper M und m elaſtiſch oder biegſam, ſo durchlaufen beyde, während der gegenſeitigen Wirkung, einen gewiſſen Raum, indem ſie die Federn der Maſſen zuſammendrücken. Es ſey die ganze Breite des Zuſammenſtoßes, oder der ganze Raum, den die Körper zurücklegen, in ſo viel Theile getheilt, als Einheiten in der relativen Geſchwindigkeit der Körper, d. i. in v + V ſind; oder welches einerley, man gedenke ſich eben ſo viel gleiche und ähnliche in eben der Zeit von beyden Körpern zugleich zuſammenzudrückende Federn, ſo muß nach §. 44. 3. der Theil des Raums, der in eben der Zeit von dem Körper m zurückgelegt wird, ſich zum Theil, den M durchläuft, verhalten wie die Geſchwindigkeiten V : v, d. i. wie die lebendigen Kräfte, die ſich, weil mV = Mv, verhalten wie die Geſchwindigkeiten V : v. Die Menge gleicher Federn, die m zuſammendrückt, wird ſich zur Menge der vom Körper M zuſammengedrückten eben ſo verhalten. Daher, weil auch die Abnahmen der Geſchwindigkeiten ſich verhalten wie die Elementarwirkungen, d. i. wie die lebendigen Kräfte und wie die Geſchwindigkeiten, werden auch in eben der Zeit beyde Körper zur Ruhe gelangen, und aller ihrer lebendigen Kräfte beraubt ſeyn. Dann erzeugen ſich nach wieder losgelaſſenen Federn in beyden Körpern wiederum Effekte und lebendige Kräfte nach entgegengeſezten Seiten, die ſich verkehrt verhalten wie die Maſſen, oder gerade, wie die Geſchwindigkeiten, §. 12. Dyn. Daher verhalten ſich nach dem Stoß die lebendigen Kräfte in m, zu den lebendigen Kräften in M, nach

M, nach entgegengeſezten Richtungen, wie M : m = V : v. Demnach muß ſeyn mVV : Mvv = V : v, und mV = Mv, oder die Intenſitäten in dieſem Fall gleichgros.

Denkt man ſich die Körper ganz unbiegſam, und die lebendigen Kräfte **unmittelbar**, ohne eine andere Zwiſchenkraft, auf einander wirkend; ſo haben wir hier die **reſpektiven** Wirkungen der Kräfte. §. 49. Dyn. Die **abſoluten** Elementarwirkungen verhalten ſich wie Mvdv : mVdV = Pds : Qdz. §. 43. Da aber beyde Körper, während der gegenſeitigen Wirkung, eben den Raum durchlaufen; ſo müſſen auch die Längen dieſer Elementarwirkungen, d. i. ds und dz, gleich ſeyn; welche Gleichheit bey ihnen, **abſolut** betrachtet, nicht Statt findet; ſondern wegen ihrer Verknüpfung beſtimmt hier die Länge der einen die Länge der andern. Auch die Intenſitäten der Elementarwirkungen ſind gleich, P = Q. Daher müſſen auch die **reſpektiven** Elementarwirkungen gleich ſeyn, Mvdv = mVdV; und weil Mv = mV, d. i. weil die Intenſitäten gleich, dv = dV. Die Elementarwirkung mVdV, die größer als die andere Mvdv, beyde abſolut betrachtet, erhöht alſo leztere durch Vermehrung ihrer Länge um einen Theil, der dem Unterſchiede der Geſchwindigkeiten und dem Unterſchiede der Abnahmen dV — dv, proportional iſt. Demnach iſt die Elementarwirkung des Körpers M in den Körper m, mVdV, oder Mvdv + mVdV — mVdv. Denn der Körper M wirkt in m mit ſeiner ganzen **reſpektiven** Elementarwirkung. Daher iſt auch die Summe der nach dem Stoß in m übergegangenen Elementarwirkungen S. mVdV = mVV. Die Elementarwir-

kung mVdV des Körpers m aber wurde zum Theil nämlich mVdV — mVdv zu Vermehrung der Länge der entgegengeſezten Wirkung angewandt; folglich konnte dem Körper M nur der Theil mitgetheilt werden, der zu dieſem Effekt nicht erfordert wurde. Dieſer Theil war aber mVdV — mVdV + mVdv = mVdv, der in den Körper M übergehen konnte. Seine lebendige Kraft nach dem Stoß iſt alſo S.mVdv = S.Mvdv = Mvv.

Daß dieſer Effekt aus der gegenſeitigen Wirkung entſteht, läßt ſich auch aus §. 21. Dyn. ſchlieſen. Denn indem dieſe Körper, in welchen Mv = mV, gerad auf einander ſtoßen, ſo iſt jeder in Rückſicht des andern, während der Wirkung, ein feſter Widerſtand. Es ſind nämlich die Intenſitäten der Wirkungen gleichgros, wirken gleiche Zeit durch, und verlieren zugleich in eben dem Augenblick ihre Kraft, einander zu widerſtehen. Der in m anlaufende M läuft alſo mit ſeiner ganzen Kraft und Geſchwindigkeit, womit er ankam, zurück; eben dies muß bey dem andern Körper m erfolgen, dem M ein hinreichend widerſtehendes Hindernis. (T.)

Eilfter

Eilfter Zuſatz.

Von der relativen Bewegung.

Inhalt.

§. 309. Relative Bewegung. §. 310. — 313. Beſtimmung des Raums und der Zeit bey der geradlinigten relativen Bewegung, und §. 314. wenn die Körper ſich parallel bewegen. §. 315. 316. Relative Bewegung in concentriſchen Kreiſen. §. 317. — 319. Relative Bewegung, wenn die Körper ſich in zuſammenſtoßenden Linien bewegen, und der eine Körper ruht, und §. 320. — 326. wenn kein Körper ruht.

§. 309.

Von der relativen Bewegung haben wir in der vorhergehenden Vorleſung Erwähnung gethan. Hier ſoll ſie, da ſie in der Mechanik von der größten Wichtigkeit, etwas ausführlicher vorgetragen werden.

Zwey Körper, A und B, (Taf. XII. Fig. 6.) bewegen ſich in eben der Richtung von c nach D, welche Richtung wir hier auch, wie oben, bejaht nennen; man fragt, um wie viel dieſe Körper in einer gegebenen Zeit einander entweder näher ſind, oder ſich weiter von einander entfernen. Dies findet man ſogleich, wenn man den einen als ruhend betrachtet, den andern aber mit dem Unterſchied der in ihnen vorhandenen Geſchwindigkeiten ſich bewegen läßt. Man nehme an, B ruhe, A aber rücke mit dem Unterſchied der Geſchwindigkeiten in A und B fort;

ſo erhält man den Raum, um den in gegebener Zeit die Körper einander entweder näher oder entfernter ſind. Sind aber die Richtungen der bewegten Körper entgegengeſezt, cE und cD, und denkt man ſich den einen Körper ruhend, ſo iſt der andere mit der Summe der in ihnen vorhandenen Geſchwindigkeiten fortrückend zu nehmen. Denn die Entfernung der Körper vermehrt oder vermindert ſich eben ſo, es mag jeder mit ſeiner Geſchwindigkeit fortrücken, oder der eine in ſeiner Stelle bleiben, und der andere ſich mit der Summe der Geſchwindigkeiten bewegen. So kann man auch bey andern relativen Bewegungen den einen Körper allemal ruhen, und den andern nur ſich bewegen laſſen.

§. 310.

Bey der geradlinigten relativen Bewegung wird der Raum leicht beſtimmt, den die Körper durch dieſe Bewegung in gegebener Zeit zurücklegen, ſo wie man auch aus dem gegebenen Raum die Zeit findet. Auch iſt der Ort anzugeben, wohin die Körper in eben dem Augenblick zugleich gelangen, und die Zeit, nach deren Verlauf dies erfolgt.

Die Geſchwindigkeit des Körpers A ſey a, des Körpers B, b; ſetzet, A und B bewegen ſich in eben der bejahten Richtung AD: alsdenn wird die relative Geſchwindigkeit = a — b. §. 309. Auch heiſe die Weite AB zwiſchen A und B im Anfang der Bewegung d, und da man die Bewegung gleichförmig annimmt, ſo verhalten ſich die Räume, wie die Zeiten in die Geſchwindigkeiten multiplicirt. Heißt daher die Zeit t, ſo wird

(a—b)

$(a-b)\,t = d$, und $t = \frac{d}{a-b}$. Hieraus folgt

1.) Wenn $d = 0$, d. i. wenn die Entfernung der Körper im Anfang 0, und die Körper ſich berühren, ſo iſt auch die Zeit, worinn dieſe Entfernung zurückgelegt wird, $= 0$.

2.) Iſt $a = b$, ſo wird $t = \frac{d}{0}$, d. i. t iſt unendlich=gros, und die Körper können nie zuſammenſtoßen.

3.) Iſt $b = 0$, ſo iſt die Zeit, wo B auf A ſtößt, $= \frac{d}{a}$.

4.) Iſt $a = 0$, oder ruht der Körper A, ſo wird die Zeit $= \frac{d}{-b}$, folglich verneint, welches anzeigt, daß die Entfernung der Körper immer größer wird; weit gefehlt, daß ſie auf einander treffen können.

§. 311.

Um aber auch den Punkt D zu finden, wozu die Körper, wenn beyde ſich bewegten, zugleich gelangen würden; laßt uns ſetzen $AD = x$, ſo wird $x = \frac{ad}{a-b}$. Denn die Zeit, wo A den Körper B

erreicht, $= \frac{d}{a-b}$. §. 310. A bewegt ſich aber mit der Geſchwindigkeit a, und der Raum iſt die Geſchwindigkeit in die Zeit multiplicirt. Daß aber hier die abſolute, nicht die relative Geſchwindigkeit in A zu nehmen, iſt klar. Eben ſo findet man $BD = \frac{bd}{a-b}$.

§. 312.

Bewegt ſich B gegen A, ſo ändert ſich b in —b, denn die Bewegung in der Richtung cE iſt verneint; und wir erhalten alsdenn

$$1.)\ t = \frac{d}{a+b}.\quad 2.)\ x = \frac{ad}{a+b}.$$

§. 313.

Rücken die Körper in entgegengeſezten Richtungen fort, A gegen CE, B nach cD, ſo geht a in —a über, und die Gleichung §. 310. wird verwandelt in $t = \frac{-d}{a+b}$, dies lehrt, daß die Körper nie zuſammen kommen können.

§. 314.

Man ſoll die Zeit beſtimmen, wo die Körper A und B ſich in Parallelen bewegen, ſo daß ſie neben einander fortlaufen können; ſie entfernen ſich von einander um die Weite R, ſo iſt die Zeit, wo A, B er-

erreicht, $\frac{d}{a-b}$. §. 310. Damit aber hierauf A von B um die gegebene Weite R wegrückt, iſt die Zeit $\frac{R}{a-b}$ nöthig, daraus die ganze Zeit, wo A und B um den Raum R entfernt ſind, $\frac{R+d}{a-b}$.

Auch findet man den Raum, wodurch ſich A mit ſeiner abſoluten Geſchwindigkeit vom Anfang der Bewegung bis zu dem Augenblick bewegt, da der vorbeylaufende B vom Körper A bis zur Weite R wegrückt. Man multiplicire die abſolute Geſchwindigkeit in A in die Zeit, um dieſen Raum zu erhalten, und da die Geſchwindigkeit in A = a, ſo ſey der Raum x, und es iſt

1.) $x = \frac{(R+d)a}{a-b}$, wenn beyde Körper A und B in eben der Richtung fortlaufen.

2.) Folgen aber A und B entgegengeſezter Richtung, ſo wird $x = \frac{(R+d)a}{a+b}$.

§. 315.

Setzet, A und B bewegen ſich gleichförmig in concentriſchen Kreiſen BDG und AFH (Taf. XII. Fig. 9.), ſo werden eben dieſe Größen mit Hülfe der

vorigen

vorigen Gleichungen berechnet. Denn hier ſieht man blos auf die Winkelbewegung, oder die nach Graden des Umkreiſes gemeſſen wird, welche Grade man für die zurückgelegten Räume annimmt. Es heiſe alſo der Bogen A, die Zeit T, und da die Geſchwindigkeit bey gleichförmiger Bewegung dem Raum durch die Zeit dividirt proportional, ſo erhält man die Geſchwindigkeit der Winkelbewegung $= \frac{A}{T}$.

Hieraus erhellt, 1.) daß bey beſtändigem A die Geſchwindigkeit der Winkelbewegung ſich verhält wie $\frac{1}{T}$, oder, die Geſchwindigkeiten, womit Bogen von gleichen Graden von zwey Körpern zurückgelegt werden, verhalten ſich umgekehrt wie die Zeiten.

Und da die ganzen Umkreiſe ſich wie die ähnlichen Bogen verhalten, ſo verhält ſich die Geſchwindigkeit einer jeden Winkelbewegung verkehrt wie die Zeiten, worinn die ganzen Umkreiſe zurückgelegt werden, oder welches einerley, umgekehrt wie die ganze Umlaufszeit, ſo die periodiſche heißt.

2.) Iſt klar, daß die Geſchwindigkeit der Winkelbewegung der abſoluten Geſchwindigkeit der Körper proportional, und in eben dem Verhältnis wie die Geſchwindigkeit wächſt, wenn das übrige einerley. Nun wachſen auch die mit eben der Geſchwindigkeit zurückgelegten Bogen in eben dem Verhältnis, worinn der Halbmeſſer vermindert wird,

wird, daher die Winkelgeſchwindigkeit, wenn des Körpers abſolute Geſchwindigkeit H, der Halbmeſſer R heißt, $= \frac{H}{R}$.

§. 316.

Da die Größe dieſer Winkelbewegung nach Graden geſchätzt wird, ſo kann man annehmen, daß zwey Körper, die ſich wirklich in zwey verſchiedenen Kreiſen AFH, BDG bewegen, in eben dem Umkreis AFH herumlaufen, daß ſie im Anfang der Bewegung in A und F, und um den Bogen AF $=$ d entfernt ſind, da ſie doch wirklich in A und B; die Geſchwindigkeit der Winkelbewegung in A heiſe a, in B, b; ſo wird

(A) wenn beyde Körper ſich in eben der Richtung bewegen, 1.) $t = \frac{d}{a-b}$, 2.) $x = \frac{ad}{a-b}$; aus dieſer Gleichung findet man die Zuſammenkunft beyder Körper in eben dem Halbmeſſer in den Punkten D und E. 3.) Die Zeit, worinn die Körper im erſten Umlauf ſich von einander um die Weite R entfernen, iſt $\frac{R+d}{a-b}$, und die Weite vom Punkt A iſt

$$x = \frac{(R+d)a}{a-b}.$$

(B) Bewegen ſich die Körper gegen einander, ſo muß man in dieſen Gleichungen $-$ b ſtatt $+$ b ſetzen.

(C) Ent-

(C) Entfernen ſie ſich aber von einander, ſo bekommen wir eben das, was in nächſt vorhergehenden Fällen. Denn hier nähern ſich die Körper einander in einem andern Theil des Umkreiſes, z. B. in H, ſie entfernen ſich hier nicht beſtändig von einander, wie bey der geradlinigten Bewegung.

§. 317.

Beyde Körper A und B bewegen ſich in geraden ſich ſchneidenden Linien (Taf. XII. Fig. 10.), A ſowohl als B gehen zu gleicher Zeit vom Punkt A aus, A in der Richtung AC, B in der Richtung AB. Nimmt man nun B ruhend an, ſo ſoll des A relative Bewegung gegen B gefunden werden. Iſt aber AB : AC = b : a (unter a und b verſteht man die Geſchwindigkeiten in A durch AC, in B durch AB), ſo iſt die reſpektive Weite BC, und betrachtet man B als in A ruhend, ſo iſt eben dieſe Weite AD, parallel und gleichgros mit der Linie BC. Die relative Bewegung in der Linie AE aber iſt gleichförmig, weil die Bewegungen in den Linien AB und BC, wegen den beſtändigen Verhältniſſen AB : BC, und AC : BC, ebenfalls gleichförmig ſind.

§. 318.

Um alſo die relative Entfernung der Körper zu beſtimmen, muß man vorher das Verhältnis der relativen Geſchwindigkeit zur abſoluten Geſchwindigkeit des Körpers A finden. Iſt aber der Winkel o, und dadurch zugleich der Winkel ABC, den wir p nennen, gegeben, ſo bekommen wir Sin. p : ſin. o = a : $\frac{a.\,\text{ſin.}\,o}{\text{ſin.}\,p}$, ſo die relative Geſchwindigkeit

keit ausdrückt. Dieſe Geſchwindigkeit in die Zeit t multiplicirt, giebt den in der Zeit t zurückgelegten relativen Raum $= \frac{t.\,a.\,\text{ſin.}\,o}{\text{ſin.}\,p} = AE.$

Aus dem gegebenen relativen Raum findet man die Stellen der Körper A und B. Denn ſetzet, a ſey der in der Zeit = 1 zurückgelegte Raum; ziehet Ae = at, ſo giebt ſich zugleich Ee = Af. Auch wird Ae aus den gegebenen ſin. o, ſin. p. und der relativen Weite AE beſtimmt, und aus dem Punkt e läßt ſich die Linie ef mit AE parallel ziehen.

§. 319.

Setzet, die Körper A und B (Taf. XII. Fig. 11.) fangen ihre Bewegung zwar nicht in einem einzigen Punkte F, ſondern in den um die Linie AB entfernten Punkten A und B an, gelangt B in G in eben der Zeit, worinn A ſich nach D bewegt, ſo iſt offenbar die relative Entfernung GD, die aber hier in BC, parallel und gleichgros mit GD, übergeht, weil wir B als unbewegt betrachten. Der Körper A ſcheint alſo mit ſeiner relativen Bewegung durch die Linie AC ſich fortbewegt zu haben, welche Bewegung durch ACH ebenfalls gleichförmig, wenn es die abſoluten Bewegungen durch BQ und AE ſind. Denn weil o = o, und das Verhältnis AD : DC beſtändig, ſo muß auch das Verhältnis AD : AC beſtändig ſeyn.

Es ſey auch hier der Winkel ACD = p, ſo wird ſin. p : ſin. o = a : $\frac{a.\,\text{ſin.}\,o}{\text{ſin.}\,p}$ = AC, welches die

relative

relative Geſchwindigkeit durch AH, aus deren Produkt in die Zeit die Weite geſchloſſen wird, um die ſich in gegebener Zeit die Körper A und B von einander entfernen.

Wie aus der gegebenen relativen Weite die wahren Stellen beſtimmt werden, iſt klar; auf eben die Art nämlich, wie vorhin erſt AE, findet man EQ. Aus den gegebenen Entfernungen aber ſowohl in der wahren als relativen Bewegung, findet man die Zeit, wenn man die gegebene Entfernung durch die Geſchwindigkeit dividirt.

§. 320.

Zu Beſtimmung der **relativen Bewegung** zweyer Körper, iſt es nicht einmal nöthig, den einen als ruhend anzuſehen. Man kann beyde bewegend annehmen, und die relative Bewegung wird folgendergeſtalt beſtimmt:

Es ſeyn AC, BC (Taf. XII. Fig. 12.) zwo zuſammenlaufende Linien, worinn ſich die Körper A und B bewegen, ſo die Bewegung in den Punkten A und B mit den Geſchwindigkeiten a und b beginnen, und gegen den Punkt C fortrücken. Nehmet AC zu CD wie a : b, ziehet AD, und auf AD willkührlich eine andere Linie BE aus dem Punkt B, wie auch EF aus dem Punkt E parallel mit BC, und ferner FG parallel mit EB. Dies vorausgeſezt, ſind die Linien AF und BG in gleicher Zeit zurückgelegte Räume, und daher die Punkte F und G die Stellen, wo die Körper A und B in eben dem Augenblick, oder ihre Mittelpunkte ſich befinden, wenn wir die Körper als Kugeln annehmen. Es iſt aber zugleich FG ihre relative Entfernung. Denn da angenommen worden

AC : CD

AC : CD = a : b, und zugleich = AF : FE, ſo iſt klar, daß AF und FE in gleicher Zeit zurückgelegte Räume ſind, woraus das übrige erhellt.

§. 321.

Demnach werden aus der gegebenen relativen Entfernung FE die wahren Stellen der Körper beſtimmt. Ziehet aus dem Punkt B die Linie BE dieſer Entfernung gleich, und FG mit EB parallel, ſo ſind die Körper in F und G. Da ſich aber nach gefällten Loth BH auch BI = BE ziehen läßt, ſo zeigen die beyden Punkte K und T die wahren Stellen, wenn entweder beyde oder der eine Körper durch den Punkt C ſchon vorher gegangen.

Eben ſo ſchließt man die relative Entfernung aus der wahren AF, wenn man erſtlich vom Punkt F die Linie FE parallel mit CB, und dann EB zieht, ſo die geſuchte relative Entfernung ſeyn wird.

§. 322.

Auch findet man die Stellen der Körper A und B, oder ihrer Mittelpunkte, wenn die Köper Kugeln ſind, bey ihrer kürzeſten Entfernung. Ziehet aus B das Loth BH auf die Linie AD, und LH parallel mit BD, wie auch LS parallel mit HB, ſo iſt LS die kürzeſte Entfernung, weil ſie = HB, welches Loth unter allen von B auf AD gezogenen Linien die kürzeſte iſt.

Verlängert man BH nach M, ſo iſt der Winkel LMH = MAH + BHD, folglich der Winkel BMC ſtumpf; welches anzeigt, daß das vom Punkt B auf AD gefällte Loth die Linie AC, ſo die Richtung des geſchwinder bewegten Körpers A, im Punkt M

ſchneidet, welcher Punkt dem Punkt A näher als der Punkt L, in welchem die Entfernung des Körpers A von B die kürzeſte iſt.

§. 323.

Auch ſehen wir, daß der Punkt F vom Punkt L eben ſo weit entfernt iſt, als der Punkt K auf der andern Seite: denn die auf verſchiedenen Seiten des Loths gleichgroßer Linien BE und BI, ſind auf einerley Art gezogen. Daher ſtehen auch die Punkte, wo die Entfernung der Körper einerley, auf beyden Seiten von dem Punkt, wo die kürzeſte Entfernung, gleichweit ab.

§. 324.

Auch erhellt, daß die Körper A und B nicht zugleich in eben der Zeit nach dem Punkt C gelangen können, wo nicht die Geſchwindigkeiten in A und B ſich verhalten wie die Entfernungen AC und CB.

§. 325.

Dies läßt ſich nicht nur geometriſch verzeichnen; man kann auch die wahre Größe der Linien hieraus beſtimmen. Denn wegen der gegebenen Linien AC und BC, nebſt dem Winkel ACD, findet man das übrige leicht. Da das Verhältnis der Geſchwindigkeiten und AC gegeben, ſo giebt ſich auch CD, folglich auch BD. Aus AC, CD und dem Winkel bey C findet man AD mit dem Winkel ADC, und daher HDB. Von dieſem Winkel aber, von BD, und dem rechten Winkel bey H hängt die kürzeſte Entfernung BH und die Linie HD ab. Daher AH bekannt, und weil AD : AH = DC : HL, und = AC : AL, ſo ſind auch HL und AL bekannt.

Nimmt man die Linie BE willkührlich, ſo findet man EH wegen der gegebenen BH; dann AE oder AD — EH — HD; endlich EF und AF.

§. 326.

Dies iſt das vornehmſte, was von der relativen Bewegung hier abzuhandeln war, und wohl eingeſehen hinreicht, das übrige daraus herzuleiten. Daher wollen wir uns dabey länger nicht aufhalten; wir kommen vielmehr wieder auf den Weg, wovon wir abſchweiften, und kehren zum Zuſammenſtoß der Körper zurück.

Siebenzehnte Vorleſung.

Fortſetzung vom Zuſammenſtoß der Körper.

Inhalt.

§. 295. Aus den allgemeinen Geſetzen des Stoßes hergeleitete Regeln der Bewegung elaſtiſcher Körper, ſowohl der, deren Richtung einerley, als die entgegengeſezte Bewegungen haben. §. 297. Wenn der eine Körper ruht. §. 298. — 301. Wenn die Geſchwindigkeiten vor dem Stoß gleichgros u. ſ. w. §. 302. 303. Regeln des Stoßes harter und weicher Körper. §. 303. — 306. Die Größe der Bewegung bleibt nicht überall einerley, kann folglich nicht das wahre Maas der Kräfte seyn. §. 308. 309. Die Summe der lebendigen Kräfte wird durch den Stoß allein nicht verändert. §. 310 Die lebendigen Kräfte erhalten ſich beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper.

§. 295.

Laßt uns zu den zu Ende der vorhergehenden Vorleſung erwieſenen Gleichungen zurückkehren.

Die erſte giebt die Geſchwindigkeit des Körpers A nach dem Stoß $= \frac{C.(M-m)+2mc}{M+m}$; die zweyte die Geſchwindigkeit des Körpers B nach dem Stoß $= \frac{2MC+(m-M)c}{M+m}$. Dieſe Regeln beſtimmen die Bewegung elaſtiſcher Körper nach dem Stoß, wenn vorher beyde ſich in eben der bejahten Richtung AD bewegten, wie oben erwieſen worden.

Hieraus erhellt zugleich, wie die Geſchwindigkeiten auszudrücken, wenn B ſich gegen A in entgegengeſezter Richtung bewegt (Taf. XII. Fig. 6.). Denn hier wird des Körpers B Geſchwindigkeit c verneint und $-c$. Sezt man daher $-c$ ſtatt c in den vorigen Gleichungen, ſo erhält man

1.) **Die Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß**
$$= \frac{C(M-m)-2mc}{M+m}, \text{ und}$$

2.) **Die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß**
$$= \frac{2MC-(m-M)c}{M+m}.$$

§. 296.

Dieſe beyden Fälle ſind hier allein zu betrachten. Denn bewegen ſich beyde Körper A und B vor dem Stoß in verneinter Richtung, ſo ſind die Geſchwindigkeiten nach dem Stoß eben ſo, wie im erſten Fall, nur

nur mit dem Unterſchied, daß ſie hier verneint werden, da ſie dort bejaht waren. Hier ändern ſich nur die Namen der Richtungen, verneint und bejaht, und alles iſt eben ſo, als wenn beyde Körper vor dem Stoß in bejahter Richtung fortgehen.

Dies kann aber nicht Statt haben, daß die Bewegung des Körpers A vor dem Stoß nach AE, und und die Bewegung in B nach BD gerichtet iſt. In dieſem Fall giebt es keinen Zuſammenſtoß.

§. 297.

Dies vorausgeſezt, wollen wir die hier vorkommenden Hauptfälle vortragen, und die Geſchwindigkeit nach dem Stoß beſtimmen. Zuerſt laßt uns annehmen, der eine Körper, z. B. B, ruhe; alsdenn iſt $c = 0$, und

1.) die Geſchwindigkeit des Körpers B nach dem Stoß $= \frac{2MC}{M+m}$.

2.) Die Geſchwindigkeit des Körpers A nach dem Stoß $= \frac{C.(M-m)}{M+m}$, hieraus ſchließt man ferner

3.) wenn $M = m$, oder die Maſſen der beyden Körper gleichgros, ſo wird die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß $= C$; denn $M+m = 2M$, folglich $\frac{2MC}{2M} = C$. In A hingegen iſt die Geſchwindigkeit $= 0$, weil $M-m = 0$. Stößt alſo ein

 elaſti-

elaſtiſcher Körper gerad auf einen andern elaſtiſchen, gleichgroßen ruhenden, ſo nimmt lezterer des erſtern ganze Geſchwindigkeit an; der anlaufende aber ruht nach dem Stoß.

4.) Liegen mehrere gleichgroße elaſtiſche Kugeln ſo neben einander in gerader Linie, daß ſie ſich berühren, läuft dann eine andere den übrigen ebenfalls gleiche Kugel gerad auf dieſe Reihe Kugeln, ſo wird die erſte in der Reihe, worauf jene anläuft, mit allen übrigen mittlern, die lezte ausgenommen, nach dem Stoß ruhen; die lezte aber wird mit der Geſchwindigkeit der im Anfang an die Reihe anlaufenden fortgehen. Dies iſt ſo klar, daß es keiner weitern Erläuterung bedarf.

§. 298.

Wir ſchreiten zu der andern Gattung Fälle fort, wo die Geſchwindigkeit in A der Geſchwindigkeit in B gleich iſt, d. i. wo C = c. Hier muß man ſehen, ob beyde Körper vor dem Stoß ſich in der nämlichen Richtung, oder in entgegengeſezten bewegen.

1.) Im erſten Fall iſt der erſtere Werth der Geſchwindigkeit §. 295. anzuwenden. Alsdenn iſt die

Geſchwindigkeit in A $= \frac{C.(M+m)}{M+m} = C$, weil C=c,

und es erhellt, daß die Geſchwindigkeit vor und nach dem Stoß einerley. Die Geſchwindigkeit in B iſt

ebenfalls $\frac{CM+Cm}{M+m} = C$. Demnach bleibt in

beyden

beyden Körpern eben die Geſchwindigkeit, wie vor dem Stoß. Man ſieht dies leicht auch aus andern Gründen, was wir aus der allgemeinen Regel, um die Wahrheit und Allgemeinheit derſelben deſto beſſer zu zeigen, hergeleitet haben.

2.) Bewegen ſich die Körper A und B gegen einander; nehmet den §. 295. gefundenen zweyten Werth der Geſchwindigkeit, dieſer giebt 1.) für die Geſchwindigkeit in A, $\frac{C(M-m)-2mC}{M+m}$; 2.) für die Geſchwindigkeit in B, $\frac{2MC-(m-M)C}{M+m}$, nach dem Stoß. Sezt man aber $M=m$, ſo bekommt man 1.) für A, $\frac{-2mC}{2m}=-C$, 2.) für B, $\frac{2MC}{2M}=C$. Stoßen alſo zwey gleichgroße elaſtiſche Körper mit gleichen Geſchwindigkeiten auf einander, ſo ſpringen die Körper nach dem Stoß mit eben dieſen Geſchwindigkeiten, nur in veränderter Richtung, zurück.

§. 299.

Sind die Geſchwindigkeiten zweyer ſich bewegender elaſtiſchen Körper ungleich, die Maſſen aber gleich; ſo wird $M=m$, ferner 1.) die Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß $=-c$, und 2.) die Geſchwindigkeit in $B=C$, vermöge des zweyten Werths der Geſchwindigkeit §. 295.

In dieſem Fall verwechſeln alſo die elaſtiſchen Körper ihre Geſchwindigkeiten, und entfernen ſich nach entgegengeſezten Richtungen von einander.

§. 300.

Die Körper laufen in eben der Richtung fort, zugleich ſind ihre Maſſen gleichgros. So bekommen wir aus der erſten Formel der Geſchwindigkeiten §. 295.

1.) Die Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß = c. 2.) Die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß = C, hieraus erhellt, daß auch hier die Körper ihre Geſchwindigkeiten verwechſeln; zugleich aber nach dem Stoß in eben der Richtung, wie vorher, fortgehen.

§. 301.

Dies ſind die leichteſten Fälle. Noch ſind aber die Bewegungsgeſetze harter und weicher Körper nach dem Stoß zu finden. Wir nehmen auch bey vollkommen harten Körpern Zuſammenſtoß an, was wir, wie wir oben erinnerten, an ſeinem Orte hinſtellen. Nun bewegen ſich ſolche Körper nach dem Stoß offenbar mit keiner andern, als der beyden Körpern A und B gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit. Denn die übrigen Geſchwindigkeiten, die ſich verkehrt wie die Maſſen verhalten, gehen während des Stoßes in Zuſammendrückung der Maſſen der weichen Körper drauf, und bey den harten Körpern zerſtören ſich dieſe Geſchwindigkeiten einander ſelbſt: auch nehmen dieſe Körper ihre erſte Geſtalt nicht wieder an. Daher

her die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit harter und weicher Körper nach dem Stoß $f = \frac{CM + mc}{M + m}$.
§. 292.

Mit was für Geſchwindigkeit alſo auch harte und weiche Körper vor dem Stoß verſehen ſind, ob ſie nach einerley Richtung, oder nach einander entgegengeſezten fortgehen, ſo iſt doch ihre Geſchwindigkeit nach dem Stoß gleichgros, und die Richtungslinie einerley.

§. 302.

Hieraus laſſen ſich die Bewegungsregeln harter und weicher Körper ſchließen, wie wir in den vornehmſten Fällen zeigen werden.

1.) Gehen die Körper vor dem Stoß in eben der Richtung fort, ſo iſt die Geſchwindigkeit nach dem Stoß gleich der Summe der Bewegungsgrößen vor dem Stoß, durch die Summe der zuſammenſtoßenden Maſſen dividirt.

2.) Bewegen ſie ſich aber gegen einander, ſo geht c in —c über, und wir bekommen $f = \frac{Cm - cm}{M + m}$; die Geſchwindigkeit nach dem Stoß iſt gleich dem Unterſchied der Bewegungsgrößen durch die Summe der Maſſen dividirt.

3.) Hieraus ſchließt man ferner, daß die Bewegungsgröße nach dem Stoß

a) wenn beyde Körper ſich in eben der Richtung bewegen, $= (CM + cm) \frac{M+m}{M+m} = CM + cm.$ Aber vor dem Stoß war die Bewegungsgröße auch $= CM + cm$. Gehen daher harte oder weiche Körper vor dem Stoß in eben der Richtung fort, ſo bleibt nach dem Stoß eben die Bewegungsgröße, wie vor dem Stoß.

b) Bewegen ſich die Körper vor dem Stoß gegen einander, ſo iſt der Unterſchied der Bewegungsgrößen vor und nach dem Stoß gleichgros, wie man leicht ſieht.

4.) Iſt $M = m$, $C = c$, und die Körper begegnen einander, ſo iſt die Geſchwindigkeit harter und weicher Körper nach dem Stoß $= \frac{CM - cm}{M+m} = 0.$ Begegnen ſich alſo gleichgroße Körper mit gleichen Geſchwindigkeiten, ſo ruhen beyde Körper nach dem Stoß.

5.) Ruht vor dem Stoß der eine Körper, ſo iſt $c = 0$, und $f = \frac{CM}{M+m}$. Aber C die Geſchwindigkeit in A vor dem Stoß. Demnach verhält ſich die Geſchwindigkeit nach dem Stoß zur Geſchwindigkeit des Körpers A vor dem Stoß, wie die Maſſe des Körpers A zur Summe der Maſſen beyder Körper.

6.) Setzet ferner die Maſſen gleichgros, indem der eine Körper ruht, ſo wird $f = \frac{CM}{2M} = \frac{C}{2}$. Sind alſo die Maſſen gleichgros, und die eine ruht vor dem Stoß, ſo iſt beyder gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoß die Hälfte der Geſchwindigkeit vor demſelben.

7.) Sind die Maſſen gleich, $M = m$, die Geſchwindigkeiten aber verſchieden, ſo wird,

a) wenn beyde Körper in eben der Richtung fortgehen, $f = \frac{CM + cm}{M + cm} = \frac{M(C+c)}{2M} = \frac{C+c}{2}$. Demnach bewegt ſich ſowohl A als B nach dem Stoß mit der halben Summe der Geſchwindigkeiten vor dem Stoß.

b) Laufen die Körper einander entgegen, ſo iſt $f = \frac{CM - mc}{M + m} = \frac{M(C-c)}{2M} = \frac{1}{2}(C-c)$. Daher bewegen ſich beyde Körper A und B nach dem Stoß mit dem halben Unterſchied der Geſchwindigkeiten vor demſelben.

Da aber der Werth der Geſchwindigkeiten nach dem Stoß ſowohl in dieſem, als im vorhergehenden Fall bejaht iſt, ſo folgt, daß die Richtung harter und weicher Körper nach dem Stoß hier mit der Richtung des Körpers A, der vorher die größere Geſchwindigkeit beſas, einerley iſt.

8.) Bey gleichen Geſchwindigkeiten und ungleichen Maſſen iſt offenbar kein Stoß möglich, wenn

beyde

beyde in eben der Richtung fortgehen: ſtoßen ſie aber in entgegengeſezten Richtungen auf einander, ſo iſt $f = \frac{C.(M-m)}{M+m}$, d. i. die Geſchwindigkeit nach dem Stoß iſt die vierte Proportionalgröße zur Summe der Maſſen, zu ihrem Unterſchiede, und zur Geſchwindigkeit vor dem Stoß.

9.) **Begegnen ſich endlich Körper, deren Geſchwindigkeiten ſich verkehrt wie die Maſſen verhalten,** ſo iſt $f = \frac{CM-cm}{M+m} = 0$, weil $CM = cm$. **In dieſem Fall ruhen alſo beyde Körper nach dem Stoß.**

§. 303.

Alle dieſe Regeln werden aus dem allgemeinen Werth der Geſchwindigkeit leicht hergeleitet, daß alſo offenbar, wie andere Fälle hieraus zu beſtimmen. Wir wollen alſo hiervon nicht weitläuftiger handeln, ſondern uns zu andern bey der Bewegung in Acht zu nehmenden Dingen wenden.

Zuerſt laßt uns betrachten, was beym Zuſammenſtoß der Körper unveränderlich und beſtändig bleibt. Hier ſehen wir ſogleich aus §. 302. **daß die Bewegungsgröße vor und nach dem Stoß, bey der Bewegung harter und weicher Körper nicht einerley bleibt, wo nicht die Körper vor dem Stoß ſich in eben der Richtung bewegen. Denn laufen ſie einander entgegen, ſo bleibt nach dem Stoß nur der Unterſchied der Bewegungen.**

§. 304.

§. 304.

Beym Zuſammenſtoß harter und weicher Körper geht eine Kraft in Aenderung der Geſtalt auf, die den zuſammenſtoßenden Körpern nie wieder erſezt wird; daher läßt ſich keine Gleichheit der Kräfte vor und nach dem Stoß erwarten. Sind aber die Körper vollkommen elaſtiſch, wird die bey ihrer Zuſammendrückung verlorne Kraft ganz wieder erſezt, ſo muß nothwendig vor und nach dem Stoß einerley Summe der Kräfte bleiben; und ſind die Kräfte aus der Bewegungsgröße, die Geſchwindigkeiten in die Maſſen multiplicirt, zu ſchätzen, ſo muß auch dieſe Größe beſtändig bleiben. Ob ſich dies nun ſo verhält, wollen wir ſehen, und die Bewegungsgröße vor und nach dem Stoß bey elaſtiſchen Körpern in jedem Hauptfall unterſuchen.

Erſter Fall. Gehen beyde Körper A und B vor dem Stoß in eben der Richtung fort, ſo iſt die Bewegungsgröße vor dem Stoß $MC + mc$.

Nach dem Stoß aber

$$\frac{CMM - CMm + 2mMc + cmm + 2MmC - mMc}{M + m},$$

(man braucht hier nämlich den erſten Werth der Geſchwindigkeit §. 295.) $= \frac{CM(M+m) + cm(M+m)}{M+m}$

$= Cm + cm.$

Hier ſind aber wieder zwey Fälle zu unterſcheiden.

a) Bewegen ſich beyde Körper A und B vor und nach dem Stoß in eben der Richtung, ſo iſt die bejahte Größe $CM + cm$ nach dem Stoß eben wie vor

dem-

demſelben. Bewegen ſich daher beyde Körper in eben der Richtung ſowohl vor als nach dem Stoß, ſo iſt die Bewegungsgröße beſtändig und unveränderlich.

b) Bewegen ſich aber A und B zwar vor dem Stoß in eben der Richtung, nach demſelben aber nach entgegengeſezten Seiten, ſo deutet CM + cm die Bewegungsgröße vor dem Stoß an: nach demſelben aber iſt die Geſchwindigkeit in A verneint, und CM + cm iſt nur der Unterſchied dieſer Größe nach dem Stoß in A und B. Gehen alſo die Körper vor dem Stoß in eben der Richtung, nach demſelben aber in entgegengeſezten fort, ſo iſt die Bewegungsgröße vor dem Stoß dem Unterſchiede der Bewegungen nach demſelben gleich.

§. 305.

Zweytens. Die Körper A und B laufen vor dem Stoß einander entgegen. Wendet man alsdenn den zweyten Werth der Geſchwindigkeit §. 295. an, ſo erhält man die Bewegungsgröße nach dem Stoß

$$\frac{CM^2 - CMm - 2mMc - m^2c + 2mMC + mMc}{M+m} =$$

$$\frac{CM^2 - m^2c + mMC + mMc}{M+m} =$$

$$\frac{CM(M+m) - cm(M+m)}{M+m} = Cm - cm.$$

Hier ſind aber wieder zweyerley Bewegungen zu unterſcheiden:

a) die

a) die eine iſt, wenn beyde Körper A und B nach dem Stoß in eben der Richtung fortgehen. Hier drückt CM — cm die Summe der Bewegungen nach dem Stoß aus, die offenbar der Summe der Bewegungen vor dem Stoß gleich iſt.

b) In der andern ſind die Richtungen der Körper A und B nach dem Stoß entgegengeſezt. Hier iſt CM — cm wegen der verneinten Geſchwindigkeit in A, der Unterſchied der Bewegungen nach dem Stoß. Hieraus erhellt, daß der Unterſchied der Bewegungen vor und nach dem Stoß einerley, wenn die Körper einander entgegen laufen, und auch nach dem Stoß ſich nach entgegengeſezten Seiten von einander entfernen.

§. 306.

Hieraus ſchließt man

1.) daß die Bewegungsgröße ſich zuweilen beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper vermehrt, alsdenn nämlich, wenn die Körper vor dem Stoß einerley Richtung folgen, nach demſelben aber ſich nach entgegengeſezten Seiten bewegen.

2.) Hingegen wird die Bewegungsgröße vermindert, wenn elaſtiſche Körper vor dem Stoß einander entgegen laufen, und hernach in eben der Richtung einhergehen.

3.) Demnach ändert ſich nur in den Fällen die Bewegungsgröße nicht, wo elaſtiſche Körper vor und nach dem Stoß in der nämlichen Richtung fortgehen.

4.) Da aber die gefundenen Regeln auſer aller Zweifel geſezt ſind, als welche, obgleich aus verſchiedenen Gründen hergeleitet, doch immer einerley gefunden

funden werden: ſo ſehen wir daraus, daß die aus der Bewegungsgröße geſchäzten Kräfte der Körper nicht die wahren ſind. Denn nimmt man dieſes Maas an, ſo bleibt beym Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper nicht einerley Größe derſelben übrig, welches ſich doch, vermöge des §. 294. erwieſenen, nothwendig ſo verhalten muß.

§. 307.

Auch läßt ſich hier nicht zweifeln, daß die vorhin erzählten Fälle alle ſtatt haben können. Denn was für einen Werth der Geſchwindigkeit nach dem Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper wir auch annehmen, ſo ſind doch verneinte Größen mit bejahten darinnen; die Maſſen aber und die Geſchwindigkeiten der Körper kann man nach Belieben annehmen.

§. 308.

Nun laßt uns unterſuchen, ob die **Größe der lebendigen Kräfte** bey der Bewegung und Zuſammenſtoß elaſtiſcher Körper beſtändig bleibt. Nehmet alſo die beyden erſtern Werthe der Geſchwindigkeit §. 295. welche ſind für A, $\frac{C.(M-m)+2mc}{M+m}$,

und für B, $\frac{2MC+(m-M)c}{M+m}$, ſo ſind ihre Quadrate in die Maſſen nultiplicirt, wenn $M-m=a$,

$$\frac{M(a^2C^2+4macC+4m^2c_2)+(4M^2C^2-4aMCc+a^2c^2)m}{(M+m)_2}$$

$$=\frac{(M-m)^2MC^2+(M-m)^2mc^2+4m^2c^2M+4M^2C^2m}{(M+m)^2}=$$

M^3C^2

$$\frac{M^3C^2+m^2MC^2+M^2mc^2+m^3c^2+2m^2Mc^2+2M^2mC^2}{(M+m)^2} =$$

$$\frac{MC^2(M^2+2Mm+m^2)+mc^2(M^2+2Mm+m^2}{M^2+2Mm+m^2}$$

$$= MC^2+mc^2.$$

Auch erhellt, daß die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stoß einerley ſind, ſowohl wenn die Richtungen der Körper A und B vor und nach dem Stoß einerley, als wenn ſie nur vor dem Stoß einerley, nach demſelben aber verſchieden und entgegengeſezt ſind. Denn würde auch hier die Geſchwindigkeit verneint, ſo wird doch das Quadrat der Geſchwindigkeit dadurch nicht verändert.

§. 309.

Nehmet nur die leztern Werthe der Geſchwindigkeiten §. 295., welche Statt haben, wenn ſich A und B vor dem Stoß gegen einander bewegen. Es ſind aber, die Rechnung auf eben die Art, wie vorhin geführt, die lebendigen Kräfte nach dem Stoß:

$$\frac{(C^2a^2-4cCma+4m^2c^2)M+(4M^2C^2+a^2c^2+4McCa)m}{(M+m)^2}$$

$$= \frac{Ma^2C^2+4m^2Mc^2+4mM^2C^2+a^2mc^2}{(M+m)^2}, =$$

MC^2+mc^2, eben das, was vorhin gefunden worden.

Hier ſchließt man alſo eben das, was §. 308. daß nämlich die Summe der lebendigen Kräfte

vor und nach dem Stoß einerley und beſtändig. Daher ſind auch überhaupt, die Bewegung vor und nach dem Stoß ſey wie ſie wolle, die lebendigen Kräfte beſtändig gleichgros: wie wir daraus herleiteten, daß bey der Bewegung elaſtiſcher Körper, wegen der von der Elaſticität herrührenden Wiederherſtellung der Geſtalt keine Kraft verloren gehen kann.

§. 310.

Hieraus folgen zwey Hauptbemerkungen:

1.) **Lebendige Kräfte zerſtören nie einander, wenn ſie gegenſeitig auf einander wirken;** und nichts geht von ihrer Größe verloren. Hierinn ſind ſie von Preſſungen, die ſich ſelbſt gegenſeitig aufheben, weit unterſchieden.

2.) **Lebendige Kräfte können Preſſungen eben ſo vernichten, als erzeugen.** Und lebendige Kräfte, wenn ſie gegen Preſſungen wirken, werden eben ſo, wie einfache Preſſungen, zerſtört. Daher iſt auch der in Zuſammendrückung der Geſtalt eines Körpers aufgegangene Theil derſelben, wie Druck anzuſehen.

Acht-

Achtzehnte Vorleſung.

Aus den Regeln des Zuſammenſtoßes der Körper hergeleitete Folgen.

Inhalt.

§. 311. Die Bewegung des Schwerpunkts ändert ſich nicht beym Stoß; auch nicht §. 312. die relative Geſchwindigkeit der Körper. §. 313. — 316. Aenderung der Geſchwindigkeiten in beyden Körpern nach dem Stoß. §. 317. Die Geſchwindigkeit beym mittelbaren Stoß läßt ſich durch mehrere Zwiſchenkörper vermehren.

§. 311.

Wir ſchreiten zu andern Folgen fort, die ſich aus den Geſetzen des Stoßes herleiten laſſen. Wir haben im vorhergehenden erwieſen, daß hier zwo Größen beſtändig bleiben, wovon die erſte die Größe der lebendigen Kräfte ſelbſt; *) die andere die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit iſt, womit beyde Körper vor dem Stoß fortgehen. Aus dem lezten ſchlieſen wir ferner folgendes:

1.) Nehmet zwiſchen den Körpern A und B den Punkt F ſo, daß die Entfernungen der Schwerpunkte der Körper von dieſem Punkt ſich verkehrt wie ihre Maſſen verhalten, oder daß Fc : FC, wie die Maſſe in A zur Maße in B, und nennet dieſen Punkt den Schwerpunkt, oder vielmehr den Mittelpunkt der Maſſen. Dieſes Mittelpunkts Bewegung iſt vor und nach dem Stoß einerley und gleichgros.

*) Hier verſteht man blos Stoß elaſtiſcher Körper. (T.)

Vermöge des §. 293. vorgetragenen iſt die Sache klar. Denn in ſofern die Körper mit ihrer gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit fortgehen, leidet die Bewegung des Mittelpunkts der Maſſen keine Aenderung. Aber auch durch ihre andere Geſchwindigkeit, die ſich verkehrt wie die Maſſen verhält, wird hier nichts verändert. Denn bey elaſtiſchen Körpern ſind die Geſchwindigkeiten nach dem Stoß eben ſo, wie vorher, nur mit veränderten Richtungen; wie auch ſeyn muß, wenn die Körper ſich eben ſo von einander entfernen ſollen, wie ſie anliefen. Es läßt ſich aber jede Geſchwindigkeit der Körper in dieſe beyden theilen, und da von keiner des Mittelpunkts Bewegung verändert wird, ſo kann er ſich hier ſchlechterdings nicht ändern. Eben das begreift man noch leichter folgendergeſtalt:

Man denke ſich die zuſammenſtoßenden Körper auf einer Tafel liegend, die mit ihrer gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit ſich bewegt. Hier iſt klar, daß der Schwerpunkt ſich zugleich mit der Tafel bewegt, und mit ihr einerley Geſchwindigkeit hat. Die Geſchwindigkeiten aber, womit die Körper auf der Tafel ſelbſt ſich gegen einander bewegen, ſtehen vor und nach dem Stoß im verkehrten Verhältnis der Maſſen. In dieſer Rückſicht ruht alſo der Mittelpunkt. Daher hat auch der Mittelpunkt keine andere, als die Bewegung der Tafel. Die Bewegung der Tafel aber ändert ſich beym Zuſammenſtoß nicht. Daher

a) ruht der Mittelpunkt auf der Tafel. Denn die Körper gehen, wie geſagt, auch nach dem Stoß mit Geſchwindigkeiten fort, die ſich verkehrt wie die Maſſen verhalten.

b) Da-

b) Daher iſt des Mittelpunkts Bewegung eben wie der Tafel vor und nach dem Stoß, ſowohl der Größe als Richtung nach.

c) **Auch die Bewegungsgröße iſt bey dieſem Mittelpunkt beſtändig.** Denn multiplicirt man die Summe der Maſſen A und B in die Geſchwindigkeit des Mittelpunkts, ſo iſt das Produkt vor und nach dem Stoß gleichgros.

§. 312.

Auch die relative Geſchwindigkeit der Körper wird durch den Stoß nicht verändert. Dies ſieht man nach angeſtellter Vergleichung der relativen Geſchwindigkeit vor dem Stoß mit der nach demſelben. §. 294.

Um dies noch deutlicher zu ſehen, laßt uns die Bewegung der Körper eben ſo, wie vorhin, vorſtellen. Hier hängt offenbar die **relative Bewegung** nicht von der Bewegung der Tafel, oder des Schwerpunkts ab, da dieſer ſowohl als jene, als ruhend zu betrachten ſind. Daher iſt die Größe der relativen Bewegung durch die Geſchwindigkeiten, womit ſich die Körper ſelbſt auf der Tafel bewegen, und die im verkehrten Verhältnis der Maſſen ſtehen, zu beſtimmen. Da aber auch dieſe Geſchwindigkeiten beym Stoß elaſtiſcher Körper einerley bleiben, ſo folgt: a) daß die Körper nach dem Stoß ſich eben ſo von einander entfernen, als ſie vorher anliefen, ſo daß ſie in gleichen Zeiten vor und nach dem Stoß gleichweit von einander entfernt ſind.

b) **Ihre relative Bewegung iſt alſo vor und nach dem Stoß einerley.**

c) Auch ſieht man, daß die Größe des Stoſſes von der Größe der Materie des anſtoßenden Körpers, in die reſpektive Geſchwindigkeit multiplicirt, abhängt. Hieraus ſchließt man ferner

d) um wie viel elaſtiſche Körper bey ihrem Zuſammenſtoß zuſammengedrückt und ausgedehnt werden.

§. 313.

Anders verhält es ſich mit den **Geſchwindigkeiten.** Denn ſtellen wir uns auch hier die Bewegung und den Stoß eben ſo wie vorhin vor, und nennen die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit f; die übrigen Geſchwindigkeiten aber, die den Maſſen der Körper, umgekehrt genommen, proportional ſind, a im Körper A, und b im Körper B, ſo erhalten wir folgendes:

1.) Wenn $f = 0$, d. i. wenn die Körper blos mit Geſchwindigkeiten, die ſich verkehrt wie ihre Maſſen verhalten, einander entgegen laufen, ſo werden dieſe Geſchwindigkeiten nach geſchehenem Zuſammendruck den Körpern wieder zurückgegeben. In dieſem Fall entfernen ſich alſo die Körper nach dem Stoß mit eben den Geſchwindigkeiten von einander, womit ſie ſich vorher gegen einander bewegten.

2.) Bewegen ſich beyde Körper vor und nach dem Stoß nach eben der Richtung, ſo daß die Richtung nach dem Stoß die nämliche: ſo iſt die Geſchwindigkeit in A vor dem Stoß $f + a$, nnd die Geſchwindigkeit in $B = f - b$, deren Unterſchied $a + b$. Nach dem Stoß iſt die Geſchwindigkeit in $A = f - a$, und in $B = f + b$, deren Unterſchied wiederum $a + b$. **Demnach iſt der Unterſchied der Geſchwindigkeiten vor und nach dem Stoß einerley.**

3.) Be-

3.) Bewegen ſich die Körper A und B vor dem Stoß nach einerley, nach dem Stoß aber nach entgegengeſezten Seiten, ſo iſt der Unterſchied der Geſchwindigkeiten vor dem Stoß, wie im vorigen Fall, $= a + b$. Da ſie aber nach dem Stoß in entgegengeſezten Richtungen fortgehen, ſo wird die Geſchwindigkeit in A verneint $= - f + a$, und in $B = f + b$, dieſe addirt geben $a + b$; daraus erhellt, **daß der Unterſchied der Geſchwindigkeiten vor dem Stoß hier der Summe der Geſchwindigkeiten nach dem Stoß gleich iſt.**

4.) Gehen ferner A und B vor dem Stoß in entgegengeſezten, nach demſelben aber in der nämlichen Richtung fort; ſo iſt der Unterſchied der Geſchwindigkeiten nach dem Stoß $a + b$. Die Bewegung aber in B vor dem Stoß iſt hier verneint anzuſehen, und die Geſchwindigkeit in A vor dem Stoß $f + a$, in B, $- f + b$, die addirt $a + b$ machen. **Alſo die Summe der Geſchwindigkeiten vor dem Stoß gleich ihrem Unterſchiede nach demſelben.**

5.) Bewegen ſich endlich die Körper vor und nach dem Stoß nach entgegengeſezten Richtungen, ſo wird auf eben die Art leicht erwieſen, **daß die Summe der Geſchwindigkeiten vor und nach dem Stoß einerley und gleichgros.**

§. 314.

Die Geſchwindigkeiten nach dem Stoß laſſen ſich überhaupt mit denen vor dem Stoß vergleichen. Es iſt nämlich die Geſchwindigkeit in A $= \frac{C.(M - m) + 2mc}{M + m}$, wenn beyde Körper vor dem

Stoß ſich in eben der Richtung bewegen. §. 295. Daher bekommen wir $M+m : 2m = C-c : \frac{2m(C-c)}{M+m}$, dies von C abgezogen, giebt $C - \frac{2m(C-c)}{M+m} = \frac{C.(M-m)+2mc}{M+m}$. Demnach findet man die Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß, wenn man die vierte Proportionalgröße zu der Summe der Maſſen in A und B, der doppelten Maſſe in B, und der relativen Geſchwindigkeit vor dem Stoß ſucht, und dieſe Größe von der Geſchwindigkeit des Körpers A vor dem Stoß abzieht.

Die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß iſt $= \frac{2MC+(m-M)c}{M+m}$. Daher $M+m : 2M = C-c : \frac{2M(C-c}{M+m}$, dieſe Größe zur Geſchwindigkeit in B vor dem Stoß addirt, erhält man $c + \frac{2M(C-c)}{M+m} = \frac{2MC+(m-M)c}{M+m}$. Wie alſo die Summe der Maſſen zur doppelten Maſſe des anſtoßenden Kör-

Körpers A, ſo auch die reſpektive Geſchwindigkeit zu der Geſchwindigkeit, die zur Geſchwindigkeit des Körpers B addirt, deſſen Geſchwindigkeit nach dem Stoß giebt.

*§. 315.

Eben dieſe Rechnung läßt ſich anſtellen, wenn A und B vor dem Stoß einander entgegen laufen. Denn da hier die Geſchwindigkeit in A $= \frac{C.(M-m)-2mc}{M+m}$, §. 295. ſo haben wir folgende Analogie: $M+m : 2m = C+c : \frac{2m(C+c)}{M+m}$, dies von C abgezogen giebt $C - \frac{2m(C+c)}{M+m} = \frac{C.(M-m)-2mc}{M+m}$. Hieraus erhellt, daß hier eben das, was im vorigen Fall, von der Geſchwindigkeit in A gilt; nur mit dem Unterſchiede, daß man ſtatt des dort gebrauchten Unterſchiedes der Geſchwindigkeiten hier ihre Summe nehmen muß. Dieſe Summe macht aber die relative Geſchwindigkeit aus. Daher iſt die vorhin gegebene Regel, die Geſchwindigkeit des Körpers A zu finden, allgemein auch hier anwendbar.

Auch iſt die Geſchwindigkeit in B $= \frac{2MC-(m-M)c}{M+m}$. §. 295. Hieraus entſteht fol-

gende Proportion: $M+m : 2M = C+c : \frac{2M(C+c)}{M+m}$, welche vierte Proportionalgröße, vermittelſt der relativen Geſchwindigkeit, hier auf eben die Art, wie vorhin, beſtimmt wird. Zieht man von dieſer Größe die Geſchwindigkeit c in B vor dem Stoß ab, ſo erwächſt $\frac{2M(C+c)}{M+m} - c = \frac{(M-m)c+2MC}{M+m}$. Es muß aber c abgezogen werden, weil c hier verneint iſt. Hieraus erhellt, daß in beyden Fällen für die Geſchwindigkeiten zu finden, folgende zwo allgemeine Regeln Statt haben.

1.) Die Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß zu beſtimmen, nehme man an, wie $M+m$: $2m$, ſo die relative Geſchwindigkeit vor dem Stoß zur vierten Proportionalgröße, zieht man dieſe von der bejahten Geſchwindigkeit des Körpers A vor dem Stoß ab, ſo erhält man die Geſchwindigkeit eben dieſes A nach dem Stoß.

2.) Für B nehme man: wie $M+m : 2M$, ſo die relative Geſchwindigkeit vor dem Stoß zur vierten Proportionalgröße, dieſe zur Geſchwindigkeit in B vor dem Stoß addirt, giebt die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß. Man muß aber die verneinte Geſchwindigkeit in B von der bejahten unterſcheiden: dieſe wird abſolut genommen addirt, jene ſubtrahirt.

* §. 316.

Die beym Stoß verlorne Geſchwindigkeit läßt ſich auch durch Rechnung beſtimmen.

1.) Sind

1.) Sind die Körper harte oder weiche, ſo iſt nach dem Stoß nur die beyden Körpern A und B vorher gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit vorhanden. Beſtimmt man alſo den Unterſchied dieſer und der vor dem Stoß in A und B befindlichen, ſo erhält man ohne Schwierigkeit die beym Stoß verlornen Geſchwindigkeiten und Bewegungen.

2.) Sind die Körper elaſtiſch, ſo kommen unzählige und mancherley Fälle vor, wovon einige ſehr nett; nachdem man das Verhältnis entweder der Maſſen oder der Geſchwindigkeiten vor dem Stoß, oder beyder zugleich verſchieden annimmt. Die Rechnungsart wollen wir nur an wenigen Beyſpielen zeigen.

I. Beyſpiel. Die Geſchwindigkeiten vor dem Stoß verhalten ſich zu einer beſtimmten, als Einheit angenommenen Geſchwindigkeit eben ſo wie die Maſſen der Körper A und B zu einer gewiſſen Einheit, und überdies ſey $c = o$. Alsdenn bekommen wir 1.) die Geſchwindigkeit in A vor dem Stoß $= M + m$,

2.) nach dem Stoß $= \frac{CM - Cm}{M + m} = (M - m). \frac{M + m}{M + m} = M - m$; und 3.) die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß $= 2M. \frac{M + m}{M + m} = 2M$. Hieraus folgt, daß der Körper A dem ruhenden Körper eine größere Geſchwindigkeit, als A ſelbſt beſizt, nämlich gleich der doppelten Maſſe in A, mittheilt: A hingegen

gen nach dem Stoß ſich mit der Geſchwindigkeit M—m, proportional dem Unterſchied der Maſſen, bewegt.

Ferner ſchließt man, wenn der ruhende Körper, oder die Maſſe m ſehr klein, daß die Summe der Geſchwindigkeiten nach dem Stoß = der Geſchwindigkeit vor dem Stoß dreymal genommen. Man nimmt an, der größere Körper laufe an den kleinern ruhenden an.

II. Beyſpiel. Läuft aber die kleinere Maſſe an die größere, und nimmt man die Geſchwindigkeiten, wie vorhin, in der Verhältnis M+m : 1, ſo iſt die dem größern ruhenden Körper von dem kleinern anlaufenden mitgetheilte Geſchwindigkeit = der doppelten kleinern Maſſe; eine eben ſo große Geſchwindigkeit aber verliert der kleinere Körper. Man findet dies auf eben die Art, wie das vorhergehende.

Da aber lezteres nicht möglich, wo nicht der Körper A, der hier der kleinere, eine verneinte Geſchwindigkeit empfängt: ſo muß offenbar die kleinere an die größere anlaufende Maſſe A nach dem Stoß zurückſpringen. Die Geſchwindigkeit in B iſt aber allemal kleiner als die in A vor dem Stoß. Die Summe der Geſchwindigkeiten wird beym Stoß weder vermehrt noch vermindert.

§. 317.

Wir ſahen im erſten Beyſpiel des vorigen §. daß die Geſchwindigkeit beym Stoß ſich ſehr vermehren kann. Weit größer wird aber die Vermehrung der Geſchwindigkeit, wenn man mehr als zwey Körper nimmt. Hier kann die Geſchwindigkeit ſo groß werden, daß die Vermeh-

rung

rung wunderbar drückt, die ſich doch nicht bezweifeln läßt. Wir wollen alſo folgendes bemerken:

1.) Nehmet drey elaſtiſche Körper A, B, C; B ſey größer als A, und C wieder größer als B. Der kleinere Körper A ſtoße auf den größern B, und mittelſt dieſen auf den noch größern C. Hier iſt die in C von mittelbaren Stoß des Körpers A an C erzeugte Geſchwindigkeit größer als die Geſchwindigkeit, die dem Körper C wäre mitgetheilt worden, wenn A unmittelbar ohne einem andern Zwiſchenkörper an C geſtoßen hätte.

Denn ſezt man die Maſſe in A $= M$, und die Maſſe in B $= nM$, ſo iſt, B ruhend angenommen, deſſen Geſchwindigkeit nach dem Stoß $= \frac{2C}{1+n}$.

§. 297. Läuft B wiederum an C, deſſen Maſſe wir $= rM$ ſetzen, ſo iſt die Geſchwindigkeit des lezten Körpers C nach dem Stoß $= \frac{4nC}{(1+n)(r+n)}$.

Läuft hingegen A unmittelbar an C, ſo wird dieſes Geſchwindigkeit $= \frac{2C}{1+r}$. Demnach verhält ſich dieſe Geſchwindigkeit zur vorigen, wie $\frac{2C}{1+r}$: $\frac{4nC}{(1+n)(r+n)} = r+n+rn+n^2 : 2n+2rn$. Sezt

man

man nun $r = p + n$, ſo erhält man ſtatt der Verhältnis $n^2 + r : rn + n$, dieſe $p : pn$. Da nun pn größer als p, weil Mn größer als M, folglich $n > 1$, ſo iſt die dem Körper C mittelſt B ertheilte Geſchwindigkeit größer als die, ſo durch unmittelbaren Stoß von A wäre eingedrückt worden.

2.) **Bewegt ſich auch, wenn das übrige einerley, B langſamer als der Körper A, ſo iſt die durch den mittelbaren Stoß in C erzeugte Geſchwindigkeit größer als die, ſo aus unmittelbarem Stoß entſpringt.** Dies wird auf eben die Art, wie das vorige, ohne Schwierigkeit erwieſen. Wir ſchreiten zum folgenden fort.

3.) Wir ſagten im erſten Beyſpiel des zweyten Falls §. 316. die dem Körper B von A unmittelbar mitgetheilte Geſchwindigkeit ſey weit größer als die Geſchwindigkeit des A ſelbſt vor dem Stoß, wenn A größer als B: welches man auch aus der Geſchwindigkeit des vor dem Stoß ruhenden $B = \frac{2MC}{M+m}$ ſchließt, wo $2M > M+m$: die Geſchwindigkeit in B nach dem Stoß wird größer als die vorher in A. Laßt uns nun ſehen, was hieraus folgt. Mehrere elaſtiſche Kugeln liegen in einer Reihe, wovon die zweyte in der Reihe kleiner als die erſte, die dritte kleiner als die zweyte u. ſ. f. daß immer die folgende kleiner als die vorhergehende; alle ruhen. Stoßet dann an die erſte Kugel, und bringet in ihr eine beſtimmte Geſchwindigkeit hervor, womit ſie wieder an die zweyte anläuft: die zweyte ſtoße mit der im Stoß von der erſten empfangenen Geſchwindigkeit an die dritte, dieſe wieder an die vierte, und

ſo

ſo ferner jede an die folgende in der Reihe. Hier iſt offenbar, daß die Geſchwindigkeit jeder folgenden Kugel beſtändig größer wird, und daß diejenige, womit die kleinſte und lezte in der Reihe fortgeht, jene Geſchwindigkeit weit überſteigen kann, womit die erſte und größte die Bewegung dieſer Kugeln erregte.

Wie aber die Geſchwindigkeit der lezten Kugel aus der Geſchwindigkeit der erſten, und aus dem Verhältnis, worinn die Maſſen der folgenden Kugel abnehmen, wie auch aus der Anzahl derſelben zu beſtimmen, ſieht man aus dem vorhergehenden. Die Geſchwindigkeit jeder Kugel läßt ſich auch aus der Geſchwindigkeit der vorhergehenden durch Rechnung angeben. Einige haben auch die Geſchwindigkeit der lezten Kugel berechnet, wenn ihre Anzahl 100, und die Maſſen dergeſtalt abnehmen, daß die vorhergehende in der Reihe zur folgenden ſich immer wie 2 : 1 verhält; ſie ſezten die Geſchwindigkeit der erſten anſtoßenden Kugel = 1, und fanden, daß die der lezten und kleinſten durch die Reihe der 100 Kugeln mitgetheilte Geſchwindigkeit ſich verhält zur Geſchwindigkeit der erſten Kugel wie 2338500000000 : 1 beynahe. Siehe §. 335. Zuſ.

§. 318.

Dies iſt es, was beym Stoß der Körper vorzüglich zu bemerken; da es uns lang genug aufgehalten, ſo übergehen wir es nebſt mehrern andern, aus dem geſagten leicht herzuleitenden Sätzen. Auch ſind noch andere, mit den vorhergehenden verknüpfte, weiter zu entwickeln übrig. Wir müſſen vom ſogenanten **Mittelpunkt des Stoßes**, ingleichen vom **Zurückprallen elaſtiſcher Körper und deſſen Geſetzen;**

ſetzen; vom eccentriſchen Stoß, wenn der Stoß nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht, wie auch vom ſchiefen Stoß und deſſen Regeln handeln. Hierzu ſchreiten wir in der nächſtfolgenden Vorleſung.

Zwölfter Zuſatz.

Verſuch, wodurch das, was von den Kräften ſich bewegender Körper geſagt worden, beſtätigt wird. Mittelbarer Stoß.

Inhalt.

§. 327. — 334. Uebereinſtimmung der Erfahrung mit dem, was von den Kräften ſtoßender Körper im vorigen erwieſen worden. §. 334. 335. Weitere Entwicklung deſſen, was vom mittelbaren Stoß zunächſt geſagt worden.

---

§. 327.

Oben wurde bereits eines Verſuchs Meldung gethan, wodurch das Maas der lebendigen Kräfte erwieſen, und welcher mit Kugeln angeſtellt wird, die man aus beſtimmten Höhen in weiche Materien, deren Theile nachgeben und zuſammengedrückt werden, frey fallen läßt. Hier kommt keine Schwierigkeit vor, weder bey den Beobachtungen, noch bey den Schlüſſen daraus: man ſieht die Größe der Kräfte aus der Größe der in den weichen Körpern gemachten Hölen, und findet ſie im Verhältnis der Quadrate der Geſchwindigkeiten in die Maſſen. Anders verhält es ſich beym Verſuch mit einem gleichar-

migen

migen Hebel: der älteſte und erſte, ſo zu Erfindung des Maaſes der lebendigen Kräfte angeſtellt worden. Es iſt folgender: „In die eine Waagſchaale legt „man verſchiedenene Gewichte, auf den andern Arm „läßt man Gewichte fallen, durch deren Stoß die in „der erſten Waagſchaale etwas gehoben werden: „man beobachtete die Maſſen dieſer anſtoßenden ſchwe„ren Körper, und die Höhen, wodurch ſie gefallen „waren.“ Hier fehlte man darinn, daß man die Hebung der Gewichte als den ganzen, von der Gewalt des fallenden Körpers herrührenden Effekt betrachtete: denn der ganze Hebel wird zugleich in Bewegung geſezt, die, da ſie von eben der Gewalt des fallenden Körpers entſteht, nicht aus der Acht zu laſſen. Da aber dieſer Verſuch aus andern Urſachen ſehr merkwürdig iſt, ſo wollen wir, was dabey in Acht zu nehmen, kürzlich erklären.

§. 328.

Eine zu dieſem Verſuch bequeme Maſchine hat **Graveſand** (Phyſic. Elem. Mech. Lib. II. cap. V. §. 1072. ſqq.) verbeſſert, beſchrieben, und ihren Effekt ſehr genau berechnet. Sie iſt in der 1. Fig. Taf. XIV. zu ſehen. Der Waagebalken iſt AB, die Schaale L iſt von Eiſen, M aber von Holz gemacht, rund und einen Zoll tief ausgehölt. Dieſe wird beym Verſuch mit Thon angefüllt, deſſen Oberfläche mit dem Meſſer abzuſchaben, damit ſie genau horizontal wird. Die Weite BM iſt 3 Fuß größer, daher auch die Maſchine mit ihrem Geſtelle ans Ende des Tiſches zu ſetzen. Die Kugel G hänge mit einem Faden am Haken des Bleches D, auf die Schaale L lege man das Gewicht Q, ſo, daß die

Schaalen im Gleichgewicht ſind. Dann thue man das Gewicht P in der Schaale L hinzu, welches durch den Stoß der Kugel G, wenn der Faden abgeſchnitten wird, gehoben werden ſoll. Damit aber die vom Gewicht P beſchwerte Schaale L nicht niederſinkt, muß ſie in f von einem eiſernen Arme, der mit dem Geſtelle zuſammenhängt, unterſtüzt werden: daher auch vor Auflegung des Gewichts P ein anderes Geſtelle nöthig iſt, um den Hebel ins Gleichgewicht zu ſetzen.

Am Arm in f iſt ein dünnes elaſtiſches Blech fg befeſtigt, welches die in der Figur ausgedrückte Lage hat, wenn es nicht zurückgehalten wird, deſſen Ende g aber ſich von einem andern kleinen, mit dem Arm A zuſammenhängenden Bleche, in i zurückhalten läßt. Dies in i zurückgehaltene Blech fg kann nicht nachlaſſen, wo nicht A ein wenig gehoben wird, da es alsdenn in die Lage fg kommt. Hieraus erkennt man, ob A wirklich gehoben worden oder nicht, und ob es um eine gewiſſe Höhe gehoben worden. Denn wird der Stoß, wodurch die Waage in Bewegung geſezt wird, nur etwas vermindert, ſo läßt die Feder fg in i nicht nach.

Nach dieſer Verrichtung bemerkte Graveſand:

1.) ein Gewicht von 4 Unzen wurde von der Kugel G gehoben, wenn ihre Weite vom Thon $6\frac{7}{8}$ Zoll war. Verminderte man dieſe Höhe nur um $\frac{1}{4}$ Zoll, ſo ließ die Feder nicht nach.

2.) Bey einem Gewicht P von 8 Unzen war die Höhe, wodurch G um das Gewicht zu heben fiel, $14\frac{5}{8}$ Zoll.

3.) Bey einem Gewicht von 12 Unzen war die Höhe $23\frac{1}{2}$ Zoll. Die ganzen Höhen aber mit den

Höhen

Höhen der Hölen im Thon waren beynahe 7, $14\frac{5}{8}$, $23\frac{3}{4}$.

§. 329.

Um hier die Effekte zu berechnen, iſt zu merken: daß die ganze Maſſe des Hebels vom Stoß der Kugel G bewegt, und überdies der Widerſtand des gehobenen Gewichts überwunden worden. Hier war alſo von der fallenden Kugel G eben das zu bewirken, als wenn das ruhende wagerechte, um den Punkt A bewegliche Pendel ABc (Taf. XIV. Fig. 3.) von der gerad anſtoßenden Kugel d in Bewegung geſezt wird. Bc entſpricht dem Waagebalken; B und c ſind ſtatt der Schaalen; A der Ruhepunkt, d die anſtoßende Kugel, und B das zu hebende Gewicht.

§. 330.

Das übrige iſt leicht zu verſtehen. Nehmet erſtlich den Hebel Bc ohne Schwere an, traget die Maſſe B in c, nach §. 155. Vorl. Setzet cA = c; AB = d, die Maſſe in c = C, in B = D; ſo iſt die Trägheit in c $= C + \frac{Dd^2}{c^2} = \frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$. Alsdenn geſchieht der Stoß der Kugel d, deren Maſſe wir L und die Geſchwindigkeit v nennen, auf die gewöhnliche und einfache Art. Da nun cAB vor dem Stoß ruht, folglich C (§. 301. Vorl.) = o, ſo iſt die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoß

$$= \frac{Lc^2.v}{Cc^2 + Dd^2 + Lc^2},$$

wenn c §. 301. hier v heißt.

Dies wird aus den Regeln des Stoßes harter Körper, dergleichen man hier annimmt, beſtimmt.

§. 331.

Auf ähnliche Art wird auch der Stoß zweyer Pendeln beſtimmt, in was für einem Punkte auch der Stoß geſchieht, und aus wie viel Gewichten die Pendeln zuſammengeſezt ſind. Iſt der Stoß gerade, ſo läßt er ſich allemal auf den einfachen Stoß bringen; denn trägt man alle Maſſen in die Stelle, wo das eine Pendel an das andere ſtößt, ſo beſtimmen die obigen Regeln des Stoßes die Bewegung.

Z. B. ſey aEF ein um den Punkt a bewegliches Pendel; die Trägheit in F = F, in E = E, Fa = f, Ea = e, und der Stoß geſchehe gerade auf das andere horizontal liegende. So iſt nach Verſetzung der Trägheit E, die Trägheit in $F = F + \frac{Ee^2}{f^2} = \frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Wir bekommen alſo den einfachen Stoß der Trägheiten $\frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$ und $\frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$. Sezt man die Geſchwindigkeiten C und c in den Gleichungen §. 301. und $\frac{Cc^2 + Dd^2}{c^2}$ ſtatt M, ſo wie $\frac{Ff^2 + Ee^2}{f^2}$ ſtatt m, oder ſezt man auch dieſe Werthe

der

der Größen M und m in der obigen Formel der gemeinſchaftlichen Geſchwindigkeit $\frac{CM + cm}{M + m}$, ſo wird das übrige leicht beſtimmt. Auch iſt die Arbeit einerley, ob ſich beyde Körper F und E, oder nur der eine bewegt. Da dieſes deutlich genug, wollen wir es nicht mit mehrerm abhandeln, ſondern vielmehr zu Graveſands Maſchine und ihrer Bewegung zurückkehren.

§. 332.

Es iſt aber die Maſſe des Waagebalkens in dieſer Maſchine beträchtlich genug, um ſie mit in Anſchlag zu bringen; ſo wie auch beym Pendel in den vorigen Beyſpielen die Maſſe der Axe nicht auſer Acht zu laſſen, wenn ſie ſchwer angenommen wird. Daher ſind auch alle Punkte der Axe auf eben die Art, wie vorhin, zu verſetzen. Graveſand nahm an, der Durchſchnitt des Waagebalkens beſtehe aus dem Parallelogramm ABcD (Taf. XIV. Fig. 2.) und dem Dreyeck AGD; ferner nahm er die Weite von der Linie FE für die Weite vom Punkt E an, weil FE ſehr klein. Dies vorausgeſezt, ſey AB = a, jede Entfernung von E, wie Eh, = x, ih = dx, und BE = Ec = b, ſo iſt das Element kghi = adx, und

$$S. \frac{ax^2dx}{b^2} = \frac{1}{3}\frac{ax^3}{b^2},$$ welche Summe das Moment aller nach dem Punkt c verſezten Trägheiten in AFEB. Daher das Moment des ganzen Parallelogramms

 ABCD

$ABCD = \frac{2}{3} \frac{ax^3}{b^2}$, welche Summe vollſtändig iſt, wenn $x = b$; da das ganze Moment des Parallelogramms ABCD in $c = \frac{2}{3}ab$.

Für das Dreyeck wird die Rechnung eben ſo geführt. Denn iſt $FG = c$, ſo iſt $Ag = b - x$, $gm = \frac{cb - cx}{b}$, und das Element $lmgk = \frac{cb - cx}{b} \cdot dx$. Deſſen Moment nach geſchehener Verſetzung in $c = (cb - cx) \cdot \frac{x^2}{b^3} \cdot dx$, wovon das Integral $= \frac{\frac{1}{3}cbx^3 - \frac{1}{4}cx^4}{b^3}$, ſo für das ganze Dreyeck AGF, $x = b$ geſezt, in $\frac{1}{12}cb$ übergeht. Daher das Moment des ganzen Dreyecks $ADG = \frac{1}{6}cb$.

Für die Trägheiten der Waagſchaalen und der Körper, womit ſie aufgehängt ſind, laſſen ſich ihre Gewichte, und die Schwerpunkte in A und B (Fig. 1.) annehmen. Das Gewicht der Schaale M und der damit verbundenen Körper, heiſe alſo M, das Gewicht G, G; P, P und Q, Q; das Gewicht der Schaale L und der dazu gehörigen Körper, L: ſo iſt die Summe aller nach B verſezten Trägheiten $= \frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb + L + P + Q + M$, oder $L + P + Q + M = l$, und $\frac{2}{3}ab + \frac{1}{6}cb = f$ geſezt, $= l + f$. Iſt h die Höhe, wodurch G fällt, und $\sqrt{h}$ die Geſchwindigkeit, womit es ſtößt, ſo iſt die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit

keit nach dem Stoß $\frac{G\sqrt{h}}{l+f+G}$. §. 301. Vorl. ſo zugleich die Geſchwindigkeit in A, die Graveſand eben ſo fand, und auf andere Art erwies.

§. 333.

Da alſo dieſe Geſchwindigkeit beſtimmt iſt, ſo läßt ſich die Höhe, wodurch G fällt, mit der Höhe, wodurch A ſteigt, ehe die Feder nachläßt, vergleichen. Leztere heiſe H; um ſie mit jener zu vergleichen, wollen wir die Bewegung des Schwingungspunkts zwiſchen A und G beſtimmen.

Die Schaale M iſt aber mit L und Q im Gleichgewicht. Betrachtet man alſo den Hebel wie ein ſchwingendes Pendel, ſo iſt der Druck im Schwerpunkt P, und das Moment dieſes Schwerpunkts P. Ac. Daher die Entfernung des Schwingungspunkts vom Punkt c $= \frac{(l+f+G)Bc^2}{P.Bc} = \frac{(l+f+G)Bc}{P}$. §. 156. 157. Vorl. Aber die Geſchwindigkeiten ſämmtlicher Punkte in Bc ſind den Entfernungen von c proportional, folglich

$$Bc : \frac{(l+f+G)Bc}{P} = \frac{G\sqrt{h}}{l+f+G} : \frac{G\sqrt{h}.Bc}{P.Bc} = \frac{G\sqrt{h}}{P}.$$

Dies iſt die Geſchwindigkeit des Schwingungspunkts. Da nun die Höhen, wodurch die Punkte

 in

in Bc oder Ac ſteigen, auch den Geſchwindigkeiten oder den Entfernungen von c proportional ſind, ſo iſt $\frac{G\sqrt{h}}{l+f+G} : \frac{G\sqrt{h}}{P} = H : \frac{H.(l+f+G)}{P}$, welches die Höhe ausdrückt, wozu der Schwingungspunkt in eben der Zeit ſteigt, worinn A zur Höhe H ſteigt.

Da ſich aber der Schwingungspunkt eben ſo bewegt, wie ein frey von der Schwere getriebener Körper, ſo verhalten ſich auch die Höhen, wozu er gelangen kann, wie die Quadrate der Geſchwindigkeiten. Daher $\frac{G^2h}{P^2} = \frac{H(l+f+G)}{P}$, folglich $h = \frac{H.P.(l+f+G)}{G^2}$.

Nun iſt in der oben beſchriebenen Maſchine $H = 1\frac{21}{100}$ Zoll, und $FE : FG = 3 : 4$. Das Gewicht des Waagebalkens = 19 Unzen, 2 Drachmen, 1 Scrupel = 463 Scrupel. Daher $f = 123\frac{1}{2}$ Scrupel, und die Gewichte der Waagſchaalen, nebſt Q und G, oder $l + G - P = 1320$ Scrupel. Das Gewicht $G = 67$ Scrupel. Sezt man nun dieſe Werthe in der Gleichung $h = \frac{H.P.(l+f+G)}{G^2}$, ſo wird $h = \frac{21P(1443\frac{1}{2}+P)}{448900}$; man ſetze ferner ſtatt P

zuerſt

zuerſt 4, dann 8, und endlich 12 Unzen, ſo findet man für die Fallhöhe der Kugel G 1.) 6,91. 2.) 14,68. 3.) 23,32. Dieſe Zahlen ſtimmen mit obigen beobachteten Höhen 7, $14\frac{5}{6}$, $23\frac{3}{4}$ dergeſtalt überein, daß der Unterſchied von der Rechnung mit Recht für nichts geachtet wird.

§. 334.

Bey dem §. 317. **Vorl.** abgehandelten **mittelbaren Stoß** ſind noch folgende zwey Stücke merkwürdig: Das eine iſt, warum man annehmen muß, daß die in einer Reihe liegenden Maſſen im geometriſchen Verhältnis abnehmen; das andere, wie die an beſagtem Ort geſezte, die Geſchwindigkeit der lezten Kugel ausdrückende Zahl am leichteſten zu finden. Um das erſte einzuſehen, laßt uns das **Verhältnis dreyer zuſammenſtoßender Körper** ſuchen, **wobey die der Maſſe** C **von der Maſſe** A **mittelſt** B **ertheilte Geſchwindigkeit die möglichſtgrößte iſt.**

Die Maſſen der beyden Körper A und B heiſen, wie vorhin, M und m; ihre Geſchwindigkeiten V und v; die Maſſe in C ſey c, und B, woran A ſtößt, ruhe, ſo iſt nach §. 295. **Vorl.** die Geſchwindigkeit nach dem Stoß in B $= \frac{2MV}{M+m}$, läuft B mit dieſer Geſchwindigkeit an C, ſo iſt dieſes Geſchwindigkeit nach dem Stoß $\frac{4mMV}{(M+m).(m+c)}$, deren Differential $= 0$ zu ſetzen, wenn ſie die größte ſeyn ſoll, wie aus der Lehre vom Größten bekannt iſt. Da man

hier aber nur die veränderliche Größe m hat, ſo wird Mc = mm, oder M : m = m : c. Soll alſo einem Körper C mit Hülfe eines mittlern B von dem anlaufenden Körper A die größte Geſchwindigkeit eingedrückt werden; ſo muß die Maſſe des mittlern Körpers B die mittlere geometriſche proportionale zwiſchen A und C ſeyn.

§. 335.

Dies vorausgeſezt, denke man ſich eine Reihe Kugeln, die alle von einer Kugel A, die zuerſt an die eine Kugel ſtößt, von welcher ſich hierauf die Bewegung auf die übrigen fortpflanzt, in Bewegung geſezt werden. Man drücke die Maſſen dieſer Kugeln, von der erſten an gerechnet, durch m, nm, n^2m, n^3m . . . $n^l m$, aus, wo l ihre Anzahl weniger der erſten, und m die Maſſe der erſten anſtoßenden Kugel bedeutet. Sezt man die Geſchwindigkeit in m = 1, ſo findet man nach obigen Regeln die Geſchwindigkeit der übrigen, und zwar

bey der zweyten, oder der erſten, an die A ſtößt

$$= \frac{2}{n+1}.$$

$$\text{bey der dritten} = \frac{4}{(n+1)(n+1)} = \frac{4}{(n+1)^2}.$$

$$\text{bey der vierten} = \frac{8}{(n+1)(n+1)(n+1)} = \frac{8}{(n+1)^3}.$$

Daher

Daher folgen die Geſchwindigkeiten in dieſer Reihe $1, \frac{2}{n+1}, \frac{4}{(n+1)^2}, \frac{8}{(n+1)^3}, \frac{16}{(n+1)^4}$ .... $\frac{2^{l}}{(n+1)^{l}}$.

Iſt nun die Anzahl der Kugeln 100, ſo iſt $l=99$, und die Geſchwindigkeit bey der lezten $= \frac{2^{99}}{(n+1)^{99}}$, die man aus dem bekannten Geſetz der Reihe leicht findet. Auch läßt ſich die Geſchwindigkeit bey jeder andern zwiſchen der erſten und lezten beſtimmen. Da aber dies keine Schwierigkeit leidet, ſo mags genug ſeyn, hier die Art und Weiſe der Rechnung gezeigt zu haben, die jeder in beſondern Fällen leicht führen kann.

Neun-

hier aber nur die veränderliche Größe m hat, ſo wird $Mc = mm$, oder $M : m = m : c$. Soll alſo einem Körper C mit Hülfe eines mittlern B von dem anlaufenden Körper A die größte Geſchwindigkeit eingedrückt werden; ſo muß die Maſſe des mittlern Körpers B die mittlere geometriſche proportionale zwiſchen A und C ſeyn.

§. 335.

Dies vorausgeſezt, denke man ſich eine Reihe Kugeln, die alle von einer Kugel A, die zuerſt an die eine Kugel ſtößt, von welcher ſich hierauf die Bewegung auf die übrigen fortpflanzt, in Bewegung geſezt werden. Man drücke die Maſſen dieſer Kugeln, von der erſten an gerechnet, durch m, nm, n^2m, n^3m . . . $n^l m$, aus, wo l ihre Anzahl weniger der erſten, und m die Maſſe der erſten anſtoßenden Kugel bedeutet. Sezt man die Geſchwindigkeit in $m = 1$, ſo findet man nach obigen Regeln die Geſchwindigkeit der übrigen, und zwar

bey der zweyten, oder der erſten, an die A ſtößt

$$= \frac{2}{n+1}.$$

bey der dritten $= \frac{4}{(n+1)(n+1)} = \frac{4}{(n+1)^2}$.

bey der vierten $= \frac{8}{(n+1)(n+1)(n+1)} = \frac{8}{(n+1)^3}$.

Daher

Daher folgen die Geſchwindigkeiten in dieſer Reihe $1, \frac{2}{n+1}, \frac{4}{(n+1)^2}, \frac{8}{(n+1)^3}, \frac{16}{(n+1)^4}$ .... $\frac{2^l}{(n+1)^l}$.

Iſt nun die Anzahl der Kugeln 100, ſo iſt $l = 99$, und die Geſchwindigkeit bey der lezten $= \frac{2^{99}}{(n+1)^{99}}$, die man aus dem bekannten Geſetz der Reihe leicht findet. Auch läßt ſich die Geſchwindigkeit bey jeder andern zwiſchen der erſten und lezten beſtimmen. Da aber dies keine Schwierigkeit leidet, ſo mags genug ſeyn, hier die Art und Weiſe der Rechnung gezeigt zu haben, die jeder in beſondern Fällen leicht führen kann.

Neunzehnte Vorleſung.

Vom Mittelpunkt des Stoßes. Vom Zurückprallen anlaufender Körper. Vom Stoß, der nicht durch den Schwerpunkt geht, und vom ſchiefen Stoß.

Inhalt.

§. 319. Der Mittelpunkt des Stoßes iſt mit dem Schwingungspunkt einerley. §. 320. Bewegung, wenn Körper an unbewegliche Hinderniſſe anlaufen. §. 321. — 324. Zurückprallen der Körper. §. 325. Winkel unter welchem die Körper anlaufen müſſen, um einen in einem gegebenen Ort liegenden Körper zu treffen. §. 326. Maas der unvollkommenen Elaſticität. §. 327. bis 332. Schiefer Stoß, bey ihm wird §. 333. 334. die Bewegung des Schwerpunkts der Körper nicht verändert. §. 336. — 338. Eccentriſcher Stoß. Aus ihm wird die Umdrehungsbewegung erzeugt. Hiervon in der beygefügten Anmerkung mehr. Die Umdrehungsbewegung hindert die fortrückende Bewegung nicht.

§. 319.

Bisher nahmen wir den Stoß ſo an, daß ſeine Richtung durch den Schwerpunkt der Maſſe geht; und folglich der Körper, wenn die Bewegung nicht gehindert wird, mit ſeiner ganzen Kraft wirkt. Ganz anders verhält es ſich bey gehinderter Bewegung, wenn z. B. der Körper ſich wie ein Pendel um einen gewiſſen Punkt dreht.

Es

Es ſey alſo AD (Taf. XII. Fig. 13.) eine Linie, in B, C, D hängen Gewichte, die im Fall durch den Bogen AD lebendige Kräfte erlangen, (die übrigen Fälle laſſen ſich nach gehöriger Verſetzung der Maſſen auf gegenwärtigen bringen). Dieſe Körper ſind alſo, wenn ſie in die Vertikallinie kommen, mit den durch den Fall erlangten Kräften verſehen, ſie ſtoſſen nun an einen Körper F, ſo werden ſie dieſem F, nach der verſchiedenen Lage des Punkts, worinn das Syſtem an F ſtößt, einen größern oder geringern Stoß ertheilen. In jedem Punkte, worinn das Pendel an den Widerſtand F ſtoßen kann, einen einzigen ausgenommen, geht ein Theil der Kräfte des Pendels auf den Zug des Nagels, woran es in A aufgehängt und befeſtigt iſt; und nur in einem einzigen Punkte werden alle Kräfte zur Bewegung des Widerſtandes angewendet. Doch muß dieſes in einem Punkte geſchehen. Denn geſchieht der Stoß in einem von A zu weit entfernten Punkte, ſo wird ein Theil der Kräfte auf Bewegung des Punkts A verwendet, und zwar ein deſto größerer, je weiter der Punkt des Stoßes von A entfernt iſt: geſchieht hingegen der Stoß zu nahe an A, ſo hat eben dieſes Statt, und je näher an A der Punkt des Stoßes, deſto größer die Bewegkraft des Pendels, und deſto kleiner die Kraft, womit der Körper F fortgeſtoßen wird. Es muß alſo ein Punkt ſeyn, worinn der Körper F vom Pendel dergeſtalt geſtoßen wird, daß die zur Bewegung des Pendels dienender Kraft verſchwindet, und alle lebendigen Kräfte zum Stoß auf den Widerſtand F angewandt werden. Dieſen Punkt des Pendels nennen wir den **Mittelpunkt des Stoßes**; in ihm läßt ſich die ganze Kraft des

ſtoßen-

ſtoßenden Pendels verſammelt denken. Um aber die Lage dieſes Punkts zu finden, laßt uns ſeine Eigenſchaft betrachten. In ihm wird eben das bewirkt, was vom ganzen Syſtem, ſtieß es frey, bewirkt würde; daher muß die Geſchwindigkeit daſelbſt eben die ſeyn, ſo im freyen Fall erlangt wird, und nimmt man dieſen Punkt in E an, ſo müſſen die in D, C, B und A ſchwingenden Körper ſich in E frey bewegen. Daher wird E durch den doppelten Werth der lebendigen Kräfte beſtimmt, wovon der eine eine Funktion der Linie AE, die wir x nennen. Dieſen doppelten Werth zu finden, berechne man die lebendigen Kräfte auf doppelte Art, erſtlich ſo, daß man die Körper B, C, D, in einem Syſtem verknüpft, dann jeden für ſich betrachtet. Die in beyden Fällen gefundenen Summen der lebendigen Kräfte ſind gleichgros zu ſetzen.

Setzet alſo, die Körper am Pendel bewegen ſich frey, und deutet ihre Maſſen D, C, B mit eben den Buchſtaben D, C, B, die Linien DA, CA, BA mit den Buchſtaben d, c, b an. Hier ſind die im freyen Fall durch Dd, Cc, Bb erlangten Geſchwindigkeiten in $D = \surd d$, in $C = \surd c$, in $B = \surd b$. §. 79. und daher die ganze Summe der lebendigen Kräfte $= Dd + Cc + Bb$.

Der andere Werth der lebendigen Kräfte iſt aus der Bewegung der verknüpften Körper zu beſtimmen, und zwar ſo, daß er von der Linie $AE = x$ abhängt. Hier ſind aber die Geſchwindigkeiten in D, C, B nicht, wie vorhin, $\surd d$, $\surd c$ ꝛc. ſondern vielmehr den Linien d, c, b ſelbſt proportional. Um nun die wahre Größe dieſer Geſchwindigkeiten zu beſtimmen, muß man die Geſchwindigkeit in E für die Einheit nehmen, womit die

die übrigen gemeſſen werden. Und da die Geſchwindigkeit in E ſich verhält zur Geſchwindigkeit in D, wie x : d, ſo wird $x : d = \sqrt{x} : \frac{d}{\sqrt{x}}$, ſo die wahre Geſchwindigkeit in D bey der Bewegung des ſchwingenden Pendels. Eben ſo findet man die wahre Geſchwindigkeit in $c = \frac{c}{\sqrt{x}}$, und in $b = \frac{b}{\sqrt{x}}$. Daher auch die Summe der lebendigen Kräfte $= \frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x}$, und beyde Summen gleichgros angenommen, $\frac{Ccc + Bbb + Ddd}{x} = Dd + Cc + Bb$, und

$$x = \frac{Ccc + Bbb + Ddd}{Dd + Cc + Bb}.$$

Hieraus erhellt, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem Schwingungspunkt zuſammenfällt. Beyde werden auf eben die Art aus eben den Größen beſtimmt. Die Theile in beyden Punkten bewegen ſich frey; kein Theil hindert die Bewegung des andern.

§. 320.

Oben ſagten wir, elaſtiſche Körper ſpringen zuweilen nach dem Stoß nach entgegengeſezten Richtungen zurück. Von dieſen Fällen wollen

wir

wir nur diejenigen betrachten, wo der Widerſtand, an den ſie ſtoßen, unbeweglich iſt, und die Bewegung der anlaufenden Körper unterſuchen.

1.) Trift ein harter Körper ſenkrecht auf einen unbeweglichen Widerſtand, ſo wird er nach dem Stoß aller Bewegung beraubt ſeyn. Denn die Geſchwindigkeit nach dem Stoß, oder f (§. 301.) iſt $= \frac{CM + cm}{M + m}$, und weil $c = 0 = \frac{CM}{M + m}$. Da aber m nicht weichen kann; ſo iſt ſeine Maſſe in Vergleichung mit M für unendlichgros zu achten, folglich

$$f = \frac{1}{\infty} = 0,$$ d. i. der Körper ruht nach dem Stoß.

Eben dies gilt von weichen Körpern. Aber ein auf einen ſolchen Widerſtand anlaufender elaſtiſcher Körper wird mit eben der Geſchwindigkeit in ſenkrechter Richtung zurückſpringen. Denn er wird beym Stoß zuſammengedrückt, mit eben der Kraft ſtellt ſich die Geſtalt wieder her, und der Körper bewegt ſich zurück.

2.) Sey der Widerſtand zugleich elaſtiſch, an ihn laufe ein anderer elaſtiſcher Körper in ſenkrechter Richtung. Da hier keine Kraft verloren geht, ſo muß der anſtoßende Körper mit eben der Geſchwindigkeit, womit er anläuft, zurückſpringen: wird aber ein in Zuſammendrückung der Geſtalt aufgegangener Theil der Kräfte nicht wieder erſezt, ſo läuft der anſtoßende Körper mit einer Geſchwindigkeit zurück, die ſich verhält wie die Quadratwurzel des Unterſchieds der Kräfte, die er vor dem Stoß hatte, und der beym Stoß verlornen.

§. 321.

§. 321.

Läuft aber ein nicht elaſtiſcher Körper ſchief an einen andern nicht elaſtiſchen, ſo läßt ſich ſeine Geſchwindigkeit CB (Taf. XII. Fig. 14.) dergeſtalt in zwo andere AC und CD zerlegen, daß CD = AB auf die Ebene FC, woran der Körper ſtößt, ſenkrecht, und CA mit ihr parallel. Alsdenn bewegt ſich der Körper, wenn die Ebene glatt genug iſt, nach dem Stoß zur Seite der Ebene mit der Geſchwindigkeit DB in der mit der Ebene parallelen Richtung AC: die Geſchwindigkeit AB aber geht ganz verloren. Iſt aber die Ebene rauh; ſo rollt der Körper nach der Seite der Ebene, wegen dem Hindernis, das er überall in der Ebene antrift, und wodurch er überall herumgetrieben wird.

Dies begreift man zur Genüge, daß lebendige Kräfte eben ſo, wie Preſſungen, ſich in zwo andere, auf einander ſenkrechte, Seitenkräfte zerlegen laſſen. §. 279. Denn $BC^2 = AB^2 + AC^2$, nach welcher Zerlegung das übrige von ſelbſt folgt.

§. 322.

Läuft ein Körper C (Taf. XIII. Fig. 1.) an einen andern unbeweglichen B in der Richtung CB, und ſpringt nach dem Stoß in der Linie BC zurück; ſo heißt der Winkel CBA, den AB ſenkrecht auf FG mit der Linie CB einſchließt, der **Einfallswinkel**, der Winkel ABE aber der Zurückprallungswinkel.

§. 323.

Des anſtoßenden Körpers ganze Kraft läßt ſich in zwo Seitenkräfte AC nnd AB zerlegen, §. 279. und iſt der Anlauf ſchief; ſo wird der Stoß blos mit der

 Kraft

Kraft AB vollbracht, da hingegen die ganze Kraft verwendet wird, wenn der Stoß in der Richtung des Loths geſchieht. Demnach verhält ſich die in der Richtung des Loths wirkende Kraft zur Kraft beym ſchiefen Stoß, wie CB : AB, d. i. wie der ganze Sinus zum Koſinus des Einfallswinkels.

§. 324.

Läuft ein vollkommen elaſtiſcher Körper an einen andern vollkommen elaſtiſchen unbeweglichen in der Richtung CB, ſo ſpringt er nach dem Stoß zurück, ſo daß der Einfallswinkel CBA dem Zurückprallungswinkel ABE gleich iſt.

Denn iſt die ganze Geſchwindigkeit, womit C an B ſtößt, CB, ſo läßt ſie ſich in die Geſchwindigkeit AC und CG theilen. §. 279. Aber AC wird beym Stoß nicht verändert, daher bewegt ſich C mit dieſer Geſchwindigkeit AC nach dem Stoß nach der Seite der Ebene, und erlangt die Geſchwindigkeit BF in der Richtung BF = BG, oder AC. Die Geſchwindigkeit BA geht zwar beym Zuſammendruck der Theile verloren, wird aber hernach völlig wieder erſezt, indem der elaſtiſche Körper zu ſeiner vorigen Geſtalt zurückkehrt, wodurch zugleich der anſtoßende Körper mit eben der Kraft zurückgeſtoßen wird, womit die Geſtalt verändert wurde, oder womit der Körper an B ſties.

Demnach bewegt ſich C nach dem Stoß in den Richtungen AB und FB, und zwar mit Geſchwindigkeiten, die ſich verhalten wie AB und FB = AC. Daher BE = CB, und der Winkel EBA = CBA. Hieraus ſchließt man zugleich, daß ein an einen andern elaſtiſchen unbeweglichen lothrecht einfallender Körper, in eben der Richtung zurückſpringt.

§. 325

§. 325.

Hieraus läßt ſich auch der Punkt B finden, wo ein Körper E an die elaſtiſche Ebene FG ſtoßen muß, um im Zurückſpringen den in H liegenden Körper zu treffen. Die Lage der Punkte E und H gegen FG iſt gegeben. Es ſey alſo EF = D, HI = d, FI = l, welche Linien zugleich gegeben ſind. Da nun EBF, HBI ähnliche Dreyecke, ſo wird, wenn BI = x, und FB = l — x,

$$D : l - x = d : x, \text{ daher } x = \frac{dl}{D + d}.$$

§. 326.

Geht aber ein Theil der Kräfte in AB verloren, welches geſchieht, wenn die Körper nicht vollkommen elaſtiſch ſind, ſo iſt das Dreyeck BKL, wenn von der Kraft AB z. B. nur BK wieder erſtattet wird, dem Dreyeck ABC nicht ähnlich. Daher auch der Zurückprallungswinkel dem Einfallswinkel nicht gleich. Hieraus findet man die Regeln des Zurückprallens bey unvollkommen elaſtiſchen Körpern. Es entſteht aber nicht jedes Zurückprallen vom Stoß; die verſchiedenen Urſachen abzuhandeln, gehört nicht hieher.

§. 327.

Wir müſſen nun vom ſchiefen Stoß reden: Dieſer geht zwar durch die Mittelpunkte der Kugeln, aber die Richtung, worinn der ganze Stoß geſchieht, fällt nicht in die Linie, die die Mittelpunkte der Körper zuſammenhängt, und, wie aus der Geometrie bekannt, auf den Berührungspunkt der zuſammenſtoßenden Kugeln ſenkrecht iſt. Auch hier kommen

mehrere Fälle vor, wovon wir nur die vornehmſten betrachten wollen. Ueberhaupt iſt zu merken, daß der ſchiefe Stoß, wenn ſeine Richtung nur durch der einen Kugel Mittelpunkt geht, ſich aus den Regeln des geraden Stoßes leicht beurtheilen läßt, wenn man die Kräfte in zwo andere auf einander ſenkrechte zerlegt. Daher bedarfen wir auch, auſer den vorhin erklärten, hier keiner neuen Regeln. Deutlicher wird dies aus folgenden Beyſpielen, womit wir die Sache erläutern wollen, erhellen.

§. 328.

Es ſey F (Taf. XIII. Fig. 2.) eine elaſtiſche ruhende Kugel; eine andere ebenfalls elaſtiſche A ſtoße an erſtere in der Richtung AB, mit der Geſchwindigkeit AB. Man zerlege die Kraft AB, oder die Geſchwindigkeit AB in zwo andere gleichgeltende AD und DB, §. 279. wovon leztere DB auf den Berührungspunkt der Kugeln ſenkrecht iſt, und, wenn A in B kommt, durch die Mittelpunkte der Kugeln B und F geht. Dieſe bringt alſo einen geraden Stoß hervor, der nach den vorigen Regeln zu berechnen. Denn aus dem gegebenen Winkel ABD, und aus der Geſchwindigkeit AB wird die Geſchwindigkeit DB beſtimmt, woraus man ferner die Geſchwindigkeit, womit F nach dem Stoß in der Linie FG fortgeht, erhält.

Die Geſchwindigkeit AD oder BI wird beym Stoß nicht verändert. Daher geht A mit ihr nach dem Stoß fort. F aber bewegt ſich in der Liuie FG.

§. 329.

Um aber die Bewegung A nach dem Stoß zu beſtimmen, ſind hier drey Fälle zu unterſcheiden.

1.) Sind

1.) Sind B und F gleichgros, ſo wird die Geſchwindigkeit DB ganz der Kugel F mitgetheilt, §. 297. 3, wodurch dieſe Geſchwindigkeit aus A völlig wegfällt. Daher hat A nach dem Stoß nur die Geſchwindigkeit BI, und bewegt ſich alſo auch in dieſer Richtung; A und F fahren aus einander in den Richtungen BI und BG, die einen rechten Winkel einſchließen.

2.) **Bey ungleichen Maſſen in A und F** ſpringt der anlaufende Körper entweder in eben der Linie, worinn ſich F bewegt, zurück, oder geht nach dem Stoß noch in eben der Linie mit F fort. Springt A zurück, ſo iſt ſeine nach §. 297. zu beſtimmende Geſchwindigkeit = EB; die Kugeln A und F fahren nach dem Stoß unter dem ſtumpfen Winkel GBK aus einander.

3.) **Verfolgt hingegen A nach dem Stoß in eben der Linie F**, ſo ſey ſeine Geſchwindigkeit in dieſer Linie FG, und die Richtung, wie er ſich bewegt, wird ſeyn BH. Demnach fahren zwar die Kugeln A und F nach dem Stoß aus einander, aber unter einem ſpitzen Winkel.

§. 330.

Bewegen ſich die Kugeln A und F (Taf. XIII. Fig. 3. n. 1. 2.) **gegen einander, und ſind zugleich nicht elaſtiſch.** A bewege ſich vor dem Stoß mit der Geſchwindigkeit AB, F mit der Geſchwindigkeit Fc: man zerlege AB in die beyden Seitenbewegungen AC und AD, wie auch FC in FI und Fh. (Fg in n. 2. iſt mit FI in n. 1. einerley.) ſo werden beym Stoß nur die Kräfte verändert, die ſich wie CB und hc verhalten, und beyde Körper bewe-

gen ſich nach dem Stoß mit ihren übrig gebliebenen Geſchwindigkeiten, und zwar in der Richtung dieſes Lothes, z. B. nach Bc. Die Seitenbewegungen DB und hF aber bleiben in Bf und cK einerley. Die nach dem Stoß in beyden übrig gebliebene Geſchwindigkeit ſey Bi = ce, und Bf, cK die unveränderten Seitengeſchwindigkeiten: ſo iſt nach Verzeichnung des Parallelogramms, deſſen Seiten jene Geſchwindigkeiten ſind, Bl die Richtung, Kraft und Geſchwindigkeit der Bewegung in A nach dem Stoß, und cd die Richtung der Bewegung in F. Hieraus ſehen wir

1.) wenn CB = Bh, ſo bewegen ſich A und C nach dem Stoß in parallelen Richtungen Bf und cK.

2.) Bewegen ſie ſich vor dem Stoß gegen einander, ſo fahren ſie nach dem Stoß aus einander, wie n. 1. und Ch iſt die **reſpective Geſchwindigkeit**, wovon der Stoß abhängt.

3.) Bewegen ſie ſich vor dem Stoß nach eben den Seiten, ſo iſt die Bewegung nach dem Stoß wie n. 2. und die **reſpektive Geſchwindigkeit**, wovon die Größe des Stoßes abhängt, Ch.

4.) Man vertheile dieſe **reſpektive Geſchwindigkeit** in beyde Körper ſo, daß die Geſchwindigkeiten in A und F ſich verkehrt wie die Maſſen verhalten. Es ſey dies in S (n. 2.) geſchehen, ſo iſt BS die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoß. Denn es heiſe CB, H, und ch, h, die Größe der Materie in A, M, und in F, m, CS aber x; bewegen ſich nun beyde Körper vor dem Stoß in eben der Richtung, ſo erhält man m : M = x : H — h — x.

Daher

Daher $CS = x = \frac{mH - mh}{M + m}$, und $SB = H - \frac{mH + mh}{M + m} = \frac{HM + mh}{M + m}$, alſo ſo groß, wie die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit nach dem Stoß.

5.) Demnach laſſen ſich aus der gegebenen Geſchwindigkeit, und dem Winkel ABD, nebſt BD im Parallelogramm der Kräfte, die Richtungen nach dem Stoß, wie auch die Geſchwindigkeiten cd und Bl beſtimmen.

§. 331.

Eben ſo findet man den ſchiefen Stoß elaſtiſcher Körper. Nur iſt zu merken, daß ſolche Körper auch in der Richtung der ſenkrechten Geſchwindigkeit, die durch die Mittelpunkte der Kugeln und den Berührungspunkt geht, zurückſpringen können.

Hier ſind überhaupt zwey Fälle zu unterſcheiden. Der eine (Taf. XIII. Fig. 4. n. 1.) wenn die Körper nach dem Stoß von einander in ſenkrechter Richtung DEl zurückſpringen; der andere, wenn ſie nach dem Stoß ſich in eben der Richtung nach eben den Seiten bewegen. (Fig. 4. n. 2.) A und F laufen alſo gegen einander mit den Geſchwindigkeiten AB und FI fort, ſo daß ſie in einem Augenblick in I gelangen: man zerlege AB in AC und AD, FI aber in FG und FH. Alsdenn wird der Stoß blos von den Kräften DB und IH vollführt. Die Geſchwindigkeiten nach dem Stoß ſeyn BE, Il, und da die Geſchwindigkeiten Bl, Gi ſich nicht ändern, ſo nehme man $Bg = CB$, $GI = Ih$, und verzeichne die Parallelogrammen

EfgB und IbKl, ſo iſt Bf die Geſchwindigkeit und Richtung in A nach dem Stoß, wie IK die Geſchwindigkeit und Richtung in F.

§. 332.

Auch werden die wahren Größen dieſer Geſchwindigkeiten BE und Il nach §. 295. leicht beſtimmt. Hier läßt ſich eben, wie vorhin, die reſpektive Geſchwindigkeit DH durch Dl, dergeſtalt in S theilen, daß die Theile ſich verkehrt verhalten, wie die Maſſen in A und F. §. 330. 4. Denn iſt SB die gemeinſchaftliche Geſchwindigkeit beyder Körper in der Richtung des Loths DL, und daher, wenn $DB = C$; $HI = c$, $= \frac{MC \pm mc}{M+m}$, und $DS = \frac{mC \mp mc}{M+m}$. Die Geſchwindigkeit in I nach dem Stoß in der Richtung des Loths Dl wird beſtimmt, wenn man nimmt $SB - DS = BE$, und die Geſchwindigkeit in F, wenn man nimmt $SH + SB = Il$. Denn führt man die Rechnung, ſo findet man eben die Werthe der Geſchwindigkeiten, die oben §. 295. angegeben ſind.

Dies wollen wir beſonders für den Fall zeigen, wo A und F vor dem Stoß ſich nach eben den Seiten bewegen, wenn wir nämlich nur auf die Bewegung in der Richtung des Loths Dl ſehen. (Fig. 4. n. 2.) Denn hier iſt $SB - DS = \frac{MC+mc}{M+m} - \frac{mC-mc}{M+m} = \frac{2mc+(M-m)C}{M+m}$, welches die

Geſchwin-

Geſchwindigkeit in A nach dem Stoß in der Linie Dl. §. 295.

In F iſt die Geſchwindigkeit nach dem Stoß in der ſenkrechten Linie Dl, SH + SB = C — c —

$$\frac{mC - mc}{M + m} + \frac{MC + mc}{M + m} = \frac{2MC + (m - M)c}{M + m},$$

welches die Geſchwindigkeit nach dem Stoß nach §. 295.

Man ſieht, wie eben das gefunden wird, wenn A und F vor dem Stoß ſich nach entgegengeſezten Seiten in der Richtung des Loths Dl bewegen.

§. 333.

Auch ſieht man, daß der Schwerpunkt der Maſſen ſowohl beym ſchiefen als geraden Stoß, in ſeiner gleichförmigen Bewegung in eben der Richtung beharret. A und F (Taf. XIII. Fig. 5.) bewegen ſich parallel und gleichförmig durch Ab und Fg, ſo daß die Geſchwindigkeit in A, Aa; in F, Ff, und G ſey der Schwerpunkt der Maſſen in A und F, daß F : A = AG : GF, ſo wird der Schwerpunkt ſich auch in dieſer Richtung gleichförmig fortbewegen. Denn nimmt man ſeine Geſchwindigkeit = Cc, und verlängert AF, af und bg bis in E, ſo iſt überall bey gleichen Zeiten Aa : ab, Cc : cd und Ff : fg einerley beſtändiges Verhältnis.

Es erhellt aber ſogleich, daß weder die Seitenbewegungen Aa und Ff, noch die Bewegung des Schwerpunkts ſich ändert. Es liegt nichts daran, ob die Körper elaſtiſch, hart oder weich ſind. Aus dem nächſt vorhergehenden iſt klar, duß die Bewegung des Schwerpunkts auch in Rückſicht der Be-

wegung der Körper im Loth Dl beſtändig bleibt. Auf keine Weiſe ändert ſich alſo die Bewegung des Schwerpunkts; gleichförmig geht er fort. Er wird aber von zwo Kräften getrieben, von der einen nach Gc, die aus der Seitenbewegung entſpringt, worinn die Körper ſich frey bewegen und nicht an einander ſtoßen: von der andern durch hc oder GI in der Richtung des Loths, wovon der Stoß abhängt. Von dieſen beyden Kräften wird der Schwerpunkt G in der Richtung der Linie Gh beſtändig gleichförmig getrieben.

§. 334.

Demnach wird der Schwerpunkt in einem ganzen Körperſyſtem, aus wie viel Körpern es auch beſteht, und was für Bewegungen die Theile des Syſtems auch haben, **in eben der gleichförmigen Bewegung beharren, worinn er ſich vorher ſchon befindet.** Denn alle Bewegungen ſämmtlicher Theile laſſen ſich auf die bisher erklärten bringen, und daraus beurtheilen.

§. 335.

Nun laßt uns auch den **eccentriſchen Stoß,** und deſſen Wirkungen kürzlich abhandeln. Der Stoß iſt eccentriſch, wenn die Richtung, worinn die Körper gegen einander laufen, nicht durch den Mittelpunkt des Körpers oder des Körperſyſtems, ſondern durch einen andern Punkt auſer ihm geht. Wir erwieſen §. 155. daß alle Maſſen auf gewiſſe Art ſich aus ihren Stellen in andere dergeſtalt verſetzen laſſen, daß die im ganzen Syſtem erzeugten Effekte der Kräfte eben ſo, wie vor der Verſetzung, bleiben. Da

nun

nun eben dies bey jedem Körper Statt findet; ſo laſſen ſich alle Theilchen des Körpers nach gehöriger Verſetzung in einer Ebene durch den Schwerpunkt aller Maſſen verſammelt denken; folglich kann man ſtatt des ganzen Körpers eine ſolche Ebene annehmen, worinn die vereinigten Widerſtände aller Maſſen eben die ſind und eben das, was vorher durch den ganzen Raum des Körpers zerſtreut, bewirken.

§. 336.

Es ſey alſo ABDECK (Taf. XIII. Fig. 6.) eine ſolche Ebene. Nach gehöriger Verſetzung der Trägheiten (die als geſchehen nicht einmal anzunehmen nöthig, wofern ſie nur möglich,) laßt uns die Ebene immateriell annehmen, die ſchweren Punkte A, B, D, E, C, K, deren Schwerpunkt in M ausgenommen. Dieſe Körper ſind mit nicht ſchweren Linien AM, DM, EM, KM ꝛc. mit dem Schwerpunkt M verknüpft. Ferner ſey HQ die Richtung der an die Ebene ſtoßenden Kraft, und da ihre Wirkung, ſie beſtehe im Druck oder Stoß, nicht nach dem Schwerpunkt M gerichtet iſt, ſo erhellt auch, daß die Bewewegungsbeſtreben, die im erſten Augenblick ſämmtliche Maſſen nach ihrer verſchiedenen Entfernung von Q empfangen, verſchieden ſind, daß ſie daher mit ungleichen Kräften verſehen in geraden Linien ſich von einander zu entfernen ſtreben, und durch ihre Verknüpfung im Syſtem gehindert ſich in Kreiſen zu bewegen anfangen, z. B. A durch Am, D durch Df, E durch Eg, K durch Kn ꝛc. Der Mittelpunkt dieſer Bewegungen läßt ſich in L annehmen. Da nun von dieſen, in allen Punkten vorhandenen Fliehkräften die

die als ein Durchmeſſer der Schwere angenommene Linie BMC nach beyden Seiten herumgetrieben wird, ſo ſieht man, daß der eccentriſche Stoß ſchon im erſten Augenblick zuwege bringt, daß das ganze Syſtem ſich um den Schwerpunkt im Kreis herumdreht. Denn die Momente aller um dieſen Punkt vertheilten Fliehkräfte ſind um ihn in gegenſeitigem Gleichgewicht.

§. 337.

Daher entſteht ein **Umdrehen** um den Schwerpunkt und eine unbewegliche Axe, ſo oft der Stoß im Syſtem eccentriſch iſt: und dies dauert fort, ſo lange die Fliehkräfte im Gleichgewicht bleiben. Auſſer dieſem wird noch eine **fortlaufende** Bewegung im Schwerpunkt erzeugt, womit ſich dieſer nach dem Stoß in gerader Linie bewegt. Denn verſetzen wir in Gedanken alle Trägheiten in D, E, K und A, in den Punkt Q, worauf die Kraft HQ wirkt, ſo geht der Stoß durch den Schwerpunkt, oder welches hier einerley, durch den Mittelpunkt der Trägheiten: und die hier aus dem Stoß entſtehende Veränderung läßt ſich eben ſo wie beym geraden Stoß auf eine Kugel, deſſen Richtung durch der Kugel Mittelpunkt geht, ſchätzen. Demnach muß beym eccentriſchen Stoß eine Bewegung und Geſchwindigkeit im Mittelpunkt, womit er ſich nach einer geraden Linie bewegt, entſtehen: da indeß der übrige Theil der eingedrückten Geſchwindigkeit auf die Umdrehung der Theile um den Schwerpunkt verwendet wird. Die Geſchwindigkeiten der Theile ſtehen mit ihren Entfernungen vom Schwerpunkt in gleichem Verhältnis.

§. 338.

Demnach können in einem und demſelben Körper zwo verſchiedene Bewegungen und Geſchwindigkeiten vorhanden ſeyn: eine, womit der Mittelpunkt gleichförmig in gerader Linie fortgeht: die andere, womit die Theile ſich um den Mittelpunkt bewegen. Dieſe Bewegungen verwirren ſich nicht, ſie helfen und hindern einander nicht. Die Möglichkeit hiervon ſieht man auch aus andern Gründen. Man ſtelle ſich vor, ein Körper drehe ſich um die Axe durch den Schwerpunkt; die Axe liege auf einer Tafel in der vertikalen Ebene, und bewege ſich zugleich mit der Tafel in gerader Linie: ſo wird offenbar die fortrückende Bewegung der Tafel und der Axe die Umdrehungsbewegung weder zerſtören, noch auf irgend eine Weiſe hindern.

Anmerkung. Laßt uns einiges zu deſto beſſern Verſtande der **Umdrehungsbewegung** beyfügen. Es iſt nicht nothwendig, die Maſſen des ganzen Syſtems in Gedanken nach einem einzigen Punkt zu verſetzen. Man kann jede Bewegung einzeln betrachten, und daraus die in der **Umdrehungsaxe** entſtehende Veränderung ſchlieſen. Dieſe Axe iſt nicht überall und immer unbeweglich, indem ſich die Theile herumdrehen: ſie kann in dem ſich drehenden Körper mancherley Lagen annehmen; welches bey Auflöſung der hieher gehörigen Aufgaben viele Schwierigkeiten verurſacht. Zur erſten Grundlage dieſer Lehre laßt uns die Bewegung **um eine unbewegliche Axe** unterſuchen. Zu dem Ende wollen wir folgendes bemerken:

1.) Es ſey A (Taf. XIII. Fig. 7.) ein Element eines feſten Körpers, in den Theilen des Körpers werde von irgend einer Urſache, entweder vom Stoß oder andern bewegenden Kräften, eine Fliehkraft erzeugt: ſo muß eine Bewegung in A um eine gewiſſe Linie, z. B. AI, die wir die **Umdrehungsaxe** nennen, entſtehen. Man ſtelle ſich vor, AI ſey ſenkrecht auf die Ebene der Tafel, worinn die 7te Figur iſt, und ſchneide die Ebene in C. Dann fälle man ein Loth vom Punkt A, oder jedem andern Element, auf AI, und heiſe es p, ſo wie die Geſchwindigkeit des angenommenen Punkts v. Dies vorausgeſezt, iſt die Winkelgeſchwindigkeit des Punkts $= \frac{v}{p}$, folglich die von dieſer Geſchwindigkeit erzeugte Fliehkraft $= \frac{v^2}{p} A$. (A iſt nämlich ein Element der Maſſe.) Man nehme ferner ein ander Element a, und deſſen Entfernung von der Axe AI $= x$, ſo giebt $\frac{xv}{p}$ dieſes Punkts Geſchwindigkeit. Denn man nimmt den ſich umdrehenden Körper feſt an. Daher verhalten ſich die Geſchwindigkeiten der ſich umdrehenden Theile überall wie die Entfernungen von der Axe; iſt die Geſchwindigkeit des einen Punkts, nebſt den Entfernungen deſſelben und der übrigen gegeben, ſo ſind auch dieſer Geſchwindigkeiten bekannt. Es iſt nämlich $p : x = v :$

$\frac{xv}{p}$; und daher die Geſchwindigkeit in a = $\frac{xv}{p}$. Hieraus wird die Fliehkraft in a = $\frac{xv^2}{p^2}$ a. Da aber die Axe AI von dieſen Fliehkräften in ſenkrechter Richtung geſtoßen wird; ſo ſind die Momente dieſer Kräfte, die in entgegengeſezten Richtungen auf die Axe wirken, entweder überall gleichgros, oder nicht. Im erſten Fall ſind auch die, in der auf die Axe ſenkrechten Ebene um den Punkt C nach allen Seiten liegenden Kräfte, gleichgros. Alsdenn **kann die Axe weder fortrückende Bewegung, noch irgend andere, z. B. Umdrehung, annehmen.** Sind aber die Kräfte nicht auf allen Seiten der Axe gleichgros, ſo wird die Axe Bewegung entweder nach dieſer oder jener Seite der Ebene HD bekommen: ja, die Bewegung kann zuſammengeſezt, nach mehrern Seiten zugleich gerichtet ſeyn.

2.) Beydes ſieht man deutlicher, wenn man die Fliehkraft eines jeden Elements in zwo ſenkrechte Kräfte zerlegt. Man nehme z. B. das Element a, und ziehe die Linien FG und HD in der Ebene, worauf die Axe AI ſenkrecht ſteht, lothrecht auf einander, ſo iſt zugleich AI auf beyde Linien im Punkt C ſenkrecht. Dann fälle man das Loth aB von a auf die zur Axe ſenkrechte Ebene; und von B auf CD das Loth BD: ſo drückt BD den Theil der Centralkraft des Elements aus, womit die Axe in der Richtung FG geſtoßen wird, und CD den andern Theil,

womit

womit die Axe nach HD getrieben wird. Werden alſo alle dieſe Kräfte nicht von andern zerſtört, ſo muß die Umdrehungsaxe AI nothwendig eine fortrückende Bewegung entweder nach HD, oder nach FG, empfangen.

3.) Wenn CD = z, BD = y, ſo iſt CB = $\sqrt{(zz+yy)} = x$, und die ganze Fliehkraft im Punkt a $= \frac{v^2 . \sqrt{(z^2+y^2)}}{p^2}$ a, die ſich durch BC vorſtellen läßt. Die Kraft nach BD iſt $\frac{yv^2}{p^2}$. a, und die nach CD $= \frac{zv^2}{p^2}$. a. Soll alſo keine fortrückende Bewegung der Axe in der Richtung FCG daſeyn, ſo müſſen die Fliehkräfte, die ſich wie $\frac{yv^2}{p^2}$. a verhalten, alle einander aufheben, und folglich S. $\frac{yv^2}{p^2}$. a = o, oder S. ay = o ſeyn, weil die Größe $\frac{v^2}{p^2}$ als beſtändig zu betrachten.

Auch muß ſeyn S. zA = o, wenn in der Axe keine Bewegung in der Richtung HCD entſtehen ſoll.

4.) Iſt in C der Schwerpunkt, ſo iſt beydes da, was erfordert wird, daß die Axe unbeweglich iſt.

iſt. Denn alle auf allen Seiten des Schwerpunkts einander entgegengeſezte Momente der Maſſen ſind gleichgros, §. 128. **Vorl.** weil in dieſem Punkt das Gewicht im Verhältnis der Maſſen ſteht.

Hieraus ſchlieſen wir, daß, **wenn der Körper ſich um eine Axe dreht, der von den Wirkungen der Fliehkräfte keine Bewegung mitgetheilt wird, der Schwerpunkt des Körpers oder des Syſtems mehrerer Körper in der Axe ſelbſt liegt.**

5.) Können aber gleich die beſagtermaßen gleichgroßen, einander ſich zerſtörenden Centralkräfte der Axe keine **fortrückende** Bewegung mittheilen, ſo **können ſie ſelbige doch nach den Seiten der zuerſt auf ihr ſenkrecht angenommenen Ebene neigen.** Denn dieſe beyden Effekte ſind verſchieden: hat jener nicht Statt, ſo läßt ſich nicht ſogleich ſchließen, dieſer ſey auch nicht möglich. Denn damit die Axe keine fortrückende Bewegung hat, wird nur erfordert, daß die Kräfte ſelbſt auf verſchiedenen Seiten derſelben im Gleichgewicht ſind, und alle Punkte in den auf die Axe lothrechten Ebenen ſich mit gleicher Geſchwindigkeit bewegen. Soll aber zugleich die Axe ſich nicht neigen, ſo müſſen auch die Momente auf beyden Seiten des Schwerpunkts in der Axe gleichgros ſeyn. Denn man zerlege das ganze Moment der Fliehkraft in zwey andere Momente: ſo iſt das Moment der ganzen Kraft in a gleich der Kraft ſelbſt durch ihre Entfernung vom Schwerpunkt C multiplicirt, d. i. $= \frac{v^2 \sqrt{(z^2+y^2)}}{p^2}$. ax, weil BC = x. Daher auch das Moment der

 Kraft

Kraft nach CD $= \frac{v^2}{p^2}$. azx in jedem Element der Maſſe, und das Moment der Kraft nach BD $= \frac{v^2}{p^2}$. ayx. Daher muß ſeyn S. $\frac{v^2}{p^2}$. ayx = o, wie auch S. $\frac{v^2}{p^2}$. azx = o, wenn die Kräfte die Axe nicht neigen ſollen; und da $\frac{v^2}{p^2}$ eine beſtändige Größe, ſo muß ſeyn S. ayx = o, und S. azx = o. Wenn aber S. ay = o, und S. az = o, ſo iſt noch nicht S. ayx = o, und S. azx = o. Hieraus erhellt, daß Gleichgewicht der Kräfte da ſeyn kann, obgleich die Axe von ungleichen Momenten der Kräfte nach den Seiten der Ebene geneigt wird.

6.) Findet ſich aber beydes, Gleichheit der Kräfte ſowohl als der Momente, wird auch von keiner andern äuſern Urſache die Bewegung des Körpers geſtört, ſo iſt bey der Umdrehungsbewegung die Axe allerdings unbeweglich. Wird durch den Stoß eines Körpers die Bewegung des Syſtems verändert, ſo kann ſie ſo ausfallen, wie wir ſie im folgenden Zuſatz erklären werden. Auch können von beſchleunigenden Kräften, die die Materie beſtändig treiben, in der Bewegung der Axe mancherley Veränderungen entſtehen, und entſtehen auch allemal, wo nicht alle dieſe Kräfte dergeſtalt zuſammengeſezt werden,

daß ihre mittlere Richtung durch den Schwerpunkt ſelbſt geht, und aus dieſer Urſache dem Schwerpunkt, auſer der fortrückenden Bewegung, ſonſt keine eindrücken. Von leztern Fall leſe man nach Hiſt. de l'Acad. de Berlin, An. 1740. p. 185. Découverte d'un nouveau principe de Mécanique par Mr. Euler. (V.)

Dreyzehnter Zuſatz.

Vom Grundſatz der kleinſten Wirkung, vorzüglich beym Stoß der Körper.

Inhalt.

§. 336. Der ſogenannte Grundſatz der kleinſten Wirkung, nach welchem die natürlichen Veränderungen die möglichſt kleinſten ſind, iſt nicht in der Mechanik zu Hauſe. §. 337. Doch findet ſich dieſes Kleinſte bey der kleinſten Größe der Kräfte, die beym Stoß harter und weicher Körper verloren geht; wie auch §. 338. beym eccentriſchen Stoß. §. 339 — 341. Aus dieſem Satz läßt ſich die Regel, die Trägheit in einem Syſtem aus einer Stelle in eine andere zu verſetzen, und daraus umgekehrt, §. 342 — 348. die Regeln des eccentriſchen Stoßes folgern. §. 349. Die Regeln des Zurückprallens und Zurückſpringens der Körper werden eben daraus hergeleitet. §. 350. Dergleichen Kleinſtes kommt bey jedem Gleichgewicht der Körper vor. §. 351. Auch wird daraus hergeleitet, daß der Schwerpunkt eines ruhenden Körpers ſich entweder in der möglichſthöchſten oder tiefſten Lage befindet. §. 352. Kleinſtes bey jeder freyen Bewegung.

§. 336.

Der Grundſatz der kleinſten Wirkung, nach welchem es in allen Veränderungen der Natur ein

Kleinſtes; d. i. unter allen Veränderungen, die etwas zu bewirken nöthig, unter den gegebenen Umſtänden möglichſtkleinſte in der Natur wirklich hervorgebrachte giebt, iſt in der Mechanik ſehr nützlich, und führt bey den ſchwerſten Aufgaben zur Auflöſung oft durch den kürzeſten Weg. Als nicht mechaniſcher, nicht aus der Mechanik hergeleiteter Grundſatz, muß er aus metaphyſiſchen Gründen und Wahrheiten erwieſen werden. Da die Wahrheit deſſelben mit hinreichend deutlichen Gründen noch nicht hat dargethan werden können, ſondern nur durch Induction beſtärkt wird: ſo erhellt, warum er ſehr behutſam anzuwenden. Da er uns aber doch in den verwickelteſten Aufgaben ausnehmende Dienſte leiſtet, ſo hielten wir ihn für würdig, mit mehrerm zu erklären, und vorzüglich zu zeigen, daß er beym Stoß der Körper Statt findet.

§. 337.

Oben §. 287. **Vorl.** und **Anm.** zur XVI. **Vorl.** ſagten wir, beym Stoß der Körper gehe ein kleinſter Theil Kräfte verloren. Beym Stoß harter und weicher Körper fallen zwar dieſe Kräfte allerdings weg. Anders iſt aber der Erfolg bey elaſtiſchen, wo im Anfange, da die Geſtalt der Körper zuſammengedrückt wird, zwar Kraft verloren geht: doch aber bey den zuſammenſtoßenden Körpern von der Elaſticität, wodurch ſie ihre vorige Geſtalt von neuem annehmen, wieder hergeſtellt wird. Denn dies ſcheint die Natur zum Zweck zu haben, daß die Kräfte, ſo ſie beym Stoß aufwenden muß, die möglichſtkleinſten ſind; dies iſt der Grund, warum die lebendigen Kräfte beym Stoß wie Preſſungen wirken,

und überall, wo ſie im Gleichgewicht ſind, eben ſo wie Preſſungen gemeſſen werden müſſen.

§. 338.

Aus eben dieſem von dem weiſen Urheber der Natur vorgeſchriebenen Geſetz, nach welchem ſie, ſo zu reden, ihre Veränderungen ſtets mit den geringſten Koſten hervorbringt, laſſen ſich auch die Regeln des eccentriſchen Stoßes ſehr leicht herleiten. Wir haben gezeigt, daß, um den Effekt dieſes Stoßes zu finden, überhaupt erfordert wird, die Trägheiten in Gedanken aus ihren Stellen in andere zu verſetzen: dieſe Verſetzung wird mit Hülfe des **Grundſatzes der kleinſten Wirkung** ohne Schwierigkeit zu Stande gebracht. Wir bemerken, daß gegenwärtig die Rede von den Fällen, wo die Lage der Umdrehungsaxe vom Stoß nicht verändert wird. Denn wir nehmen an, daß hier die Körper elaſtiſch und ohne alle Schwere, die Richtung des Stoßes aber durch die Ebene geht, worinn der Schwerpunkt der Maſſen, und dieſe Ebene auf die Umdrehungsaxe ſenkrecht iſt. Dies vorausgeſezt, wird die Lage der Axe nicht verändert, die geſtoßenen Körper mögen alle oder nur einer ſich um die Axe drehen. Denn aus **Vorl.** XIX. **Anm.** n. 6. ſieht man leicht, daß hier die Fliehkräfte kein Moment in Rückſicht des Schwerpunkts in der Axe erlangen.

Es ſey alſo die Richtung des Stoßes, den wir im erſten Augenblick als einfachen Druck betrachten, HQ (Taf. XIII. Fig. 6.) ſenkrecht auf die Linie BMC durch den Schwerpunkt. Indem dieſer Druck zu wirken anfängt, widerſtehen die Maſſen der Theile der Wirkung mit Kräften, die in jedem Element den

im erſten Augenblick der Wirkung zu beſchreibenden unendlichkleinen Bogen Df, Eg, Kn, Am ꝛc. proportional ſind. Dieſe Bogen aber verhalten ſich wie ihre auf ſie ſenkrechten Halbmeſſer, die vom Punkt L an zu rechnen, um den die Körper im erſten Augenblick ſich zu bewegen ſtreben. Daher verhalten ſich die unendlichkleinen Bogen wie die Linien EL, KL, DL, AL ꝛc. Es kommt alſo darauf an, den Punkt L zu beſtimmen, um den die Maſſen im erſten Augenblick ſich zu drehen ſtreben. Dieſer Punkt iſt aber im erſten Augenblick als ruhend anzuſehen, folglich ſoll die auf L bezogene, und nach QH in der dem Druck HQ entgegengeſezten Richtung wirkende Kraft der Maſſen, deſſen Effekt auf den Punkt L vernichten. Ehe aber dieſer Punkt gefunden iſt, ſind die Kräfte, womit die Körper widerſtehen, nicht gegeben, ohne welche doch die Verſetzung der Maſſen nicht geſchehen kann. *)

§. 339.

Um nun dieſen Punkt L zu finden, nimmt man ihn von der Eigenſchaft an, daß alle Kräfte ſämmtlicher Trägheiten in den Punkt v oder Q verſezt, und vom Punkt L an gerechnet, der daher entſtehende der Kraft in Q entgegengeſezte Widerſtand unter allen der kleinſte, die aus den Kräften der Trägheiten, von jedem andern Punkt an gerechnet, entſtehen können. Denn dieſer Punkt, da er mit keiner eigenthümlichen Trägheit widerſteht, empfängt auch keine Bewegung. §. 11. Vorl. Hieraus ſehen wir leicht ein, daß ein ſolcher Punkt L mit dem Schwin-

*) S. Comment. Petrop. Tom. IX. p. 189. Dan. Bernoulli, de percuſſ. eccentr.

Schwingungspunkt einerley iſt: denn dieſer hat mit jenem eben die Eigenſchaft, daß er beym Schwung ſowohl als beym Stoß frey ſich bewegen und wirken kann. Eben ſo ſieht man, daß noch vor. Anm. zwar der ganze Körper oder Syſtem eine doppelte Bewegung empfängt: eine fortrückende, deren Geſchwindigkeit mit der Geſchwindigkeit des Schwerpunkts einerley: und eine **Umdrehungsbewegung** ſämmtlicher Körper um den Schwerpunkt; dieſes aber doch nicht hindert, daß nicht im Augenblick, da der Stoß geſchieht, ein Punkt in oder auſer dem Syſtem zu finden, um den der Schwerpunkt ruht, und alle übrigen Körper ſich drehen. Denn die vom Stoß entſtandene Bewegung wird durch den Körper auf beyden Seiten des Schwerpunkts dergeſtalt vertheilt, daß die Körper auf der einen Seite ſich in einer der Richtung der Bewegung auf der andern Seite entgegengeſezten Richtung bewegen: es muß alſo ein Punkt da ſeyn, der im erſten Augenblick von entgegengeſezten Seiten ſo gedrückt wird, daß er als ruhend anzuſehen. Ueberdies läuft es auch auf eins hinaus, ob wir uns vorſtellen, der Schwerpunkt drehe ſich mit den übrigen Körpern im erſten Augenblick um dieſen Punkt, oder ob wir annehmen, der Schwerpunkt bewege ſich fortrückend in eben der Zeit, da die Körper ſich um eben dieſen Schwerpunkt drehen.

Daß aber der geſuchte Punkt L mit dem Schwingungspunkt zuſammenfällt, erhellt deutlich, wenn er durch Rechnung beſtimmt wird. Denn verſezt man ſämmtliche Körper, die ſich um den Schwerpunkt zu bewegen ſtreben, in v, und ſucht, was aus dieſer Bewegung im Punkt L entſteht, ſo

erhält man, §. 155. Vorl.

$$\frac{D.DL^2 + E.EL^2 + K.KL^2 + A.AL^2 + +}{vL^2}$$ für die

Summe der Trägheiten in v, die hier in v eben den Widerſtand äuſert, der vorher vom ganzen Körper herkam. Und dies iſt die Größe, die geſagtermaßen die kleinſte ſeyn ſoll.

§. 340.

In dieſer Formel ſind aber die Linien DL, EL ꝛc. veränderlich. Damit die Rechnung einfacher wird, laßt uns in M den Schwerpunkt annehmen, von allen Trägheiten Lothe, wie hier DN, fällen, und DM ziehen. Alsdenn wird $D.DL^2 = D(DN^2 + NL^2)$ $= D(DM^2 - NM^2 + LM^2 + NM^2 + 2LM.NM)$ $= D(DM^2 + LM^2 + 2LM.MN)$, ſo hier $= D(DM^2 + LM^2)$, weil LM beſtändig, und die Momente D. NM auf beyden Seiten des Schwerpunkts M einander vernichten. Demnach iſt die Summe der in v verſezten Trägheiten, wenn wir die Summe der Trägheiten I; vM, a; DM, b; EM, c; KM, d; AM, e; und LM, x nennen, =

$$\frac{Ix^2 + Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 + +}{(a+x)^2}$$, ſo als ein

Conſtans anzuſehen, deſſen Differential = o. Daher

$$\frac{2Ixdx\,(a+x)^2 - 2(a+x)\,dx.\,(Ix^2 + Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 + +)}{(a+x)^4}$$

$= o$; oder $I.ax + Ixx - Ixx - Db^2 - Ec^2 - Kd^2 - Ae^2$

$-Ae^2 - - \text{ꝛc.} = 0$; folglich $Iax = Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 + + \text{ꝛc.}$ und $x = \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 + +}{Ia}$, hierzu $vM = a$ addirt, wird $a + \frac{Db^2 + Ec^2 + Kd^2 + Ae^2 + +}{Ia}$ die Weite des Schwingungspunkts L von v. §. 156. Vorl. Demnach iſt offenbar der Punkt L, um den ſämmtliche Trägheiten im erſten Augenblick des Stoßes ſich zu drehen ſtreben, der Schwingungspunkt, wenn man die Figur zum Schwingen im Punkt v vertikal aufgehängt betrachtet.

§. 341.

Auch aus mechaniſchen Gründen wird dieſe Eigenſchaft des Schwingungspunkts erwieſen, *) und dadurch der Grundſatz der kleinſten Wirkung noch mehr beſtätigt. Wir wollen aber dieſen Beweis nicht aus einander ſetzen, ſondern vielmehr dieſe vortrefliche und ſehr nützliche Eigenſchaft des Schwingungspunkts zur Beſtimmung des Effekts des eccentriſchen Stoßes anwenden. Zu dem Ende laßt uns aus §. 339. eine Regel herleiten, vermittelſt welcher die Maſſen nach dem Punkt v ſich ſehr leicht verſetzen laſſen. Denn nennen wir ſämmtliche unendlichkleine zu verſetzende Trägheiten z, und deuten durch x die unbeſtimmten Linien an, worinn ſie ſich um L zu drehen

*) Vergl. Joh. Bernoulli Opp. Tom. IV. N. 177. §. 14.

hen ſtreben, z. B. DL, KL, ſo bekommen wir S. z. $\frac{x^2}{vL^2}$ für die Summe der in v verſezten Trägheiten.

Aber vL = S. $\frac{x^2z}{I.LM}$. §. 156. Vorl. Daher I.vL. LM = S.x^2z, und die Summe der Trägheiten in v = $\frac{I.LM}{vL}$. Betrachtet man nun den Punkt, worinn der Stoß geſchieht, als den Punkt, worinn der ganze Körper zum Schwingen aufgehängt iſt: und erinnert man ſich, was §. 120. erwieſen, daß der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt ſich mit einander ohne einige Veränderung des Schwungs verwechſeln laſſen; ſo ſieht man, wie die Größe der nach Q zu verſetzenden Trägheiten zu beſtimmen. Man ſuche nämlich die vierte Proportionalgröße zur Länge des Schwingungspunkts des gegebenen im Punkt Q zum Schwingen aufgehängten Körpers, zu ſeiner Weite vom Schwerpunkt, und zur ganzen Maſſe des Körpers. Die gefundene Größe drückt die Trägheit aus, die in Q mit eben der Gewalt der ſtoßenden oder drückenden Kraft widerſteht, womit alle durch den ganzen Körper zerſtreute Maſſenelemente zuſammengenommen widerſtehen würden.

§. 342.

Dies vorausgeſezt, iſt der größte Theil der Schwierigkeiten bey Beſtimmung der Effekte des eccen-

eccentriſchen Stoßes gehoben. Man nehme nun zwey Körper von jeglicher Geſtalt ED und CB (Taf. XIV. Fig. 4,) wovon der eine den andern im Punkt B in der beyden gemeinſchaftlichen Tangente ſtößt, die Richtung des Stoßes HBG falle entweder auſerhalb dem Schwerpunkt beyder Körper, oder nur auſerhalb dem Schwerpunkt des einen.

Es ſey CD der von EAD im Punkt B geſtoßene Körper. Liegt der Schwerpunkt des ſtoßenden Körpers EAD im Loth HBG, in der Richtung des Stoſſes; ſo iſt bey dieſem Körper keine Verſetzung der Trägheiten nöthig. Denn der Stoß iſt, was dieſen Körper betrift, gerad, folglich bringt er keine Umdrehung bey ihm hervor. Und da dieſe Umdrehung während des Stoßes nicht entſteht, ſo kann ſie nach Vollendung deſſelben nicht da ſeyn.

Beym Körper CB hingegen läßt ſich der Stoß auſerhalb dem Schwerpunkt M in jedem Punkt des Loths HBG geſchehen denken. Daher auch im Punkt G, ſo daß die Richtung des Stoßes HB auf die Linie CG durch den Schwerpunkt M ſenkrecht iſt.

Hat man nun den Punkt L gefunden, um den ſich die Trägheiten im erſten Augenblick zu drehen ſtreben, §. 340. und vermittelſt deſſelben die Trägheiten nach v oder hier nach G verſezt, ſo iſt der Stoß in einen geraden verwandelt, und die Geſchwindigkeit ſowohl in B, als dem ſtoßenden Körper, läßt ſich aus den in den Vorleſungen oben erklärten Regeln beſtimmen.

§. 343.

Iſt die Richtung des Stoßes auch in EAD eccentriſch, ſo iſt auch dieſes Körpers Trägheit nach v oder

oder hier nach R in der Linie durch den Schwerpunkt zu verſetzen. Dann läßt ſich der Stoß als gerad anſehen, und aus den dafür gegebenen Regeln findet man die Geſchwindigkeiten wie beym geſtoßenen Körper, ſo auch beym ſtoßenden: woraus ferner die Umdrehungsbewegung beyder Körper nach dem Stoß gefunden wird.

§. 344.

Iſt des Stoßes Richtung IG ſchief, ſo läßt ſie ſich in zwo Seitenrichtungen IH und HG zerlegen, und blos von HG hängt der Stoß ab: IH kann auſer Acht gelaſſen werden, wie **Vorl.** vom ſchiefen Stoß erwieſen worden.

§. 345.

Dieſe Lehren wollen wir mit einigen einfachen Beyſpielen erläutern. Setzet alſo, die beyden zuſammenſtoßenden Körper AED und CBf (Taf. XIV, Fig. 5.) ſeyn **walzenförmig**, und der Stoß durch den Schwerpunkt des ſtoßenden AD gerichtet; C ruht vor dem Stoß, und wird von EAD im Punkt B geſtoßen. Die ganze Maſſe in EAD ſey M, ſeine Geſchwindigkeit vor dem Stoß, H: die Summe der Materie in CBf, I wie vorhin, GL die Länge des in gleicher Zeit mit dem im Punkt G aufgehängten Cylinder C ſchwingenden einfachen Pendels, und M der Schwerpunkt in CBf. Alsdenn wird die in den Punkt B verſezte Trägheit in der Linie Cf $= \frac{I.LM}{LG}$.

§. 341. Dieſe Trägheit wird in B vom Körper ABD

gerad

gerad geſtoßen, und bewirkt während des Stoßes eben das, was die ganze Trägheit in Cf vor der Verſetzung bewirken würde. Daher die Geſchwindigkeit nach dem Stoß in Cf im Punkt B $= \frac{2MH}{M + \frac{I.LM}{LG}}$

$\frac{2MH.LG}{M.LG + I.LM}$, §. 297. Vorl. und die Geſchwindigkeit nach dem Stoß in EAD, wo die geradlinigte Bewegung wie vorher bleibt, $= \frac{H.(M - I.\frac{LM}{LG})}{M + I.\frac{LM}{LG}}$

$$= \frac{H.(M.LG - I.LM)}{M.LG + I.LM}.$$

§. 346.

Aus der gefundenen Geſchwindigkeit des Punkts B ſchließt man leicht die Geſchwindigkeit der übrigen Punkte in Cf. Denn da L der Umdrehungspunkt, und die Umdrehungszeit überall gleichgros, ſo verhält ſich die Geſchwindigkeit jedes Punkts wie ſein Abſtand vom Punkt L oder der Halbmeſſer der Umdrehungsbewegung. Hieraus wird die Geſchwindigkeit beſtimmt, womit der Schwerpunkt ſich um L zu dre-

drehen ſtrebt. Denn $LG : LM = \frac{2MH.LG}{M.LG + l.LM}$: $\frac{2MH.LM}{M.LG + l.LM}$, und dies iſt die Geſchwindigkeit des Schwerpunkts in der geraden Linie, worinn der ganze Körper fortgeht. Iſt aber die Umdrehungsbewegung in einem einzigen Punkte gegeben, ſo iſt ſie in allen gegeben: die gegen den Schwerpunkt reſpektive Geſchwindigkeit der Umdrehung in G iſt $\frac{2MH.LG}{MG(M.LG + l.LM)}$. §. 315. 2.

§. 347.

Demnach läßt ſich in eben dem Körper eine doppelte Winkelbewegung denken. Die eine um den Schwerpunkt M, indeß dieſer in gerader Linie fortgeht; die andere um den Punkt L; beyde ſind gleichförmig. Die Linie, die der um M ſich drehende Punkt L beſchreibt, iſt eine gemeine Radlinie: denn dieſe wird von einem Kreis beſchrieben, deſſen Mittelpunkt ſich gleichförmig fortbewegt, indem der Kreis ſelbſt ſich um den Mittelpunkt dreht. ML iſt der Halbmeſſer des die Radlinie erzeugenden Kreiſes, und die Bewegung des Mittelpunkts geſchieht in der mit BH parallelen Mm. Indem der Punkt L im Umkreis eine Radlinie beſchreibt, ſo beſchreiben auch die übrigen inner- oder auſerhalb deſſelben angenommenen Punkte ſogenannte verkürzte oder verlängerte Radlinien; wie aus der Geometrie

trie bekannt iſt. Hieraus erhellt alſo die Beſchaffenheit der Bewegung dieſer Punkte.

§. 348.

Hieraus ſehen wir, wie in andern Fällen zu verfahren. Z. B. bewegen ſich zwey Parallelepipeden CAD und cBf (Taf. XIV. Fig. 6.) entweder nach einerley oder nach entgegengeſezten Seiten, und zwar mit doppelter Bewegung, einer Umdrehungsbewegung, und einer nach gerader Linie fortrückenden, die mit der Bewegung des Schwerpunkts einerley. Die Geſchwindigkeiten in dieſer Bewegung ſeyn H und h, in der Umdrehungsbewegung B und b; beym ſtoßenden AD nämlich H und B, bey fBc aber h und b. Man ſuche die Schwingungspunkte L und l, deren Geſchwindigkeiten durch den Stoß verändert werden. Die Trägheiten in AD und cf, deren vorige Zeichen wir hier beybehalten, verſetze man in die Punkte D und B, worinn der Stoß vollbracht wird: alsdenn iſt die Trägheit in AD $= \frac{M.lm}{lD}$, und in cBf $= \frac{I.LM.}{BL}$. Dieſe Trägheiten werden gerade geſtoßen; die Geſchwindigkeit in D iſt $= H + B$, und in $B = h + b$; denn nimmt man den Stoß augenblicklich an, ſo iſt die Geſchwindigkeit der Umdrehungsbewegung während des Stoßes mit der Geſchwindigkeit, womit die Körper gerade fortgehen, nach eben der Linie gerichtet.

Dem-

Demnach werden die Geſchwindigkeiten nach dem Stoß nach den Regeln §. 295. aus den gegebenen Geſchwindigkeiten in D und B beſtimmt: auch findet man, wie vorhin, die Geſchwindigkeit des Schwerpunkts, woraus die fortrückende Bewegung bekannt wird, deren Unterſchied von der ganzen Geſchwindigkeit in D und B die Geſchwindigkeit iſt, womit dieſe zuſammenſtoßenden Punkte D und B ſich herumdrehen.

§. 349.

Dies mag genug ſeyn. Iſt gleich noch mehr zu ſagen übrig, ſowohl in weiterer Ausführung der vorgetragenen Lehren, als auch über den Erfolg beym Zuſammenſtoß mehrerer Körper überhaupt: ſo ſind doch die bisher erklärten Sätze die nützlichſten und die Gründe der übrigen. Laßt uns vielmehr zu dem Weg, wovon wir abſchweiften, zurückkehren, und mehrere Aufgaben betrachten, deren Auflöſung durch den Satz **der kleinſten Wirkung** gefunden wird. Beym **Zurückprallen elaſtiſcher Körper** ſchien einigen die Natur ſo zu wirken, daß ſie nach der **Regel der kleinſten Wirkung** den **kürzeſten Weg** wählt, wenn ein Körper von einem Punkt nach einem andern, z. B. von H nach E (Taf. XIII. Fig. 1.) zu führen, doch ſo, daß der bewegte Körper auf die Ebene FG trift, ehe er durch Zurückſpringen nach dem Punkt E gelangen kann. Dies vorausgeſezt, iſt nicht zu leugnen, daß $HB + EB$ ein **Kleinſtes**. Denn es ſey $HI = p$, $EF = P$, $FB = x$, $BI = y$, ſo iſt $HB + EB = \sqrt{(y^2 + p^2)} + \sqrt{(x^2 + P^2)}$, hiervon ſey das Differential $= 0$, und es wird

ydy

$\frac{ydy}{r(y^2+p^2)} = \frac{-xdx}{r(x^2+P^2)}$. Auch heiſe FI, a, welche Linie beſtändig, und es iſt $a = x + y$, daher $dx + dy = o$, und $dy = - dx$. Alſo $\frac{y}{r(y^2+p^2)}$ $= \frac{x}{r(x^2+P^2)}$, oder cos. EBF = cos. HBI, und der Winkel EBF = HBI, d. i. der **Einfallswinkel iſt dem Zurückprallungswinkel gleich.** Nun iſt dies eben das Zurückprallungsgeſetz elaſtiſcher Körper, ſo wie oben erwieſen: woraus man ſchließt, **daß hier der kürzeſte Weg:** denn ſind jene Winkel gleichgros, ſo ſehen wir durch Umdrehung der Schlüſſe, daß HB + EB das kleinſte.

§. 350.

Auſerdem hat man noch bey Erklärung vieler andern Wirkungen der Natur ſich des **Satzes der kleinſten Wirkung** bedient: doch iſt nicht überall mathematiſche Deutlichkeit der Gründe. Auch waren die gegebenen Auflöſungen zum Theil nur beſondere; man dachte ſich das Kleinſte in den Wirkungen, das die Natur zur Abſicht zu haben ſcheint, verſchiedentlich, und ſuchte einen allgemeinen Satz. **Daß ein ſolcher in allen Fällen des Gleichgewichts gefunden worden, der auch der Satz der kleinſten Wirkung heißt,** iſt auſer Zweifel. *) Er iſt fol-

*) Dieſer vom **Maupertuis** vorgetragene bekannte Satz iſt nachzuleſen in Memoir. de l'Acad. des Sciences 1740. Loix du repos des Corps par Mr. Maupertuis, und in ſeiner **Kosmologie.**

folgender: Wenn die Centralkräfte auf alle Theile des Körpers wirken, und ſelbige nach dem Mittelpunkt ſtoßen, die Entfernung x, die Kraft fx^{n}, und die Materie I heißt, ſo iſt im Fall des Gleichgewichts $S. fx^{n+1}$. I das Kleinſte.

Dies iſt nothwendige Folge mechaniſcher Gründe. Wir ſagten §. 24. Vorl. Preſſungen ſind gleich gros, wenn ihre Trägheit oder widerſtehende Kraft ſich verhält wie der Raum, wodurch ſie ſich in eben der Zeit bewegen muß. Die im Gleichgewicht entgegengeſezten Trägheiten heiſen P und p, die unendlich kleinen Räume, wodurch ſie ſich, im Fall der Bewegung, zu gleicher Zeit bewegen würden, dy und ds: ſo iſt der von allen P zugleich entſtehende Widerſtand $= Pdy$, und der von allen p, $= - pds$, denn ihre Richtungen ſind einander entgegengeſezt. Aber $Pdy = - pds$, daher $Pdy + pds = 0$. Das Element des Raums läßt ſich mit dem allgemeinen Zeichen dx ausdrücken, heiſen alsdenn die Kräfte überhaupt K, die Trägheiten IK, ſo wird $IK. dx = 0$: und iſt $K = x^{n}$, ſo läßt ſich die Größe $Ix^{n} dx$ integriren, und $S. Ix^{n} dx = \frac{1}{n+1} Ix^{n+1}$, welche Größe wegen ihren Differential $= 0$ die kleinſte iſt, wie ſie es ſeyn muß.

§. 351.

Aus dieſem Beweis ſelbſt erhellt, daß jener Satz ſich auf alle Gattungen der Kräfte erſtreckt, und

und nicht nur Statt findet, wenn die Kräfte im Verhältnis einer Dignität der Entfernungen vom Mittelpunkt ſtehen, ſondern auch, wenn ſie auf eine andere Art von dieſer Entfernung abhängen. Daß ſich aus eben dieſem Satz die Regeln der Statik vom Gleichgewicht herleiten laſſen, ſieht man nach dem, was zu §. 59. Vorl. angemerkt worden, leicht; *) ſo wir doch hier übergehen, da wir jene Grundregeln aus andern einheimiſchen Gründen beſtätigt haben. Doch wollen wir eine Folge daraus nicht vorbeylaſſen, die zuweilen in der Mechanik von großem Nutzen. Es iſt folgende: wenn die von der natürlichen Schwere gereizten Theile des Körpers im Gleichgewicht ſind, und der ganze Körper ruht, ſo muß der Schwerpunkt entweder in der möglichſt tiefſten oder in der höchſten Stelle ſeyn: jenes findet ſich am häufigſten, dieſes doch bisweilen, obgleich ſeltner.

Denn nach dem Satz der kleinſten Wirkung muß die Summe der Maſſen im Körper, jede in ihre Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte multiplicirt, die kleinſte ſeyn; die Summe der Maſſen aber iſt hier beſtändig, folglich auſer der Entfernung vom Mittelpunkt der Kräfte, der hier mit dem Mittelpunkt der Erde einerley, keine veränderliche Größe vorhanden. Demnach muß hier auch die Entfernung des Schwerpunkts im ruhenden Körper vom Mittelpunkt der Kräfte die kleinſte ſeyn, die in jeder

 andern

*) Ausführlich iſt dies erwieſen in Mem. de l'Acad. de Berlin, An. 1748. Recherches ſur les plus petits dans les actions des forces par Mr. Euler, & An. 1752. p. 169. Harmonie entre les principes generaux de Repos & de Mouvement par Mr. Euler. (V.)

andern Lage des Körpers möglich iſt, wenn das übrige gleich angenommen wird.

Da aber, was bejaht genommen, das Kleinſte, nimmt man es verneint, das Größte iſt: ſo kann im Stand des Gleichgewichts der Schwerpunkt auch in der höchſten Stelle ſeyn. So ruht der Cylinder in der geneigten Ebene, ſowohl wenn der Schwerpunkt den höchſten Punkt in der Vertikallinie, als wenn er den tiefſten einnimmt. Eben ſo kann ein Kegel ruhen, wenn er auf der Spitze ſtehend den Schwerpunkt in der höchſten, als wenn er, auf der Grundfläche ruhend, ihn in der niedrigſten Stelle hat. Doch iſt das leztere Gleichgewicht vom erſtern darinn unterſchieden, daß bey jenem, wenn nämlich der Schwerpunkt in der niedrigſten Stelle, die aus ihrer Lage, worinn ſie ruhen, geſtörten und ſich ſelbſt überlaſſenen Körper für ſich wieder ins Gleichgewicht kommen: erſteres aber, obgleich nur wenig geſtört, ohne äuſere Urſache ſich nicht wieder herſtellen läßt. Denn der auf ſeiner Grundfläche ruhende Kegel, ein wenig ſeitwärts geneigt, fällt von ſelbſt wieder in die vorige Lage zurück; iſt er aber auf ſeine Spitze geſtellt im Gleichgewicht, ſo kehrt er, dies auch nur im geringſten geſtört, nie wieder zu derſelben Lage zurück.

§. 352.

Hier können wir folgendes beyfügen. Nehmen wir das Geſetz des Gleichgewichts als ein allgemeines Geſetz an, das die Natur auch bey Bewegung beyzubehalten ſucht, ſo doch, wie man geſtehen muß, noch nicht deutlich genug; ſo läßt ſich aus dem Satz des Kleinſten beym Gleichgewicht ein allgemeinerer

Satz

Satz herleiten, der bey jeder Bewegung Statt findet, und das Kleinſte beſtimmt. Dieſes Kleinſte beſteht in der kleinſten Wirkung, deren Effekt aus der Maſſe in die Geſchwindigkeit und ferner in den Raum multiplicirt zu ſchätzen. *)

Denn bey jeder Bewegung iſt $\frac{P}{M} dx = vdv$. §. 7.

Daher $Pdx = Mvdv$, und $Px = Mvv$, wenn $P = fx^n$. Denn alsdenn wird $S.\ fx^n dx = \frac{1}{n+1} fx^{n+1} = \frac{1}{n+1} Px = Mvv$, oder $Px = Mvv$, da man hier blos das Verhältnis der Größen ſucht. Hieraus folgt, daß die Größe des aus dem Raum geſchätzten vollen Effekts der Summe der lebendigen Kräfte gleich iſt. Nimmt man alſo überhaupt für wahr an, daß Px in jedem Zeittheilchen dt ein Kleinſtes, ſo muß auch die ganze Wirkung oder ihr Effekt, d. i. die Summe aller unendlichkleinen Wirkungen, ein Kleinſtes, folglich bey jeder Bewegung $S.\ Pxdt = S.\ Mvvdt$ ein Kleinſtes ſeyn. Aber $vdt = ds$. Daher muß S. Mvds, oder das Produkt aus der Maſſe des Körpers in die Geſchwindigkeit und den Raum überall ein Kleinſtes ſeyn.

Aus eben dieſem Satz läßt ſich auch erweiſen und herleiten, was wir oben von den Centralkräften geſagt

*) S. Mem. de l'Acad. de Berlin, Tom. I. p. 267. f. f. wie auch Cosmologie de Maupertuis, und Mem. de la Société Royale des Sciences, An. 1744.

ſagt haben, wobey wir uns doch der Kürze wegen nicht aufhalten wollen. Auch findet er ſich bey der freyen Bewegung geworfener Körper, da aus dieſer Hypotheſe eben die Kurven entwickelt werden, die wir auf dem ordentlichen Weg §. 158. f. f. beſtimmt haben. *) Ueberdies findet man auch die Regeln des Stoßes aus dieſem **Satz der kleinſten Wirkung**. **) Hieraus wird in der That ſehr wahrſcheinlich, daß dieſer Satz allgemein; doch muß man zugleich geſtehen, daß ſolche Geſetze ohne ſcharfen und bewährten Erweis weder zugelaſſen werden können, noch dürfen. Dies ſcheint aber von der Wahrheit nicht entfernt zu ſeyn, daß die in jedem Augenblick widerſtehende Kraft der Trägheit auf die kleinſte Art wirkt: folglich auch der dem Widerſtand der Materie gemäße Effekt der Wirkung ein **Kleinſtes** iſt. Und da ſich überdies auch bey der freyen Bewegung in jedem Augenblick ein zwiſchen der bewegenden Kraft und der ihr jederzeit entgegengeſezten Trägheitskraft obwaltendes Gleichgewicht denken läßt, ſo iſt es von der Wahrheit nicht ſehr entfernt, daß ſich eben der Satz, wodurch das Gleichgewicht beſtimmt wird, auch auf die daraus herzuleitenden Geſetze der freyen Bewegung anwenden läßt, wenn man nämlich bey der Bewegung die unendlich kleinen in untheilbaren Momenten erzeugten Veränderungen betrachtet.

Anmer-

*) Vergl. **Leonhard Eulers** Method. inveniendi curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes. Addit ſecund. de motu propr. in medio non reſiſtente; und Mem. de l'Acad, de Berlin. An. 1742. p. 169. f. f.

**) Nachzuleſen Cosmologie de Mr. Maupertuis, und Mem. de l'Acad. de Berlin. An. 1746. (V.)

Anmerkung. Sehr verſchieden dachten die Gelehrten über dieſen **Satz des Kleinſten**, wie es über eine Sache zu geſchehen pflegt, die dem Verſtand eben das, was den Sinnen eine Erſcheinung, die in mancherley Geſtalt ſich zeigt, deren innere Beſchaffenheit aber, Urſachen und Entſtehung unbekannt ſind. Einige hielten ihn ſo hoch, daß ſie ſich einen beſondern Schlüſſel göttlicher Weisheit darinn einbildeten, worunter **Maupertuis** mit Recht der Erfinder deſſelben zu nennen. Nach ſeiner und anderer Meynung ſchränkt ſich dieſer Satz nicht auf Naturlehre und Mechanik ein; er iſt einerley mit dem allgemeinern **Schöpfungsgeſetz: die Natur thut nichts umſonſt, ſie thut alles mit den leichteſten Mitteln und auf dem kürzeſten Weg.** Worinn dieſer **kürzeſte Weg** beſteht, glaubte **Maupertuis** durch ſeinen Satz deutlicher und genauer zu beſtimmen, daher auch die Wahrheit deſſelben a priori mehr aus **metaphyſiſchen** als **mathematiſchen** Grundſätzen herzuleiten. Andere hingegen legten ihm einen allzu geringen Werth bey, da ſie nicht einmal in der **Mechanik** ſeine Allgemeinheit und Nutzen zugeſtanden. Daß er aber kein **einheimiſcher** Satz in der Naturlehre, urtheilten die mehrſten ſeiner Lobredner ſowohl als Gegner mit unſerm Verfaſſer.

Den mittlern, zwar nicht überall den ſicherſten Weg geht die Meynung, die ich nach ſorgfältiger Unterſuchung über den wahren Sinn, Grund und Urſprung dieſes Satzes, in einer 1769. herausgegebenen beſondern **Abhandlung** de Principio minimi vorgetragen habe. **Denn es giebt allerdings einen Satz des Kleinſten, ſowohl bey der Bewegung der Körper, als bey der Wirkung**

bewegender Kräfte, der, wofern nur ſein Sinn richtig beſtimmt wird, in der **Mechanik** ſowohl **allgemein**, als auch zugleich **einheimiſch** angetroffen wird; da er eine Folge der erſten und allgemeinen Gründe der Mechanik, woraus ſich die Wahrheit deſſelben erweiſen läßt. Dieſer Satz iſt ſo beſchaffen, daß das darinn ausgedrückte **Kleinſte** darinn **beſtimmt** iſt, **daß es nie ein Größtes wird**, wie bey andern geſchieht, wo die Größe, die bald das **Kleinſte**, bald das **Größte** ausdrückt, überhaupt nicht genug beſtimmt iſt. Dergleichen **Kleinſte** oder **Größte** ſind nur zu den **relativen** zu rechnen, und von den **abſolut Kleinſten** zu unterſcheiden. Wahr iſt es, daß man bey jedem **Kleinſten** überhaupt auch auf andere, auf gewiſſe Art zu beſtimmende Größen ſehen muß, die eine Klaſſe von Größen ausmachen, worinn auch die kleinſte derſelben vorkommt, und die nur in **Beziehung** auf andere von eben der beſtimmten Gattung die kleinſte iſt. Ein anders iſt es aber, wenn das **Kleinſte** in **eben der** Gattung von Größen auch das **Größte** werden kann, wie die Ordinaten mehrerer Kurven; ein anders, wenn dies nicht geſchehen kann, ſondern vielmehr beſtändig das Kleinſte in eben der Klaſſe bleibt. Unterſuchen wir die Fälle dieſer leztern Gattung, ſo gelangen wir zu **mehrern Sätzen des Kleinſten**, die ſämmtlich in der Mechanik einheimiſch und auch allgemein ſind, und die, ſind ſie gleich in gewiſſem Verſtand für **verſchieden** zu halten, doch wenn wir auf den Quell, woraus dieſe Eigenſchaft des **Kleinſten** entſpringt, zurückgehen, von einem und demſelben Urſprung ſich herleiten, und aus den allgemeinſten erſten mechaniſchen Gründen erweiſen laſſen. Hier will ich nur das hinzufügen,

zufügen, was mir zu dem vom Verfaſſer vorgetragenen Fällen näher zu gehören ſcheint.

1.) Ein Körper bewege ſich **gleichförmig** durch die Linie AB (Taf. XV. Fig. 7.) und vom Punkt B ferner nach dem Punkt C ebenfalls **gleichförmig**. Ziehet durch den Punkt B eine beliebige Linie DBE, und fället darauf aus den Punkten A und C die Lothe AD, CE. Nehmet R und S entweder als **beſtändige Größen, oder in beſtändigem Verhältnis mit den Linien** AB, BC an: ich ſage, R. AB + S. BC kann unter allen auf ähnliche Art formirten Größen, in welchen man den Punkt B in **eben der** Linie DBE annimmt, ein **Kleinſtes** ſeyn. **Nimmt man** aber **dieſe Linie** in den übrigen Größen **einerley an**, ſo wird **ihre Lage** als **beſtimmt** und **beſtändig** angeſehen. Daher ſind auch die Lothe AD, CE, wie auch die Entfernung der Punkte D und E beſtimmt. Dies vorausgeſezt, iſt die Größe R. AB + S. BC ein **Kleinſtes**, wenn $R : S = \frac{BE}{BC} : \frac{DB}{AB}$, d. i. wenn R und S ſich **umgekehrt verhalten** wie **die Sinus der Winkel** BCE, DAB, oder CBN, ABM, wenn die Linie MN durch den Punkt B auf die Linie DBE ſenkrecht iſt.

Denn $R.\,d.\,AB + S.\,d.\,BC = R.\,d.\,\surd(AD^2 + DB^2) + S.\,d.\,\surd(BE^2 + EC^2) = \frac{R.\,DB.\,d.\,DB}{AB} + \frac{S.\,BE.\,d.\,BE}{BC}$, weil AD und CE in allen ähnli-

chen Größen gleichgros und beſtändig. Da aber DE = DB + BE ebenfalls von beſtändiger Größe, ſo iſt auch + d. DB = − d. BE. Daher $\frac{R. DB. d. DB}{AB}$

$$+\frac{S. BE. d. BE}{BC} = \frac{R. DB. d. DB}{AB} - \frac{S. BE. d. DB}{BC}.$$

Dieſes Differential verſchwindet, wenn $R. \frac{DB}{AB} = S. \frac{BE}{BC}$, folglich wenn $R : S = \frac{BE}{BC} : \frac{DB}{AB}$. Iſt hingegen $R. \frac{DB}{AB}$ nicht $= S. \frac{BE}{BC}$, ſo wird jenes Differential allemal eine **bejahte** Größe. Denn man nehme erſtlich den Punkt B ſo, daß das Differential verſchwindet, ſezt man ferner ſtatt dos Punkts B einen andern b in der Linie DBE, ſo liegt b entweder auf der Seite des Punkts B nach E, oder auf der entgegengeſezten Seite nach D. Im erſten Fall iſt Bb = d. DB das **Wachsthum** der Linie DB, und bejaht zu nehmen; hingegen d. BE = − d. BD die **Abnahme** verneint zu nehmen. Aber auf der Seite, wo das Differential **verneint** wird, **vermindert** ſich auch zugleich das **Verhältnis** $\frac{BE}{BC}$. Denn

$\frac{bE}{BC} > \frac{BE}{BC}$, hingegen wächſt das Verhältnis $\frac{DB}{AB}$.
Aus gleichem Grunde wird das Differential vorliegender Größe bejaht, wenn man den Punkt b auf der andern Seite der Linie MN nimmt. Daher iſt überall $\frac{R.DB.d.DB}{AB} + \frac{S.BE.dBE}{BC}$ ein Wachsthum, den einzigen Fall ausgenommen, wo es $= 0$. Die Größe $R.AB + S.BC$ wird alſo ein Kleinſtes, wenn $R.\frac{DB}{AB} = S.\frac{BE}{BC}$, nie aber ein Größtes, in Beziehung nämlich auf eben die Gattung ähnlicher Größen.

Die Räume der gleichförmigen Bewegung verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten in die Zeiten. Es ſey alſo C die Geſchwindigkeit des Körpers in der Bewegung durch AB, und V in der Bewegung durch BC. Ferner T die Zeit durch AB, und Z die Zeit durch BC. Ueberdies verhält ſich die reſpektive Geſchwindigkeit in der Linie DBE, wenn der Körper durch DB fortrückt, zur Geſchwindigkeit in der Richtung AB, wie DB : AB, d. i. wie die Räume in gleicher Zeit. Die reſpektive Geſchwindigkeit auf der Seite BE verhält ſich zur Geſchwindigkeit, womit der Körper BC in der Richtung BC zurücklegt, ebenfalls wie BE : BC, oder wie die Räume in gleicher Zeit. Man nenne dieſe Geſchwindigkeiten in der Richtung der Linie DBE in Anſehung der Fläche, deren Gränze die Linie DBE, parallele

rallele Geſchwindigkeiten, und deute erſtere durch den Buchſtaben g; leztere durch den Buchſtaben h an. Dies vorausgeſezt, bekommt man im Fall des Kleinſten $R : S = \frac{C.T}{gT} : \frac{VZ}{hZ}$.

2.) Aus dieſer allgemeinen Proportion ſchließen wir, 1.) daß $R : S = \frac{C}{g} : \frac{V}{h}$, die Zeiten der Bewegung durch AB und durch BC mögen gleich ſeyn oder nicht. 2.) Wenn $gT = hZ$, d. i. wenn $DB = BE$, ſo wird $R : S = CT : VZ = AB : BC$; und die Quadratenſumme der Räume $AB^2 + BC^2$ iſt das Kleinſte, wie man auch unmittelbar einſieht. Denn $AB^2 + BC^2 = AD^2 + DB^2 + BE^2 + EC^2$. Beſtändig ſind AD^2 und CE^2, und $DB + BE$. Daher $DB^2 + BE^2$ das kleinſte, wenn $DB = BE$, nach der Arithmetik. 3.) Wenn $g = h$, d. i. **wenn die Bewegung im Körper im Punkt** B **ſo verändert worden, daß die Geſchwindigkeit in der parallelen Richtung** DBE **eben wie vorhin,** die ganze Veränderung aber in der lothrechten Richtung MBN erfolgt, ſo **wird** $R : S = \frac{C}{g} : \frac{V}{h} = C : V$, d. i. $C.AB + V.BC$, oder **die Summe aus der Geſchwindigkeit des Körpers in den Raum iſt ein Kleinſtes.**

Um dieſen allgemeinen **Satz** auf alle Fälle **anzuwenden,** wo eine Veränderung der Bewegung erfolgt,

erfolgt, darf nur die Größe und Richtung der bewegenden, die Bewegung verändernden Kraft gegeben ſeyn. Es ſey die Richtung der Kraft die Linie MBN, und die Geſchwindigkeit nach geſchehener Veränderung gegeben. Dann ziehe man die Linie DBE auf die Richtung der Kraft ſenkrecht, ſo findet man, die Summe C. AB + V. BC für das Kleinſte genommen, daraus das Verhältnis C : V

$$= \frac{BE}{BC} : \frac{DB}{AB},$$

d. i. die Geſchwindigkeiten verhalten ſich verkehrt wie die Sinus der Winkel, ſo die Bewegungslinien AB und BC mit der Richtung der Kraft MBN machen. 3.) Der Satz des Kleinſten bey der Bewegung der Körper findet in jedem Parallelogramm der Kräfte Statt, wo aus den gegebenen Seitenbewegungen eine Bewegung in der Diagonale erzeugt wird. Ferner gehört auch zu den beſondern Fällen deſſelben dor Durchgang des Lichts durch verſchiedene brechende Mittel, von welchem Fall ich in den Actis Erudit. Lipſ. 1769. m. Novembr. beſonders gehandelt, und aus den Erſcheinungen erwieſen haben, daß die Geſchwindigkeiten des Lichts ſich verkehrt verhalten wie die Sinus des Einfalls, und des gebrochenen Winkels in verſchiedenen brechenden Mitteln; ich nahm dies nicht als Hypotheſe an, wie andere gethan haben. Auch läßt ſich in dieſem Falle das Kleinſte nicht nach Gefallen annehmen; es wird vielmehr durch Verſuche beſtimmt.

Springen die Körper von einer Fläche zurück, woran ſie unter einem gewiſſen Winkel anlau-

fen,

ſen, ſo haben ſie entweder, **wie vollkommen ela-ſtiſche Körper**, nach dem Zurückprallen eben die **Geſchwindigkeit**, die ſie vorher hatten, oder ſie haben, wie **unvollkommen elaſtiſche**, eine Aenderung der Geſchwindigkeit erlitten. In jedem Falle wird die Summe der Produkte aus den Geſchwindigkeiten in die Räume ein **Kleinſtes** ſeyn. Hat ſich aber die **Geſchwindigkeit** nicht geändert, ſo iſt zugleich **die Summe der Räume ein Kleinſtes.** Denn C. AB + V. BR = Kleinſtes (Fig. 17.); ſind aber C und V in allen verglichenen Fällen gleichgros, ſo muß auch AB + BR ein Kleinſtes; oder die Länge des Wegs ſelbſt die kleinſte ſeyn.

Iſt die **krumme Fläche** durch die gleichfalls **krumme** Linie DBE begränzt, ſo kann allerdings AB + BR in Anſehung der Summe anderer Linien, die von den Punkten A und R zu der krummen Fläche und zwar zur Linie DBE ſich ziehen laſſen, ein **Gröſztes** ſeyn. Dies ſehen wir beym Zurückwerfen des Lichts von einer holen Kugelfläche, wo die Summe der Linien bald ein Gröſztes, bald ein Kleinſtes wird. Allein ſolche Fälle ſchränken doch die Ausdehnung des Satzes nicht ein, der die Bedingung erfordert, daß **die Linie, ſo die Fläche begränzt**, worinn die Aenderung der Bewegung geſchieht, eine **gerade** Linie; und folglich die Tangente der krummen Fläche iſt. Nimmt man dies in Acht, ſo findet ſich kein Anſtoß. Denn iſt **die Summe der Linien** in Rückſicht anderer aus den gegebenen Punkten zur **Kurve** gezogenen ein **Gröſztes**, ſo iſt ſie doch auch in Rückſicht der von eben dieſen Punkten zur **Tangente** gezogenen ein **Kleinſtes**.

Bey

Bey jeder Bewegung durch Elemente der Kurve, auch wenn ſie in widerſtehenden Mitteln geſchieht, findet eben dieſer Satz des Kleinſten Statt, und läßt ſich, nicht ohne großen Nutzen, wenigſtens in einigen Fällen anwenden. Dieſe können hier nur berührt, ausführlich aber nicht vorgetragen werden. Hier genügt es, den Grund zu legen, woraus der, ſo der Rechnung und Geometrie mächtig iſt, das übrige leicht für ſich ſelbſt finden wird.

3.) **Eben dieſer Satz des Kleinſten hat bey der gegenſeitigen Wirkung der Kräfte Statt:** denn überhaupt iſt $Mx^{n+1} + Ny^{n+1}$ ein Kleinſtes, (nie ein Größtes,) wenn $Mx^{n} = Ny^{n}$, und zugleich $x + y =$ **einer beſtändigen Größe** a, wie aus der Arithmetik bekannt iſt. Beym Stoß der Körper, und der **gegenſeitigen Wirkung** der Kräfte iſt überall $Mx = Ny$, wenn M und N die Maſſen der Körper, und x, y die in entgegengeſezten Richtungen erzeugten Geſchwindigkeiten bedeuten, §. 11. und 43. Dyn. Nimmt man nun die Summe der Geſchwindigkeiten $x + y$ in mehrern Fällen **einerley an, ſo wird die Summe der Kräfte, ſo die Körper durch gegenſeitige Wirkung und Gegenwirkung aufwenden,** $Mx^2 + Ny^2$. §. 292. Vorl. XVI. **Vergl. Anm. zu §. 292. und 294. Daher iſt die Summe der lebendigen Kräfte, womit die Körper beym Stoß auf einander wirken, unter allen die kleinſte, die eben dieſe Maſſen bey eben der gegebenen reſpektiven Geſchwindigkeit beſitzen können.**

Und

Und dieſe Summe wird beym Stoß elaſtiſcher Körper wieder erſezt, geht aber beym Stoß weicher Körper nebſt der reſpektiven Geſchwindigkeit verloren. Man gebraucht aber in dieſen Fällen ſtatt des Produkts aus der Geſchwindigkeit in den Raum, das Quadrat der Geſchwindigkeit, weil die Räume in gleicher Zeit bey gleichförmiger Bewegung, wie hier, ſich verhalten wie die Geſchwindigkeiten ſelbſt.

4.) Beym Gleichgewicht der Kräfte iſt Gleichgewicht entgegengeſezter Elementarwirkungen vorhanden. Verhalten ſich ihre Intenſitäten wie $P : Q$, und die Längen wie $dx : dy$, ſo iſt $Pdx = Qdy$. §. 35. Dyn. Nun verhalten ſich am Hebel die Entfernungen vom Ruhepunkt, wie die Längen dx und dy. Nimmt man alſo die Summe $Pxdx + Qydy$, und $x + y =$ Conſtans, ſo iſt dieſe Summe ein Kleinſtes. Die Intenſitäten P und Q ſtehen in zuſammengeſeztem Verhältnis aus dem Verhältnis der beſchleunigenden Kräfte, oder der Intenſitäten in den einzelnen Theilchen, und aus dem Verhältniß der Maſſen. Die Maſſen oder Trägheiten ſeyn gleichgros; und heiſen I, wie beym Verfaſſer §. 350. Die beſchleunigenden Kräfte verhalten ſich wie $fx^{n-1} : fy^{n-1}$, und die Längen der Elementarwirkungen wie $dx : dy = x : y$; ſo folgt, daß $fx^{n} xI + fy^{n} . yI$, oder $fx^{n+1} I + fy^{n+1} I =$ Kleinſt. wenn man $x + y$ beſtändig annimmt.

Nie ſind aber die Bedingungen auſer Acht zu laſſen, worunter etwas ein Kleinſtes wird: damit nicht der überhaupt erwieſene Satz ſchwankend und unbeſtimmt, und daher betrüglich wird, wenn er auf gegebene Fälle angewandt werden ſoll. Wirken mehrere Kräfte auf der einen Seite des Ruhepunkts, wie am Hebel, an deſſen einen Arm zwey Gewichte in verſchiedenen Entfernungen drücken; ſo würde man ſich ſehr irren, wenn man überhaupt ſagen wollte, $Mx^2 + Ny^2 + Qz^2$ ſey = Kleinſt. wo x, y, z die Entfernungen vom Ruhepunkt, und M, N, Q die Gewichte bedeuten. Denn es muß beſtimmt werden, welche Größe hier beſtändig anzunehmen; iſt $x + y + z$ = Conſtans, ſo muß ſeyn $Mx = Ny = Qz$, um das Kleinſte in jener Summe zu erhalten; welches beym Gleichgewicht nicht Statt findet. Iſt aber $x + z$ = Conſtans, und dann auch entweder $x + y$, oder $z - y$ beſtändig, ſo iſt allerdings im Fall des Gleichgewichts ein Kleinſtes in $Mx^2 + Ny^2 + Qz^2$. Und aus dieſer Summe = Kleinſt. geſezt, ſchließt man auch, daß die eine auf der einen Seite entgegengeſezte Preſſung den beyden andern auf der andern Seite gleich ſeyn muß. Setzen wir alſo dieſe Bedingung hinzu; daß die Summe je zwoer Entfernungen, die in Rückſicht des Ruhepunkts nach entgegengeſezten Seiten liegen, beſtändig, ſo iſt allerdings die Summe, die aus ſämmtlichen Elementarwirkungen in ihre Entfernungen vom Ruhepunkt multiplicirt erwächſt, die kleinſte. Hieraus erhellt auch, daß das analytiſche Integral $S.\,Ix^{n}\,dx$ beym Verfaſſer §. 350. ſo mit obiger Formel $S.\,Pxdx$ einer-

ley, wenn Pdx überhaupt jeder Kraft Elementarwirkung, und x ihre Entfernung bezeichnet, ſich nicht unbeſtimmt ein **Kleinſtes** nennen läßt. Es muß hinzugeſezt werden, daß jeder Elementarwirkung Pdx eine andere Q dy auf der andern Seite entgegengeſezt, und $x + y$ oder die Entfernung dieſer entgegengeſezten Kräfte beſtändig, auch $dx : dy = x : y$. Aus eben dieſem Grunde ſieht man, **daß in jedem Gleichgewicht dieſer Satz des Kleinſten in ſeiner Bedeutung Statt findet.** Denn bringt man mehrere Kräfte auf **einerley** oder **entgegengeſezte** Richtung, und nimmt die Summe je zwo **entgegengeſezter** Entfernungen beſtändig an, ſo iſt die Summe aller, durch ihre Entfernungen multiplicirt, die kleinſte. Es verhalten ſich aber die **Längen der Elementarwirkungen**, oder die **Räume**, wodurch die Körper von den Kräften zu gleicher Zeit gereizt werden, wie die **Entfernungen** vom Ruhepunkt, und eben ſo verhalten ſich auch die **anfänglichen Geſchwindigkeiten**, ſo die Kräfte zu gleicher Zeit den Maſſen eindrücken. Aus dieſem Grunde kann man ſagen, **dieſer Satz des Kleinſten beym Gleichgewicht** ſey, wie ſeinem Urſprung nach gewiß iſt, **einerley mit dem, der bey der Bewegung Statt findet,** wo die Summe der Produkte aus den Maſſen in die Geſchwindigkeiten und Räume ein **Kleinſtes** enthält.

Auch iſt in jedem Gleichgewicht **Gleichheit entgegengeſezter Preſſungen**, $Pdx = Qdy$, folglich $Pdx - Qdy = 0$; und nimmt man dy **verneint**, $Pdx + Qdy = 0$. Aber ganz was anders iſt es, wenn das **Differential** einer Größe 0, als wenn man die Größe ſelbſt als ein **Kleinſtes** anſieht.

anſieht. Iſt Pdx + Q dy = o, ſo kann S. (Pdx + Q dy) beſtändig; es kann ein Größtes, es kann o; es kann endlich ein Kleinſtes ſeyn. Welches aber von dieſen Statt findet, iſt erſt aus andern Gründen zu beurtheilen,

Es giebt auch Größte beym Gleichgewicht der Kräfte im Parallelogramm. Es giebt auch andere Kleinſte, ſowohl in der Summe der Kräfte, als in der Summe der Wirkungen, wovon ich mehrers geſagt habe in der Abh. de Principio Minimi.

5.) **Eben dieſen Satz des Kleinſten findet man auch bey den bewegenden Wirkungen der Kräfte.** Es ſeyn AB und BC (Taf. XV. Fig. 17.) Elemente einer Kurve, oder Linien, wodurch ein Körper von Kräften getrieben wird. Nennt man die Geſchwindigkeiten in AB und BC, C und V, wie oben (1), und deutet die Räume AB und BC durch dS und ds an, ſo iſt MCdS + MVds ein Kleinſtes. Da ferner dS und ds ſich verhalten wie CdT und Vdt, wenn dT und dt Zeitelemente bezeichnen, ſo iſt auch MCCdT + MVVdt = Kleinſt. Aber MCC entſpricht eine Wirkung bewegender Kraft, Px, deren Intenſität P, Länge x, und MVV eine andere Wirkung Q y. Daher auch PxdT + Q ydt = Kleinſt. Merkt man aber auf den Sinn des (1) erwieſenen Satzes, und vergleicht das vom Verfaſſer §. 352. vorgetragene, ſo ſieht man, daß die dort überhaupt vom Kleinſten in der Summe der Wirkungen beygebrachten Schlüſſe ſchwankend ſind, und metaphyſiſche Zweydeutigkeit mehr als mathematiſche Schärfe verrathen. Die Summe der in die Zeittheilchen, wodurch die im Körper, indem er durch die Elemente AB und BC fortrückt, vorhandenen Ge-

ſchwindigkeiten erzeugt werden, multiplicirten Wirkungen iſt die **kleinſte**, und zwar in Rückſicht anderer Summen ähnlicher Wirkungen, wenn die Bewegung durch andere Elemente Ab, bC, deren gemeinſchaftlicher Punkt b in der gegebenen **geraden** Linie DBE liegt, geſchehen wäre. Nimmt man die **Zeiten** in ſämmtlichen Elementen **beſtändig** an, ſo iſt eben **dieſes Kleinſte in der Summe der Wirkungen** ſelbſt. Dies hat aber nur bey der Bewegung durch zwey zunächſt einander anliegende Elemente Statt.

Die vom Punkt C durch das folgende Element der Kurve fortgeſezte Bewegung, mit der Bewegung durch das nächſt vorhergehende Element BC verbunden, enthält wiederum ein **Kleinſtes** von eben der Natur. Schließt man aber daraus, daß in der **ganzen Summe** ſämmtlicher Produkte MCds, oder Pxdt ein **Kleinſtes**, ſo iſt dies ſo zu verſtehen, daß bey Anwendung dieſes Satzes auf beſtimmte Fälle, die Summe aus zwey unmittelbar einander nächſten Elementen, zu nehmen; denn in der ganzen Summe iſt nur in ſofern ein Kleinſtes, als es in der aus zwey einander nächſten Elementen genommenen Summe enthalten iſt.

Es giebt allerdings **ein Kleinſtes in der Wirkung gleichförmig wirkender Kräfte**: man findet auch andere, theils Kleinſte, theils **Größte**, in der freyen Wirkung der Kräfte ſowohl als im Gleichgewicht, dies ſind aber beſondere, nicht allgemeine, die in jeglichen Wirkungen jeglicher Kräfte Statt finden; und auch auf ihre beſondern Bedingungen eingeſchränkt ſind, wovon hier der Ort nicht zu reden. (T.)

Zwan-

Zwanzigſte Vorleſung.

Von der ſchwingenden Bewegung elaſtiſcher Körper.

Inhalt.

§. 340. Man bemerkt faſt keinen Effekt der Elaſticität an Saiten, wenn ſie von unendlichkleinen, auch nicht §. 341. wenn ſie von überausgroßen, ſondern nur, wenn ſie von mittlern Kräften geſpannt werden. §. 342 — 351. Natur dieſer Effekte, und der davon abhängenden gleichzeitigen Bewegung. §. 352. Schwingende Bewegung elaſtiſcher Bleche.

§. 339.

Die Bewegung elaſtiſcher Körper, die wir an ganzen Körpern wahrnehmen, und von der Elaſticität abhängt, womit ſie ſich nach dem Stoß wieder in die vorige Geſtalt ſetzen, iſt im vorhergehenden zur Genüge abgehandelt worden. Noch iſt übrig, daß wir auch die in ihren kleinſten Theilchen vorgehenden Veränderungen unterſuchen. Ihre Kenntnis iſt ſo wenig unnütz, daß vielmehr ein wichtiger Theil der Naturlehre ohne ſie nicht verſtanden werden kann.

§. 340.

Hier muß man die Natur elaſtiſcher Saiten oder Fäden, und ihre Wirkungsart einſehen. Zu dem Ende iſt zu merken, daß eine ſich frey überlaſſene, oder von einer unendlichkleinen, oder ſehr geringen Kraft P geſpannte elaſtiſche Saite bc

 (Taf.

(Taf. XIV. Fig. 7.) keinen Effekt ihrer Elaſticität äuſert: wie die Erfahrung hinreichend lehrt. Auch ſtreben ſie, wenn die ſpannende Kraft ſehr gering iſt, nicht, ihre vorige Geſtalt wieder anzunehmen, welches doch der Elaſticität eigen, die, wenn ſie vollkommen iſt, mit eben der Gewalt, womit die elaſtiſchen Körper entweder zuſammengedrückt oder ausgedehnt wurden, die Geſtalt völlig wieder herſtellt.

§. 341.

Eben ſo verſchwindet die ganze Elaſticität, wenn die Kräfte, wodurch die Saiten in p und P geſpannt werden, ſehr groß ſind. Sind daher die ſpannenden Kräfte nicht von mäßiger Größe, ſo äuſert ſich keine Elaſticität, und die verlohrne Geſtalt der Saiten oder Fäden kehrt nie wieder zurück. Hieraus erhellt zuverläßig, daß die Elaſticität von der Art, wie die Theile des Körpers zuſammenhängen, herrührt. Da aber die Unterſuchung der Urſachen der Elaſticität in die Naturlehre gehört, ſo wollen wir uns, da wir nur nach den Geſetzen der Bewegung forſchen, dabey nicht aufhalten.

§. 342.

Es ſey alſo die elaſtiſche Saite bc von gehörigen Kräften in P und p geſpannt, die wir der Leichtigkeit wegen gleichgros annehmen: man bringe ein Kraft in f, die die Saite krümmt, und aus der Lage bdc in die Lage bfc verſezt: iſt die ſpannende Kraft in f mit den die Saite ſpannenden Kräften in P und p im Gleichgewicht, ſo beſchreibe man mit dem Halbmeſſer bd den Kreisbogen dl, und der Unterſchied zwiſchen bd und bf iſt den ſpannenden Kräften in P

und p proportional: ſo lange nämlich die, die Saite krümmenden Kräfte mäßig groß ſind. Da dieſes durch unzweifelhafte Erfahrung beſtätigt wird, ſo iſt auch db, wenn die krümmende Kraft in f gering iſt, mit fb gleichgroß anzuſehen, folglich dem Gewicht in P proportional. Denn die Räume df, wodurch die Saiten ausſchweifen, und die bey der ſchwingenden Bewegung nicht groß ſeyn können, nimmt man hier ſehr klein an.

§. 343.

Demnach kann die Linie ac (Fig. 8.) die ganze ſpannende Kraft vorſtellen; dieſe in zwo andere ſenkrechte Kräfte ad und ah zerlegt, erhellt, daß die, die Saite krümmende Kraft in a mit einer Kraft widerſtehen muß, die ſich verhält wie ad: denn dies iſt der Theil, womit das Gewicht p den Punkt nach d zu ziehen ſtrebt. Heißt alſo ad, a; aC, b, das Gewicht in P oder in p, P, ſo iſt $b : a = P : \frac{aP}{b}$, ſo den Werth der Kraft giebt, womit dos Gewicht P den Punkt a nach d zu bewegen ſtrebt: und da das andere Gewicht mit eben der Kraft den Punkt a nach d reizt, ſo erhellt, daß die ganze Kraft, womit dieſer Punkt gedrückt wird, $= \frac{2aP}{b}$, woraus, weil $b : 2a = P : \frac{2aP}{b}$, man ſchließt:

Die Kraft, womit der Punkt a nach d getrieben wird, verhält ſich zur ſpannenden Kraft in p, wie 2ad : Cd.

§. 344.

Aendert ſich daher der Punkt a, wenn das übrige einerley bleibt, ſo iſt die Kraft in a beſtändig = a: denn die Aenderung in b iſt ſehr gering und verſchwindet gegen die in a: denn man nimmt die Ausſchweifungen des Punkts ad ſehr klein an.

Das übrige alſo einerley geſezt, **verhält ſich ad, d. i. die größern und kleinern Krümmungen, wie die in a krümmenden Kräfte.**

§. 345.

Läßt alſo die Kraft, ſo die Saite in a zurückhält, nach, ſo daß die Saite frey zu ihrer erſten Lage zurückkehrt, ſoll dieſe, da ſie in der Lage BaC war, indem ſie ſich verkürzt, wiederum die Lage BdC annehmen; ſo muß unterdeſſen die Elaſticität in a im Verhältnis der Entfernung des Punkts a von d, oder im Verhältnis der Linie ad wirken. §. 344. **Es erfolgt alſo eben das, was geſchehen würde, wenn eine beſtändige beſchleunigende auf den Punkt a wirkende Kraft ihn nach d triebe, bis dieſe Kraft in d = o würde.** Aus dieſer Wirkung erlangt der von a nach d fortbewegte Punkt eine Geſchwingkeit, womit er hierauf auf der andern Seite der Linie BdC von d nach g fortrückt, welcher Auslauf dg dem erſtern ad gleich iſt, weil die, die Bewegung vermindernden Kräfte eben die ſind, die ſie vorher beſchleunigten. In g hat aber eben das wieder Statt, was vorher in a (Fig. 8.) oder in f (Fig. 7.) Daher ſezt

die durch ihre Elaſticität getriebene Saite die Schwingungen auf beyden Seiten der Linie bdc fort: und dieſe Schwingungen, ſie mögen größer oder kleiner ſeyn, werden in gleicher Zeit zurückgelegt: hören auch nicht auf, wo nicht die Bewegung der Saite von äuſern Urſachen gehindert wird.

§. 346.

Demnach läßt ſich eine ſolche Saite, wenn ſie einmal erſchüttert und aus ihrer Ruhe in bdc (Fig. 7.) gebracht worden, als ein Pendel betrachten, deſſen Länge dc, und ſeine Schwünge von f nach g, und rückwärts von g nach f zurücklegt. Daher läßt ſich auch ein Pendel von der Länge beſtimmen, daß es mit der Saite gleichzeitig, oder daß es ſeine Schwingungen mit der Saite in gleicher Zeit vollendet, und die Anzahl der Schwingungen finden, die die Saite in einer gegebenen Zeit zurücklegt.

§. 347.

Aus §. 343. iſt bekannt, daß der ganze Druck in a oder in f $= \frac{2aP}{b}$; heißt alſo die zu bewegende Trägheit der Saite M, ſo iſt die ganze beſchleunigende Kraft $= \frac{2aP}{bM}$. Aendert ſich daher entweder die ſpannende Kraft, oder die Dicke der Saite, oder die Länge des Auslaufs vom Punkt d, ſo ändert ſich zugleich die nach d beſchleunigende Kraft. Daher muß man auch dieſe Pendeln bey ihrer Vergleichung

mit einander, als von verſchiedenen Kräften getrieben betrachten.

§. 348.

Demnach läßt ſich hier anwenden, was Vorl. VIII. §. 151. geſagt worden, daß nämlich die Schwingungszeiten gleichlanger, von verſchiedenen beſchleunigenden Kräften getriebener Pendeln ſich umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln dieſer Kräfte. Heißt alſo die Schwingungszeit T, ſo iſt $T = \sqrt{\frac{bM}{2aP}}$, oder $\frac{bM}{2aP} = T^2$. Aber die Quadrate der Zeiten verhalten ſich bey einerley beſchleunigenden Kräften, wie die Längen der Pendeln. §. 134. Vorl. Daher $T^2 = \frac{bM}{2aP} . b = \frac{Mb^2}{2aP}$.

§. 349.

Da aber die Größe 2a zur Schwingungszeit nichts beyträgt, indem die Bewegungen bey einerley beſchleunigenden Kraft beſtändig in gleicher Zeit erfolgen, der Auslauf des Punkts a vom Punkt d mag größer oder kleiner ſeyn: ſo bekommen wir $T^2 = \frac{Mb^2}{P}$, welches Verhältnis beſtändig, wenn auch die Dicke und Länge der Saiten noch ſo verſchieden, und auch die Kräfte, wovon ſie geſpannt werden, verſchieden ſind. Es heiſe alſo der Durchmeſſer der

Dicke der Saiten D, ſo iſt $M = D^2$; daher $T^2 = \frac{D^2b^2}{P}$, und $T = \frac{Db}{\sqrt{P}}$, d. i. die Schwingungszeiten ſtehen in zuſammengeſeztem geraden Verhältnis der Dicke und Länge der Saiten, und im verkehrten Verhältnis der Quadratwurzeln der, die Saiten ſpannenden Kräfte.

§. 350.

Hieraus ſchließt man folgendes:

1.) Wenn die Dicke der Saiten einerley, und die Saiten von einerley Kräften geſpannt werden, ſo verhalten ſich die Schwingungszeiten wie die Längen.

2.) Bey gleicher Länge und Dicke der Saiten verhalten ſich die Zeiten verkehrt wie die Quadratwurzeln der ſpannenden Kräfte.

3.) Sind aber Länge und ſpannende Kräfte gleichgros, ſo verhalten ſich die Schwingungszeiten, wie die Durchmeſſer.

§. 351.

Doch iſt hier zu merken, daß die ſchwingende Saite ſich nicht allein auf die Fig. 7. ausgedrückte Art, nämlich ſo, daß ſie ganz entweder auf der einen oder auf der andern Seite der Linie bdc liegt: ſondern auch, wie Fig. 12. ausgedrückt iſt, ſich bewegen kann, ſo daß ſie im Schwingen eine Schlangengeſtalt annimmt, und ein Theil nach dieſer Seite der Linie AF; ein anderer Theil nach jener ſich fortbewegt. Daß ſich dies ſo verhält, lehrt ſowohl die Rechnung, als Erfahrung. Aus dieſer Eigenſchaft ſchwingender

Saiten

Saiten läßt ſich erklären, warum einerley Saite zugleich mehrere Töne von ſich geben kann. Denn was wir bisher vorgetragen, iſt der wahre Grund der ganzen Muſik oder Tonkunſt. Da aber hiervon mit mehrern zu reden der Ort verbietet, ſo mag das bisher geſagte genug ſeyn.

§. 352.

Setzen wir an die Stelle elaſtiſcher Saiten dünne elaſtiſche Bleche, die an dem einen Ende befeſtigt, am andern in Bewegung geſezt werden, indem man ſie beugt, und dann wieder losläßt, daß ſie frey ſchwingen können, ſo werden dieſe Schwingungen, wofern nur die Bleche nicht ſehr ſtark gebogen werden, in gleichen Zeiten zurückgelegt, ſie mögen größer oder kleiner ſeyn. Denn die in verſchiedenen Theilen der Bleche verſchiedenen beſchleunigenden Kräfte laſſen ſich mit denen vergleichen, die man in zuſammengeſezten Pendeln findet: die verſchiedenen Theile hindern einander, ſo daß, obgleich dieſe größere, jene geringere Beugung leiden, doch des ganzen Körpers Schwingungen in gleichen Zeiten vollendet werden.

Vierzehnter Zuſatz.
Von der ſchwingenden Bewegung elaſtiſcher Körper.

Inhalt.

§. 353 — 355. Schwingende Bewegung einer Saite, die immateriell angenommen wird, und eine einzige widerſtehende Kraft oder Trägheit beſizt. §. 356 — 358. Wenn zwo Trägheiten vorhanden. §. 359 — 362. Wenn deren drey da ſind. §. 363 — 369. Allgemeine Regeln für ſo viel Trägheiten, als man will. Dann für materielle Saiten, deren Dicke ſehr gering iſt. Beſtimmung der Kurve, die eine ſolche Saite während dem Schwingen beſchreibt, Sie iſt die ſogenannte Socia Cycloidis.

§. 353.

Wir nehmen zum Grund an, was in vorhergehender Vorleſung abgehandelt worden. Man denke ſich alſo die immaterielle Saite BC (Taf. XIV. Fig. 8.) aus der Lage BdC in die Lage BaC gekrümmt; ſie ſey mit einer einzigen Trägheit in a verſehen, und P und p heiſen die Gewichte, wodurch die Saite geſpannt wird. Alsdenn wirkt die Kraft P in der Richtung Bg: man drücke dieſe Kraft durch die Linie Ba aus, und zerlege ſie in zwo Seitenkräfte ea und ad, wovon leztere ad den Punkt a noch den Punkt d treibt, welche Kraft hier allein zu betrachten. Dieſe aus dem Gewicht P entſtandene Kraft iſt $= \frac{ad.P}{aB}$; und

heißt

heißt ad, a; aB, b die Trägheit in a, M; ſo iſt die vom Gewicht P erzeugte, beſchleunigende Kraft im Punkt a

$$= \frac{aP}{bM}.$$

Sezt man ferner aC = c, ſo iſt die von p entſtehende, nach d beſchleunigende Kraft in a $= \frac{ap}{cM}$.

Daher die ganze nach d beſchleunigende Kraft

$$\text{in a} = \frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM}.$$

§. 354.

Da aber die nach d wirkenden Kräfte ſich verhalten wie die Entfernungen, §. 344. 345. (welches auch unmittelbar aus §. 353. geſchloſſen wird, weil P, p, b, c und M beſtändig geſezt, ad = a), ſo werden alle Schwingungen in gleicher Zeit zurückgelegt. Die Länge des in gleicher Zeit mit der Saite ſchwingenden einfachen Pendels läßt ſich aus §. 92. beſtimmen. Denn ſezt man die, durch die vertikale Tangente der Radlinie wirkende natürliche Schwere

$= 1$, ſo wird $\frac{aP}{bM} + \frac{ap}{cM} : 1 = a$: halbe Länge der Radlinie, oder welches einerley, zur Länge des in gleicher Zeit mit der Saite ſchwingenden einfachen Pendels; heißt dieſe L, ſo wird $L = \frac{bcM}{Pc + pb}$.

§. 355.

Wenn $P = p$, welches hier allemal wegen dem Gleichgewicht zwiſchen P und p Statt findet, und überdies $c = b$, ſo wird $L = \frac{bM}{2P}$. Hieraus findet man die Anzahl der Schwingungen, der Saite, die ſie in eben der Zeit zurücklegt, da ein Pendel von gegebener Länge D einen einzigen Schwung vollendet. Denn die Längen der Pendeln verhalten ſich umgekehrt wie die Quadratzahlen der Schwingungen in gleicher Zeit. §. 138. Vorl. Sezt man alſo die geſuchte Anzahl der Schwingungen $= x$, ſo wird $\frac{bM}{2P} : D = 1 : x^2$, und $x = \sqrt{\frac{2PD}{bM}}$.

Sezt man ſtatt b, $BC = 2b$, ſo iſt $x = 2\sqrt{\frac{Pd}{M.BC}}$.

§. 356.

Setzet nun die Saite BdC (Taf. XIV. Fig. 9.) von Materie leer, aber mit zwo Trägheiten in den Punkten a und h beſchwert; und die Anzahl der von der Saite in gegebener Zeit zurückzulegenden Schwingungen wird eben ſo, wie vorhin, beſtimmt. Nehmet $P = p$, wie §. 355. die Saite

BdC

BdC ſey in die Lage BahC gekrümmt. Die, die Saite ſpannende Kraft P deutet durch die Linie Ba an: dieſe in zwo ſenkrechte Kräfte ae und ad zerlegt, drückt die leztere, aus P entſtandene und auf den Punkt a wirkende, ad, dieſen von a nach d im Verhältnis der Entfernungen vom Punkt d. Ferner ſey Bd = b; ad = a, und die Trägheit in a = M, wie vorhin; ſo iſt die nach den Punkt d beſchleunigende Kraft in a = $\frac{aP}{bM}$, und dieſe Kraft wird vom Gewicht P erzeugt.

Aber auch das Gewicht p erzeugt eine beſchleunigende Kraft in a. Wird dieſe Kraft durch ah vorgeſtellt, und in zwo Seitenkräfte fa und fh zerlegt, ſo erhält man den von p entſtandenen auf a wirkenden Druck fa, ſo daß dieſer Punkt a vom Punkt d entfernt wird. Aber fa = hk — ad: heißt daher hk, A; dk = ha = c; ſo wird der von p entſtandene Druck auf a = $\frac{(A-a)P}{c}$, und demnach die ganze beſchleunigende Kraft, womit der Punkt a nach den Mittelpunkt der Kräfte d getrieben wird, = $\frac{aP}{bM} - \frac{(A-a)P}{cM}$.

Man beſtimme auch die beſchleunigende Kraft, die die Trägheit in h nach den Punkt k ſtößt. Der von P entſtandene auf h wirkende Druck läßt ſich durch ht vorſtellen, iſt alſo = $\frac{(A-a)P}{c}$. Der

Druck

Druck von p aber auf h verhält ſich wie hk, weil die ganze ſpannende Kraft p oder hC ſich in die Seitenkräfte hl und hk zerlegen läßt. Es heiſe alſo hC = kC, d, und es wird, wie vorhin, d : A = P : $\frac{AP}{d}$, welches der Druck vom Gewicht p auf h. Daher die ganze, nach dem Mittelpunkt der Kräfte k drückende, beſchleunigende Kraft in h,

$$= \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'}$$, denn M′ bedeutet auch hier die Trägheit in h.

§. 357.

Da aber die beſchleunigenden Kräfte in a und h ſich verhalten wie die Entfernungen von den Mittelpunkten der Kräfte d und k, ſo wird auch $\frac{aP}{bM}$

$$-\frac{(A-a)P}{cM} : a = \frac{(A-a)P}{cM'} + \frac{AP}{dM'} : A.$$

Iſt nun M = M′; und b = c = d, d. i. ſind die Trägheiten gleichgros und von B und C und von einander gleichweit entfernt, ſo wird auch a = A. Denn man bekommt hier aus obiger Proportion

$$\frac{2AaP - A^2P}{bM} = \frac{2AaP - a^2P}{bM},$$ oder $A^2 = a^2$,

und daher $\pm$ a = A, Demnach iſt die ganze beſchleunigende Kraft in a oder in h, $= \frac{aP}{\frac{1}{3}BC.M}$, weil A — a = o, und b = $\frac{1}{3}$BC. Beyde Trägheiten erreichen alſo die Punkte d und k in eben dem Augenblick.

§. 358.

Hieraus findet man nun die Länge des in gleicher Zeit mit dieſer Saite ſchwingenden einfachen Pendels. Denn

$$\frac{aP}{\frac{1}{3}BC.M} : 1 = a : \frac{M.BC}{3P},$$

ſo die Länge der halben Radlinie, oder die geſuchte Länge des Pendels. Sezt man aber ſtatt M, $\frac{1}{2}$M, ſo daß die ganze Trägheit, womit die Saite beſchwert iſt, = M, ſo iſt die geſuchte Länge des Pendels $= \frac{M.BC}{6P}$.

Hieraus wird weiter die Anzahl der Schwingungen hergeleitet, die eine ſolche hin und her ſpringende Saite in einer gegebenen, und zwar in eben der Zeit zurückgelegt, da ein Pendel von gegebener Länge D einen einzigen Schwung vollendet. Denn $\frac{M.BC}{6P} : D = 1 : xx$, folglich $x = \sqrt{\frac{6PD}{M.BC}}$.

§. 359.

Da aber A = ± a, und daher einen doppelten, bejahten und verneinten Werth haben kann, ſo ſieht man, daß die Saite nicht nur ſo ſchwingen kann, daß ſie allemal ganz auf die eine oder die andere Seite fällt, ſondern daß ſie auch Knoten bilden kann, ſo daß ſie die Mittellinie ſchneidet, wie Fig. 10, und zwo Schwingungen in a und h macht, wovon die eine auf der bejahten Seite, die andere auf der verneinten liegt. Eben dies hat auch überhaupt in allen, in der allgemeinen Gleichung §. 357. enthaltenen Fällen Statt. Denn auch hier kann der Werth der Größe A doppelt, bejaht und verneint ſeyn; und nichts hindert, daß dieſe ungleich ſind und machen, daß beyde Trägheiten in verſchiedenen Zeiten ſchwingen. Ja, dies muß ſich nothwendig ſo verhalten, wenn die reizenden Kräfte ungleich ſind: denn alsdenn ſind auch die Kräfte in eben den Entfernungen von den Mittelpunkten der Kräfte in den Trägheiten verſchieden und ungleich, daher müſſen zugleich beyder Schwingungszeiten ungleich ſeyn.

§. 360.

Man betrachte ferner die Saite mit drey Trägheiten beſchwert. (Taf. XIV. Fig. 11.) Sie ſeyn unter ſich gleichgroß, in den Punkten d, k, n, in der Linie BC, und in der gekrümmten Seite nach a, h, o verſezt. Auch ſey die aus dem Gewicht P entſtandene Kraft in a, durch die Linie Ba; wie auch die, aus P, auf d wirkende, durch Be ꝛc. vorgeſtellt. Jede dieſer Kräfte zerlege man in zwo andere ſenk-

rechte Seitenkräfte, wie Fig. 11. ausgedrückt iſt. Sezt man dann Bd = a, dk = b, kn = c, nC = d, und den Auslauf von der Linie BC, ad = A; kh = B; no = C; ſo findet man, wenn die Trägheiten in a, h und o, jede = M,

1.) die von der Kraft P erzeugte im Punkt a wirkende, beſchleunigende Kraft $= \frac{A}{Ma} \cdot P$, und die von p entſtehende $= -\frac{(B-A)}{b} \cdot \frac{P}{M}$, daher die ganze beſchleunigende Kraft in a, $= \left(\frac{A}{a} - \frac{B-A}{b}\right)\frac{P}{M}$.

2.) Iſt die aus P entſtandene beſchleunigende Kraft in h $= \frac{B-A}{b} \cdot \frac{P}{M}$, und die hier aus p entſteht, $= \frac{B-C}{c} \cdot \frac{P}{M}$. Daher die ganze beſchleunigende Kraft in h $= \left(\frac{B-A}{b} + \frac{B-C}{c}\right)\frac{P}{M}$.

3.) Ferner iſt die ganze beſchleunigende Kraft in o $= \left(\frac{C}{d} - \frac{B-C}{c}\right)\frac{P}{M}$. Alle dieſe Kräfte ſte-

hen

hen im Verhältnis der Entfernungen von den Punkten d, k, n: daraus entſtehen folgende Proportionen:

$$1.)\ \left(\frac{A}{a} - \frac{B-A}{b}\right)\frac{P}{M} : A = \left(\frac{B-A}{b} + \frac{B-C}{c}\right)\frac{P}{M} : B, \text{ und}$$

$$2.)\ \left(\frac{A}{a} - \frac{B-A}{b}\right)\frac{P}{M} : A = \left(\frac{C}{d} - \frac{B-C}{c}\right)\frac{P}{M} : C.$$

§. 361.

Setzet hier $a = b = c$, und ihr bekommt 1.) $BB' = AA + AC$. 2.) $A = C$, daher auch $BB = 2AA$, folglich $B = A\sqrt{2}$.

Beſtimmet hieraus die beſchleunigenden Kräfte in a und h, und ihre Größen in gleichen Entfernungen von ihren Mittelpunkten, und ihr bekommt

$$1.)\ \text{die Kraft in a} = \left(\frac{A}{a} + \frac{A - A\sqrt{2}}{a}\right)\frac{P}{M}$$

$$= \frac{2A - A\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{P}{M}.$$

 2.) Die

2.) Die Kraft in h nach k $= \frac{2A\sqrt{2}-2A}{a}\cdot\frac{P}{M}$.

Dieſe Kraft wirkt in der Entfernung B = $A\sqrt{2}$, daher iſt ſie in der Entfernung A von ihrem Mittelpunkt $= \frac{2A-A\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{P}{M}$. Hieraus erhellt, daß bey gleichen Entfernungen von den Mittelpunkten der Kräfte, d, k, n, die nach dieſen Mittelpunkten ſtoßenden Kräfte einander gleich ſind. Daher liegen auch dieſe drey Trägheiten in gleicher Zeit ihre Schwingungen zurück, und nähern ſich BC in eben dem Augenblick.

§. 362.

Daher iſt auch die Länge des in gleicher Zeit mit der ganzen Saite ſchwingenden einfachen Pendels $= \frac{aM}{(2-\sqrt{2})P}$.

Hieraus wird ferner die Anzahl der Schwingungen beſtimmt, die eine ſolche Saite in eben der Zeit zurücklegt, da ein Pendel von gegebener Länge D einen einzigen Schwung vollendet. Dieſe Anzahl iſt $= \frac{\sqrt{PD(2-\sqrt{2})}}{\sqrt{aM}}$. Sezt man die Summe der gleichgroßen Trägheiten in a, h, o, = M, ſo daß die Trägheit in a = $\frac{1}{3}$M, und a = $\frac{1}{4}$BC, ſo iſt die An-

zahl

zahl der in beſagter Zeit zurück zu legenden Schwin-

$$\text{gungen} = \frac{2\sqrt{DP(6-3\sqrt{2})}}{\sqrt{(M.BC)}}.$$

§. 363.

Eben ſo findet man bey vier oder mehrern gleichgroßen, durch die elaſtiſche Saite gleichweit von einander vertheilten Trägheiten, die beſchleunigenden Kräfte in gleichen Entfernungen von der in BC zugehörigen Punkten, d. i. von ihren Mittelpunkten, überall gleichgroß. Hieraus ſchließt man 1.) daß ſich auch hier eben, wie vorhin, ſowohl die Länge des einfachen Pendels, als die Anzahl der in einer gegebenen Zeit zurückzulegenden Schwingungen finden läßt, wie viel man auch Trägheiten nimmt. 2.) Läßt ſich auch auf ähnliche Art die Anzahl der Schwingungen bey elaſtiſchen Saiten berechnen, die zu Tonwerkzeugen gebraucht werden; denn dieſe laſſen ſich als Reihen gleichweit von einander entfernter gleichgroßer Trägheiten betrachten.

§. 364.

Denn es ſey AGF (Fig. 13.) eine ſolche, aus ihrer ruhenden Lage AEF, in die Kurve AGF gekrümmte Saite. Man betrachte ſie überall mit unendlich kleinen Trägheiten beſchwert, deren Entfernungen BK = KD = dx, AB = x, und Ba = y, ſo wird cb = dy = fd; fe = — ddy, und de = dy + ddy. Es ſey auch AF = 2l, und das Gewicht der ganzen Saite = 2p; man ſuche die beſchleunigende Kraft in c.

Nun iſt die aus A erzeugte, nach dem Punkt K wirkende Kraft in c $= \frac{cb}{ac} . P = \frac{dy}{dx} . P$: die aus dem gleichen Gewicht in F entſtehende Kraft aber $= - \frac{ed}{cf} . P = - \frac{dy + ddy}{dx} . P$. Daher der ganze Druck in c $= - \frac{ddy}{dx} . P$, ſo jedoch durch die Trägheit in c zu dividiren, um die beſchleunigende Kraft zu erhalten.

Da aber $2l : 2p = dx : \frac{p}{l} dx$, ſo iſt die nach k wirkende beſchleunigende Kraft in c $= - \frac{l . ddy}{dx^2} . \frac{P}{p}$, da ſie der Größe y proportional, ſo iſt $- \frac{l . ddy}{dx^2} . \frac{P}{p} = \frac{y}{n}$, wenn n eine beſtändige Größe. Dieſe Größe iſt aber die Länge des in gleicher Zeit mit der Saite ſchwingenden einfachen Pendels, alſo leicht zu beſtimmen.

§. 365.

§. 365.

Zu dem Ende iſt folgendes zu merken. Da $\frac{y}{n} = -\frac{l.\,ddy}{dx^2}.\frac{P}{p}$, ſo iſt $-ddy = \frac{p}{P}.\frac{y}{ln}.dx^2$, und ſezt man dx beſtändig, ſo laſſen ſich beyde Glieder der Gleichung durch dy multipliciren, und ſodann integriren: daher $-dyddy = \frac{pdx^2}{Pln}\,ydy$, und $-dy^2 = y^2.\frac{pdx^2}{Pln} + B$. Um das Conſtans B zu beſtimmen, iſt zu merken, daß die Tangente der Kurve im Mittelpunkt G horizontal wird, folglich in dieſem Punkt G, $dy = 0$. Sezt man alſo für dieſem Punkt $y = EG = \alpha$, ſo bekommt man

$$B = -\frac{p\alpha\alpha}{Pln}.dx^2,$$ folglich

$$dy^2 = \frac{p\alpha\alpha}{Pln}dx^2 - \frac{py^2}{Pln}dx^2.$$ Daher auch

$$dx = \sqrt{\frac{P}{p}ln}.\frac{\frac{1}{\alpha}dy}{\sqrt{\left(1-\frac{yy}{\alpha\alpha}\right)}},$$ welches Integral

offenbar für den Kreis; hieraus ſieht man, daß die geſuchte die ſogenannte Socia Cycloidis, ſo doch aus folgenden noch deutlicher wird.

Setzet $\sqrt{\frac{P}{p}\text{ln}} = \beta$, ſo iſt $dx = \beta . \frac{dy}{\sqrt{(\nu^2 - y^2)}}$:

Es ſey auch AE = δ, und AB = $\delta - v$, um die veränderlichen Größen auf GE und die unbeſtimmte al = BE = v zu bringen. Setzet ferner aB = GE — Gl = $\alpha - t$, und Gl = t. Dieſe Zeichen geſezt, wird die Gleichung $dx = \beta \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - yy)}}$ in dieſe verwandelt $dv = \frac{\beta dt}{\sqrt{(2\alpha t - t^2)}}$, und $\alpha v = \beta$. A ſin. verſ. t. Beſchreibt man alſo mit dem Halbmeſſer EG den Quadranten GnR, ſo wird v : A ſin. verſ. t = $\beta : \alpha$, d. i. al ſteht zu Gn in beſtändigen Verhältnis. Und dies iſt die Eigenſchaft der Socia Cycloidis, die bey den Schwingungen, wie leicht erhellt, ſehr länglich ausfällt.

Behält man die erſte Gleichung, ſo bekommt man $x = \sqrt{\frac{\text{Pln}}{p}} (\text{A ſin.} \frac{y}{\alpha} + \text{B})$, wenn man nämlich die beſtändige Größe hinzuſezt. Dieſe iſt daraus zu beſtimmen, daß für $x = 0$, $\frac{y}{\alpha} = 0$, und zum

Sinus

Sinus o alle Bogen gehören, die ſich durch NC ausdrücken laſſen, wenn man für N nach und nach die ganzen Zahlen o, 1, 2, 3, 4, 5 u. ſ. w. und für C den Halbkreis annimmt. Daher auch das ganze Integral

$$x = \sqrt{\frac{Pln}{p}} \left(A\,\text{ſin.}\,\frac{y}{a} + NC\right).$$

§. 366.

Um nun die Länge des in gleicher Zeit mit der Saite ſchwingenden einfachen Pendels zu beſtimmen, iſt zu merken, daß $y = o$, wenn $x = 2l = AF$, folglich $2l = \sqrt{\frac{Pln}{p}}.NC$, und $n = \frac{4lp}{PNNCC}$.

§. 367.

Hieraus ergiebt ſich die Anzahl der Schwingungen, ſo die Saite in der Zeit vollenden kann, da ein Pendel von gegebener Länge D einmal ſchwingt. Denn $\frac{4lp}{PNNCC} : D = 1 : xx$, wenn x dieſe Anzahl ausdrückt, daher $x = \frac{NC}{2}\sqrt{\frac{DP}{lp}}$. Sezt man aber AF ſtatt 2l, und $2p = L$, ſo iſt die geſuchte Anzahl $= \frac{NC\sqrt{DP}}{\sqrt{L}.AF}$, und wenn $N = 1$, welches

Statt

Statt findet, wenn die ganze Saite um A und F ſchwingt, ſo iſt die Anzahl der Schwingungen $= \frac{C\sqrt{PD}}{\sqrt{L.AF}}$. Aber $\frac{C}{1}$ iſt das Verhältnis des Umkreiſes zum Durchmeſſer, ſezt man dieſes = 22 : 7, und iſt zugleich D die Länge des Secundenpendels, folglich = 5286'''', §. 132. Vorl. ſo iſt eben dieſe Anzahl der Schwingungen $= \frac{22}{7} \cdot \frac{\sqrt{5286''''.P}}{\sqrt{L.AF}}$.

§. 368.

Da y = 0, wenn x = 0, oder x = 2l, und §. 366. $x = \sqrt{\frac{Pln}{p}}$. NC, wenn man durch x die ganze Länge verſteht: da ferner überhaupt alle in NC enthaltene Fälle Statt haben können, ſo muß auch die Saite nicht nur auf die Fig. 13. ausgedrückte Art ſchwingen können, daß ſie nämlich die Geſtalt AGF annimmt, ſie muß ſich auch ſo krümmen, daß ſie Knoten macht, wie Fig 12. zu ſehen, und daß ihre Lage ABCDEF iſt. Denn alsdenn iſt y = 0 in A, C, E, F. Demnach kann die ſchwingende Saite auf mancherley und unzählige Arten ſich um die Axe herumdrehen. Aber jeder Aſt zwiſchen zwo Knoten iſt die genannte Socia cycloidis und alle Punkte in ſämmtlichen Theilen gelangen zu einer und derſelben Zeit zu ihren Axen AC, CE, EF ꝛc.

Hier wollen wir uns mit Anwendung dieſer Bahnen auf die Tonkunſt nicht länger aufhalten: dieſer Theil der Naturlehre iſt an einem andern Orte zu erklären. Dies einzige laßt uns beym Schluß hinzufügen, daß, was §. 341. u. f. f. in den Vorl. abgehandelt worden, ſich aus der hier gegebenen Formel $\frac{22}{7} r \frac{5286.P}{L.AF}$, die die Anzahl der Schwingungen angiebt, herleiten läßt.

Bey den Verlegern dieſes Werks ſind noch folgende Bücher zu haben:

Abhandlung von holzſparenden Stubenöfen und andern ökonomiſchen und landwirthſchaftlichen Feuern, 3 Theile, mit Riſſen, gr. 8. 2 thl. 4 gr.

Beyers Schauplatz der Mühlenbaukunſt, nebſt Anhang. Neue verbeſſerte Auflage, mit Kupfern, fol. 6 thl.

Herrn von Brücks Vortheile, eine Situation zum militäriſchen Gebrauch aufzunehmen und zu zeichnen, wie auch die nützlichſten Feldſchanzen zu traciren und zu bauen, mit illuminirten Kupfern, gr. 8. 10 gr.

Hrn. von Fallois Schule der Kriegsbaukunſt; als eine Fortſetzung der Werke des Herrn **Belidor**. Aus dem Franzöſiſchen überſezt vom Herrn Grafen **von Schmettau**, mit Plans, gr. 4 1 thl. 20 gr.

Gärtners Scheiben-Inſtrument, die ordentlichen Abwechſelungen der Ebbe und Fluth dadurch an allen Orten des großen Weltmeers leicht und richtig zu erforſchen. 4. 2 gr.

Heuns Verſuch einer Naturgeſchichte des geſtirnten Himmels, mit zwey Planisphärien, 8. 1 thl. 8 gr.

Krubſacius ökonomiſcher Vorſchlag, wie man die wohlfeilſten, dauerhafteſten und feuergeſicherſten Dächer über Wirthſchaftsgebäude anlegen ſoll, mit Kupf. gr. 8. 4 gr.

Lempens Magazin der Bergbaukunde, und des dahin einſchlagenden Maſchinenweſens, 4 Bände, mit Kupfern, gr. 8. 2 thl. 16 gr.

des Ritters **d'Obreuil**, Artilleriſt in Verlegenheit; oder Abhandlung von den mechaniſchen Handgriffen und Vortheilen bey der Artillerie, mit Kupfern gr. 8. 18 gr.

Rau's Grundſätze der Artillerie, mit Kupfern, gr. 8. 9 gr.

du Teil, des Ritters, nöthiger Unterricht, den Gebrauch der Feldartillerie betreffend, für Offiziers von allen Waffen, mit Kupfern und Anmerkungen, gr. 8. 12 gr.

Verbeſſerungen
zu Krafts Mechanik.

Seite 1. Zeile 1. ſtreiche von aus.
- " 7. lies: materiellen ſtatt: natürlichen
- " 2. " 12. " dann " denn
- " 84. " 10. v. u. lies: ingleichen ſtatt: ungleichen
- " 136. " 8. v. u. " Pendeln " Punkte
- " 227. " 3. v. u. " $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ " $\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}$
- " 305. " 8. " " daß, wenn " daß man
- " 11. " " wir erhalten " erhalten wir
- " 311. " 18. ſtreiche $-aax$ aus.
- " 314. " 4. v. u. lies: $\frac{1}{3}bc^4$ ſtatt $3bc^4$
- " 319. " 7. " " $\frac{\frac{2}{7}.2\sqrt{a}.x^{\frac{7}{2}}}{\frac{2}{5}.2\sqrt{a}.x^{\frac{5}{2}}}$ ſtatt $\frac{\frac{2}{7}.2\sqrt{a}.x^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{5}.2\sqrt{a}.x^{\frac{7}{2}}}$
- " 323. " 2. v. u. lies: $C=S$ ſtatt $=S$
- " 333. " 6. " " dann " denn
- " 334. " 9. v. u. " $\frac{S.\mathfrak{z}xx}{S.\mathfrak{z}x}$ ſtatt $\frac{S.3xx}{S.3x}$
- " 340. " 2. v. u. " $\sqrt{(ax-xx)}$ ſtatt $\sqrt{(axx-xx)}$
- " 343. " 16. " " $\mathfrak{z}$ ſtatt 3
- " 346. " 8. v. u. " $\frac{S.(4y^2x^2+y^4)dx}{4}$ ſtatt: $\frac{S.(4y^2x^2+y^2)dx}{4}$, und $+\frac{1}{3}a^2x^3$ ſtatt $\frac{1}{3}a^2x^3$

S. 370. Z. 3. v. u. nach Kurven ſetze: dieſe Kräfte

= 386. = 5. lies: $T : \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ ſtatt: $T \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$

= 467. = 9. = h = b

= 486. = 3. = 25^2 = 25^2

= 489. = 1. = 39^0 = 90^0

= 532. = 6. v. u. nach $t = \infty$ ſetze: ſo muß auch ſeyn $x = \infty$

= 535. = 7. lies: $\frac{1}{0}$ ſtatt: $\frac{0}{0}$.

= 587. lezte Z. = nach: oder Logz ſetze =

= 596. Z. 1. nach daß ſetze: α

= 611. = 4. lies: $gc = \alpha z$ ſtatt: $gc - \alpha z$

= 637. vorlezte Z. nach Beweisgründe ſetze: wo

= 656. Z. 14. v. u. lies: ce ſtatt: cc

= 681. = 16. = = Gleichheit ſtatt: Gleichgewicht

= 691. = 15. = = die ſtatt: d. i.

= 743. = 8. = = Endlich ſtatt: Erſtlich

= 774. = 11. v. u. = Grad = Grund

= 848. = 3. v. u. = $-mMc$ = $+mMc$

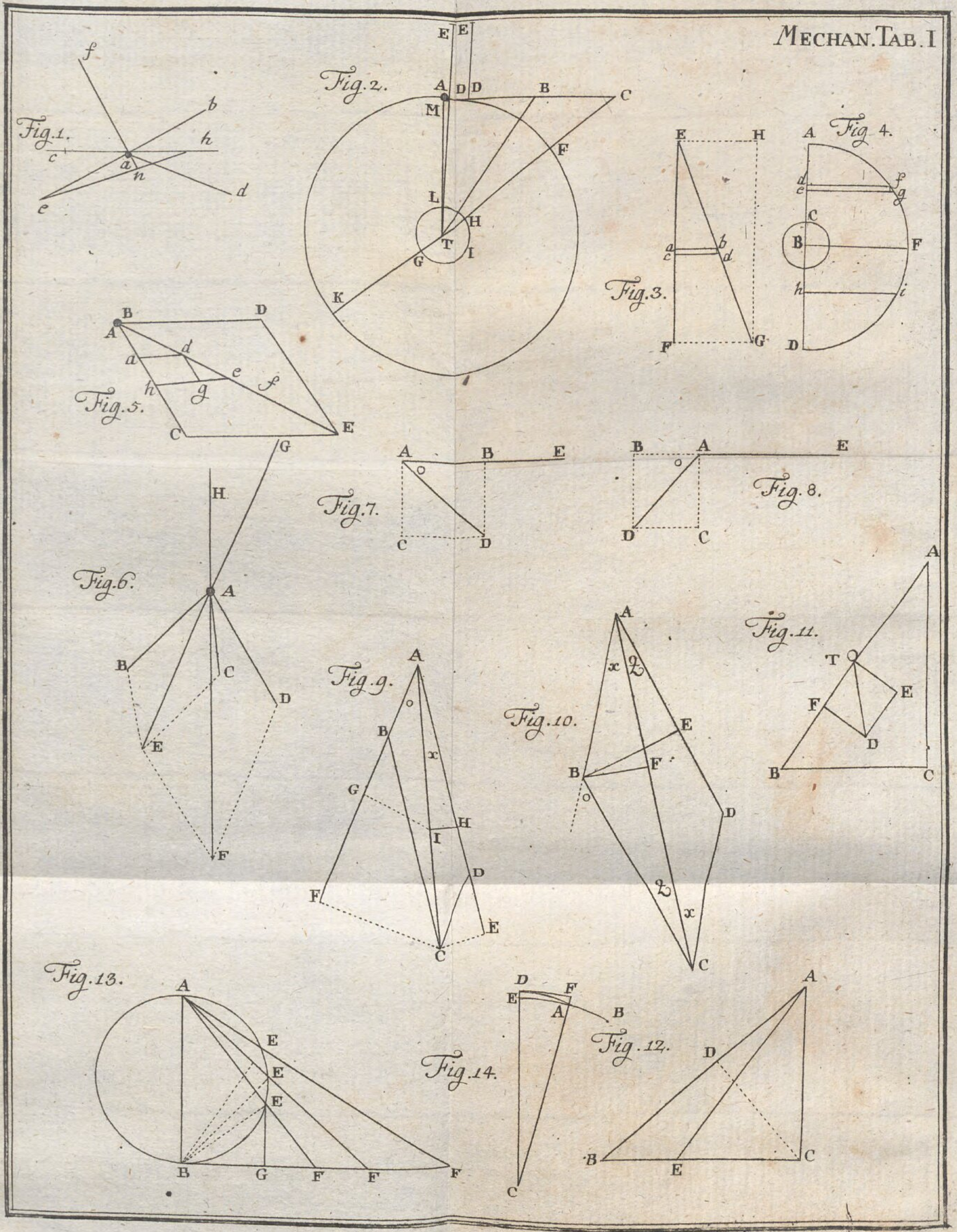
= 851. = 4 = = Alſo = Auch

= 863. = 1. = = dünkt = drückt

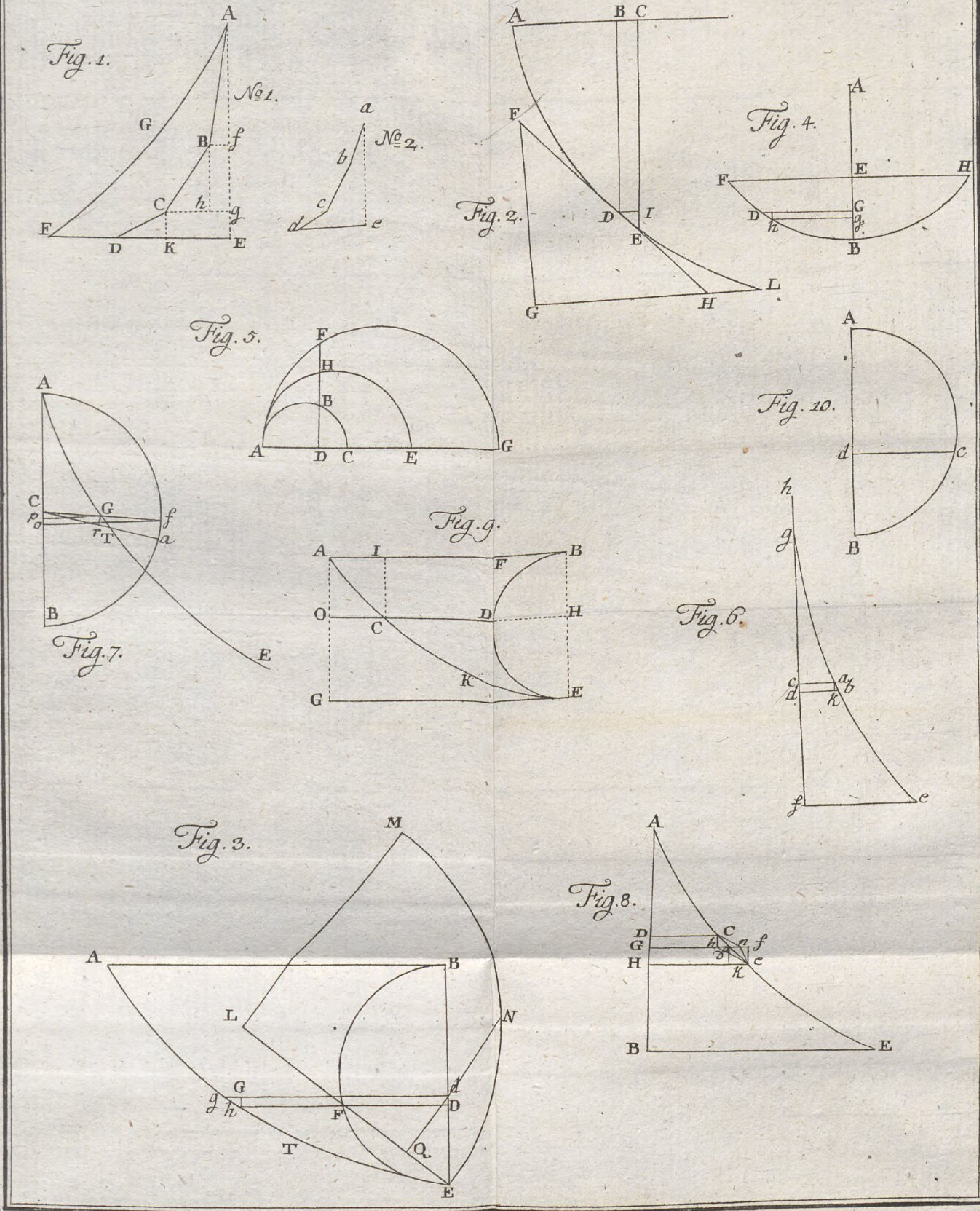
= 898. = 4. v. u. = az = zA

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK AUGSBURG

Bayerische Staatsbibliothek München


Mechan. Tab. I
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.

Mechan. Tab. II.



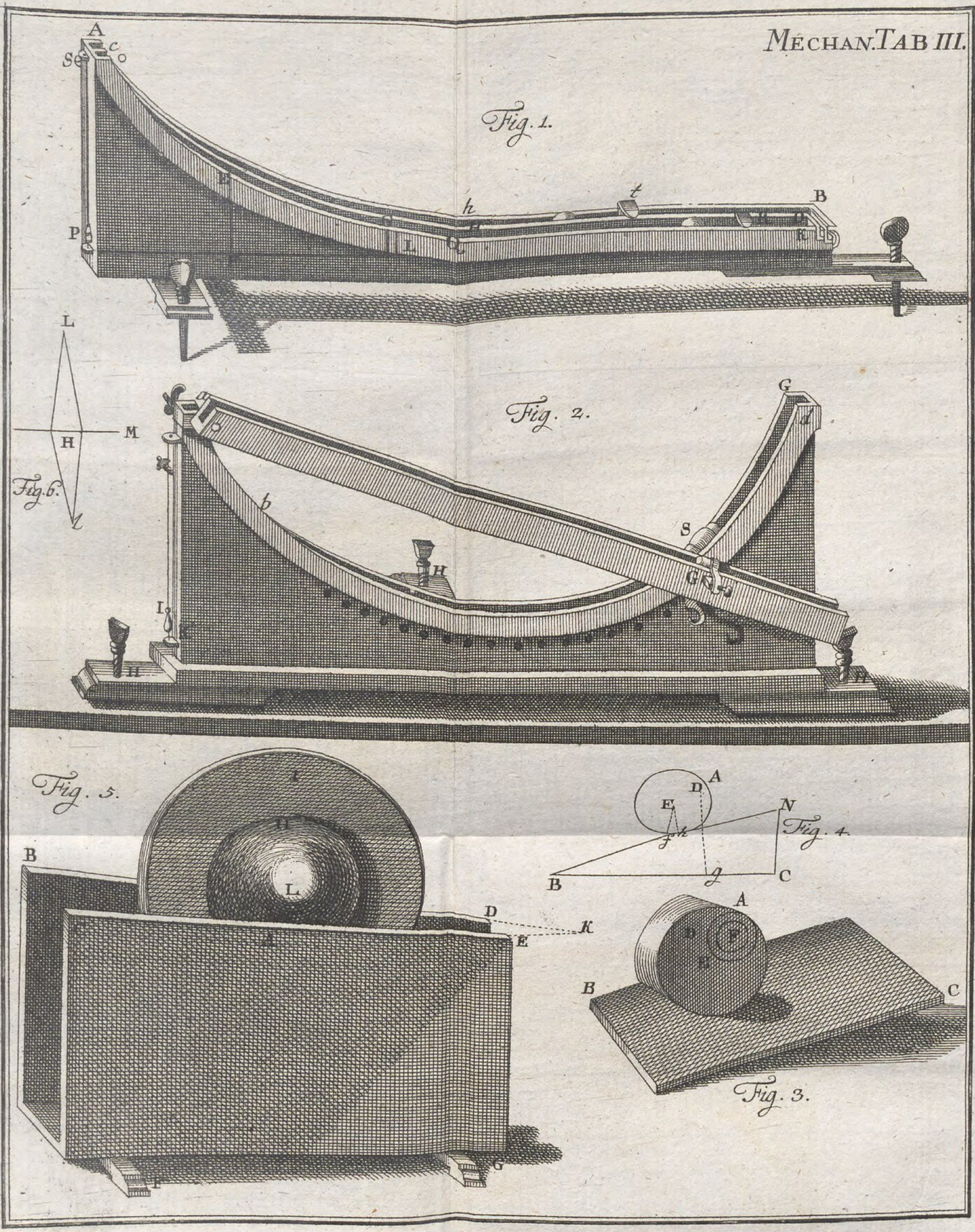


Fig. 1.
A
S
c
P
E
h
t
B
L
Fig. 2.
G
M
H
Fig. 6.
b
S
H
I
Fig. 5.
B
L
D
K
E
A
N
Fig. 4.
E
h
g
B
C
Fig. 3.

MECHAN: TAB IV.

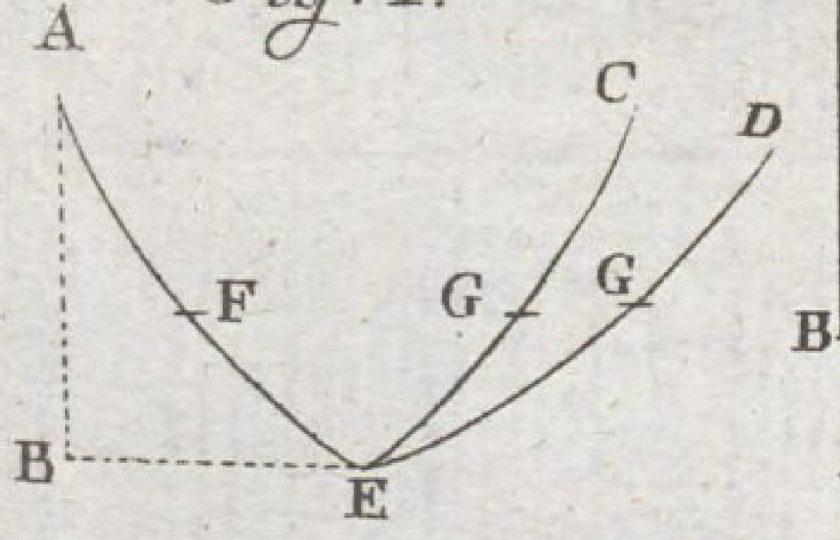


Fig. 1.

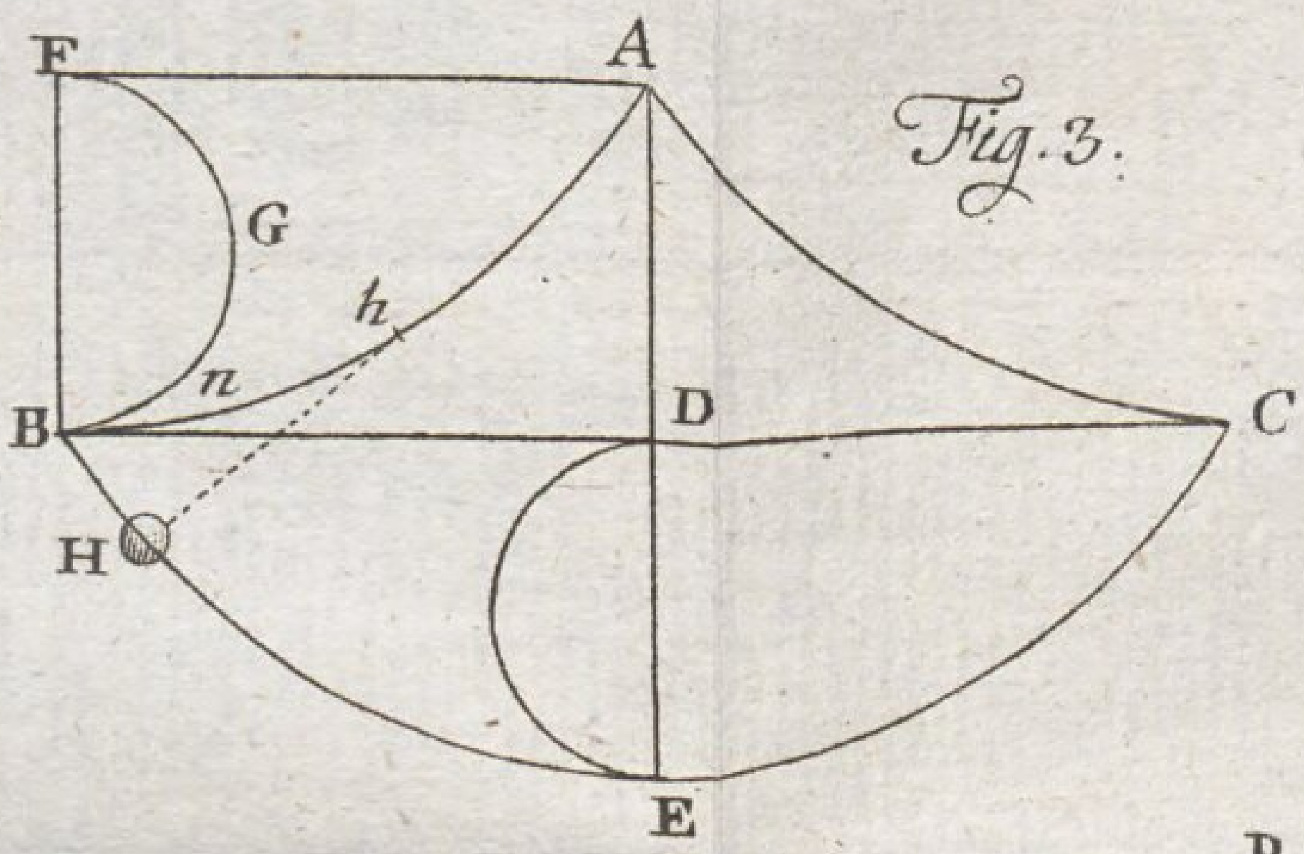


Fig. 3.

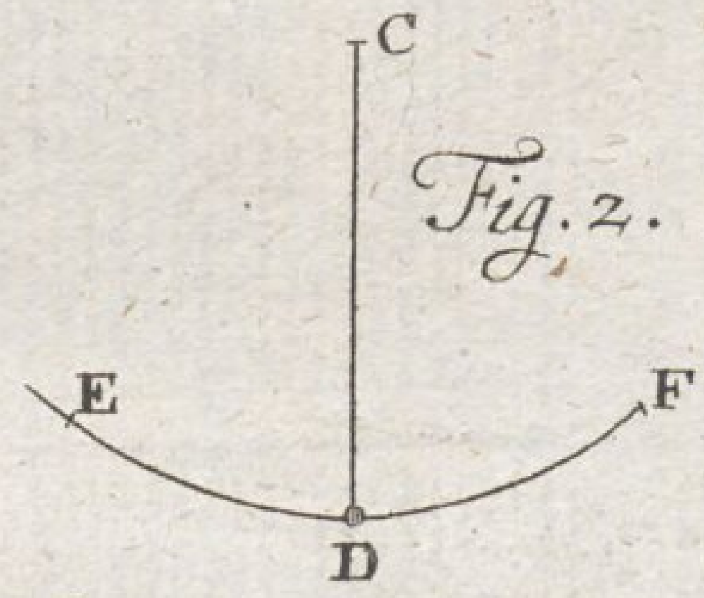


Fig. 2.

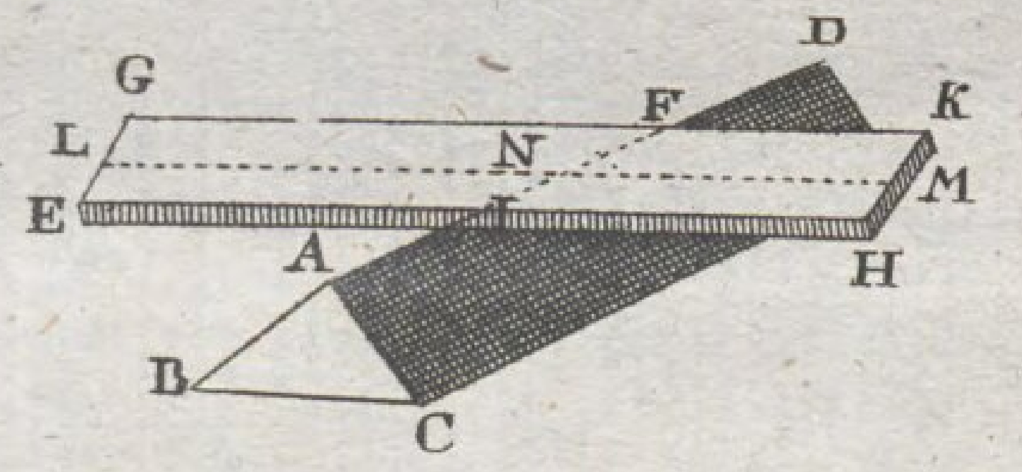


Fig. 4.

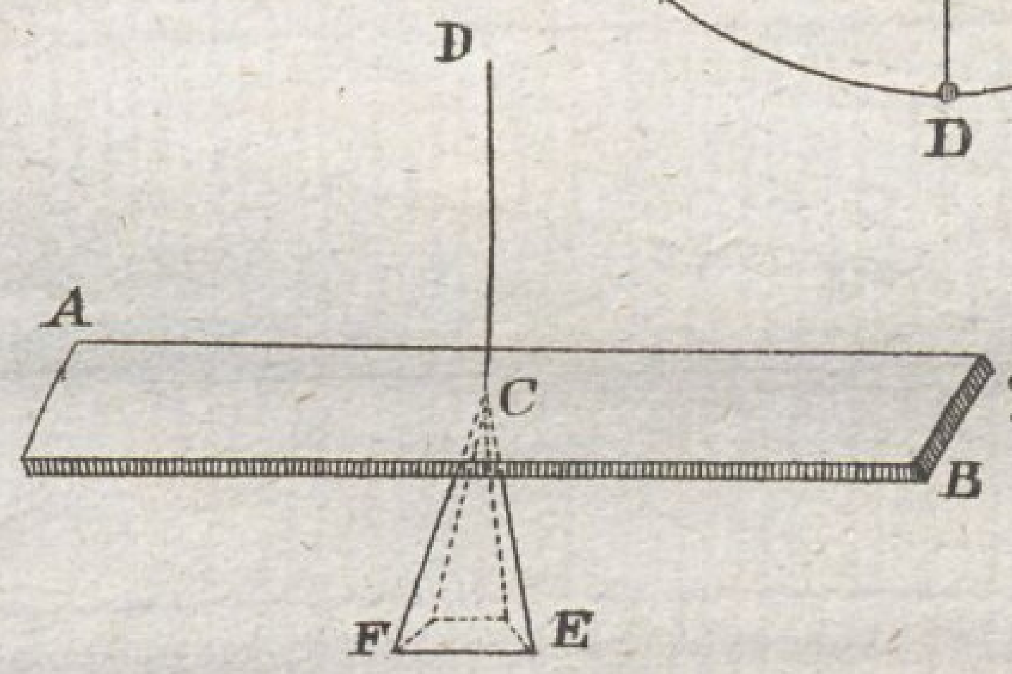


Fig. 5.

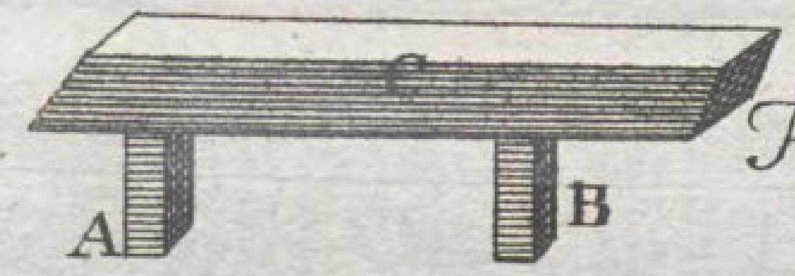


Fig. 6.

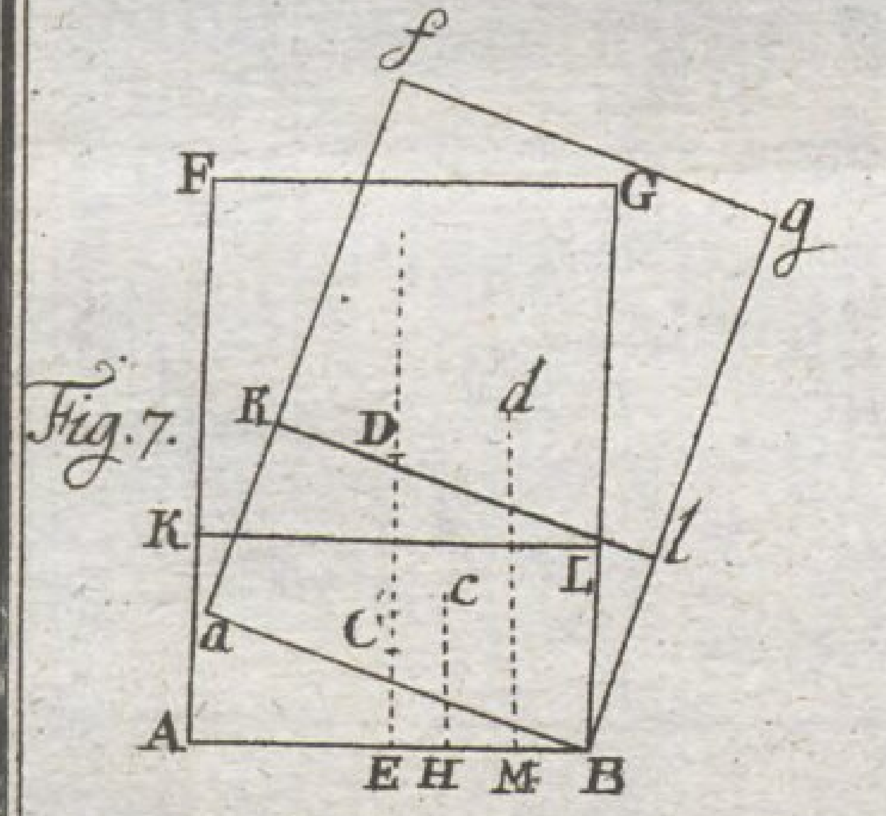


Fig. 7.

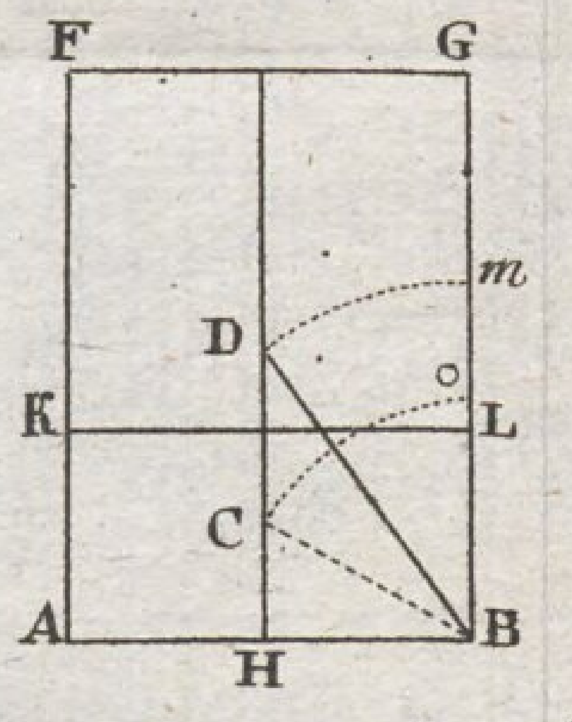


Fig. 8.

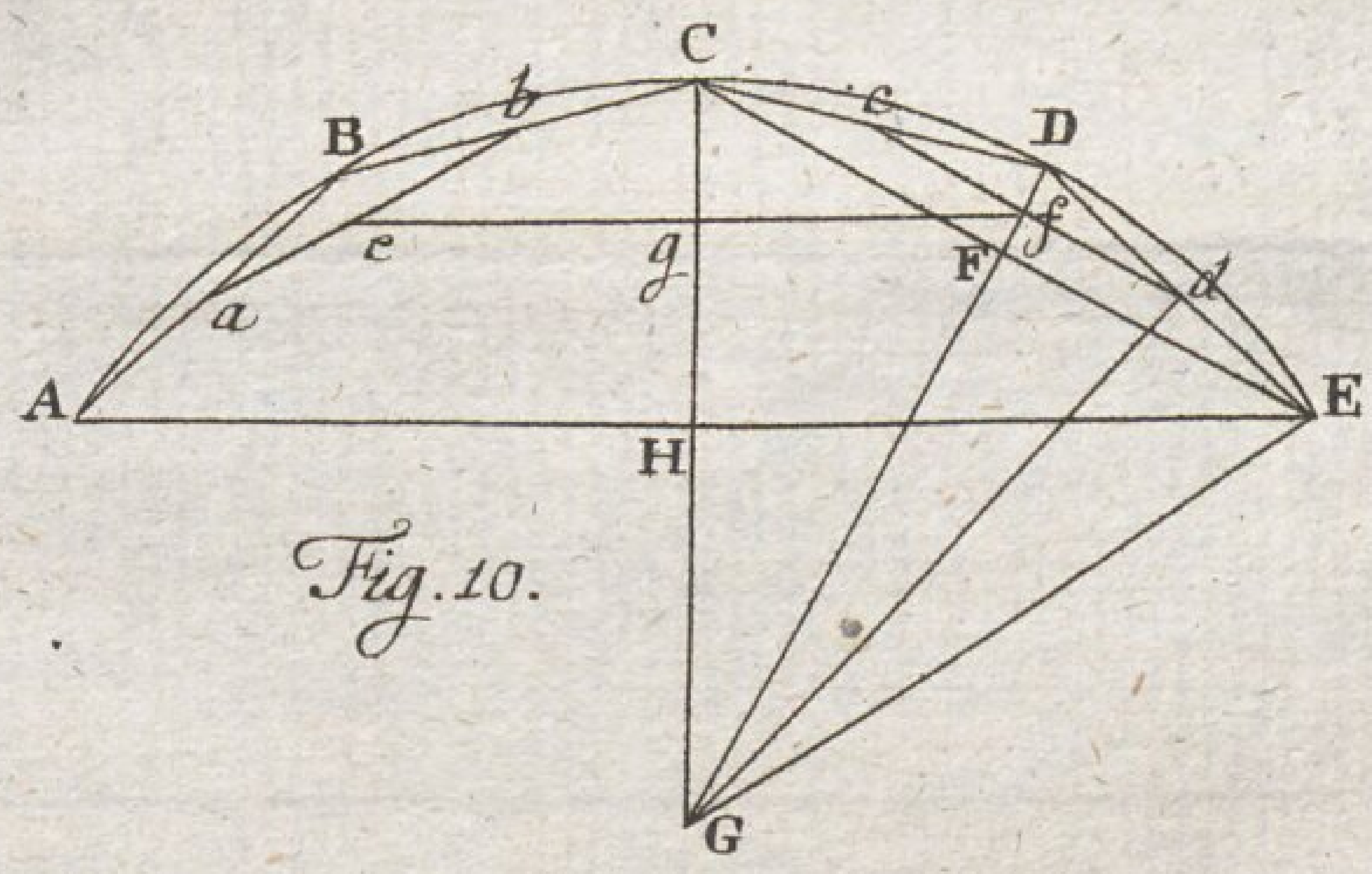


Fig. 10.

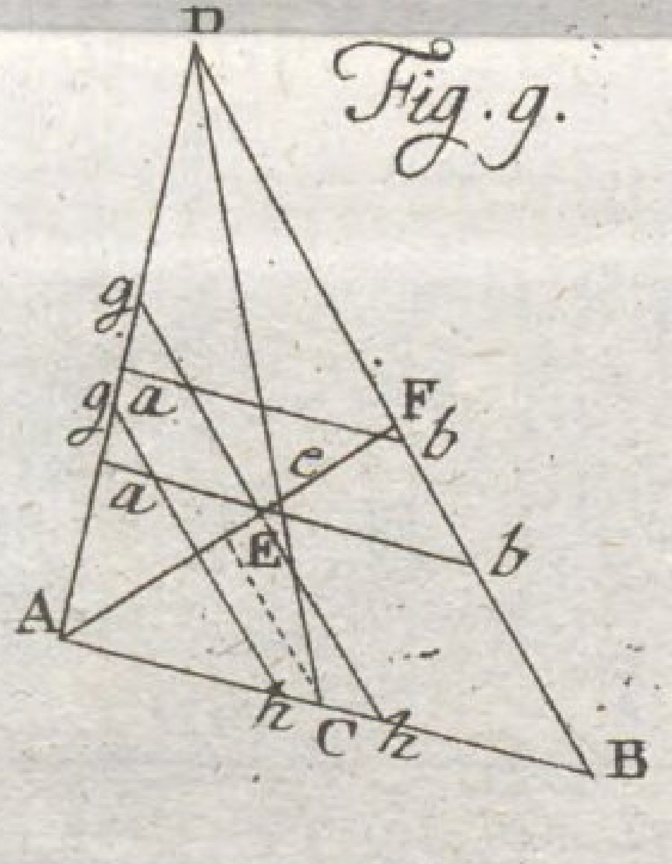


Fig. 9.

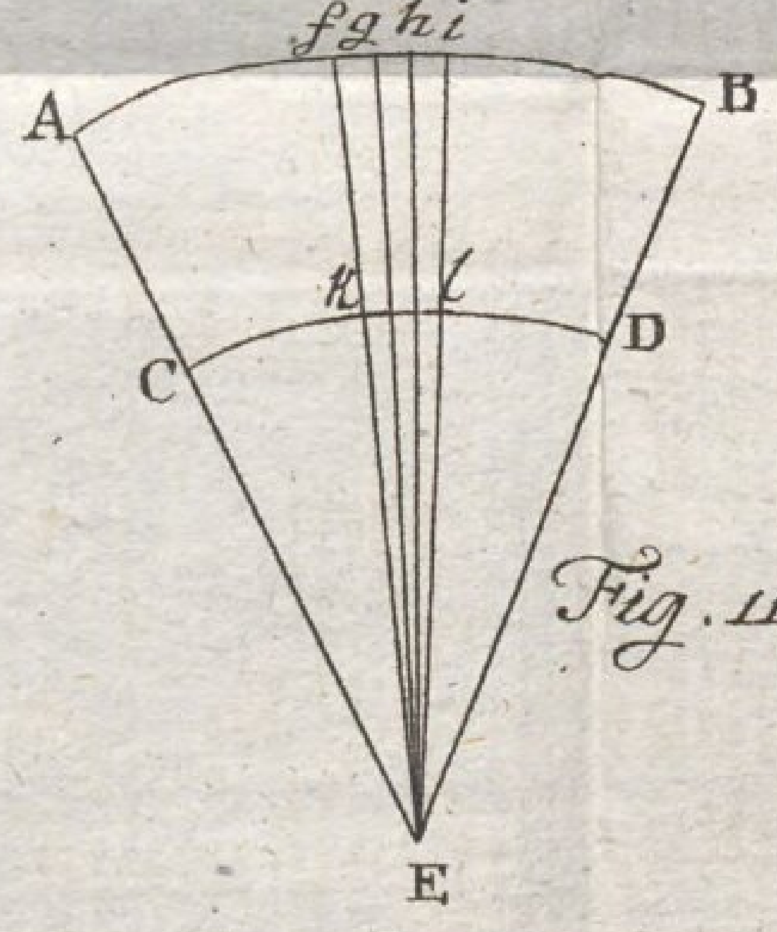


Fig. 11.

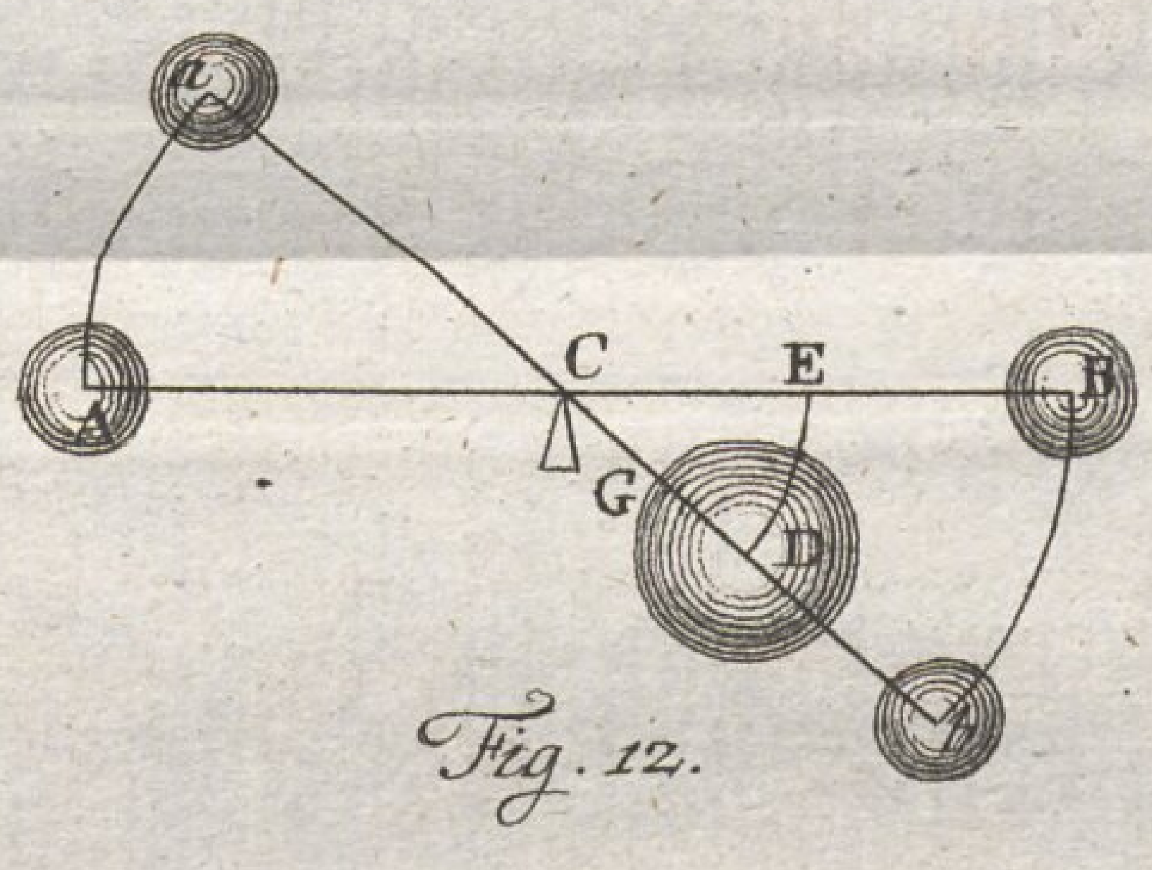


Fig. 12.

MECHAN: TAB. V.

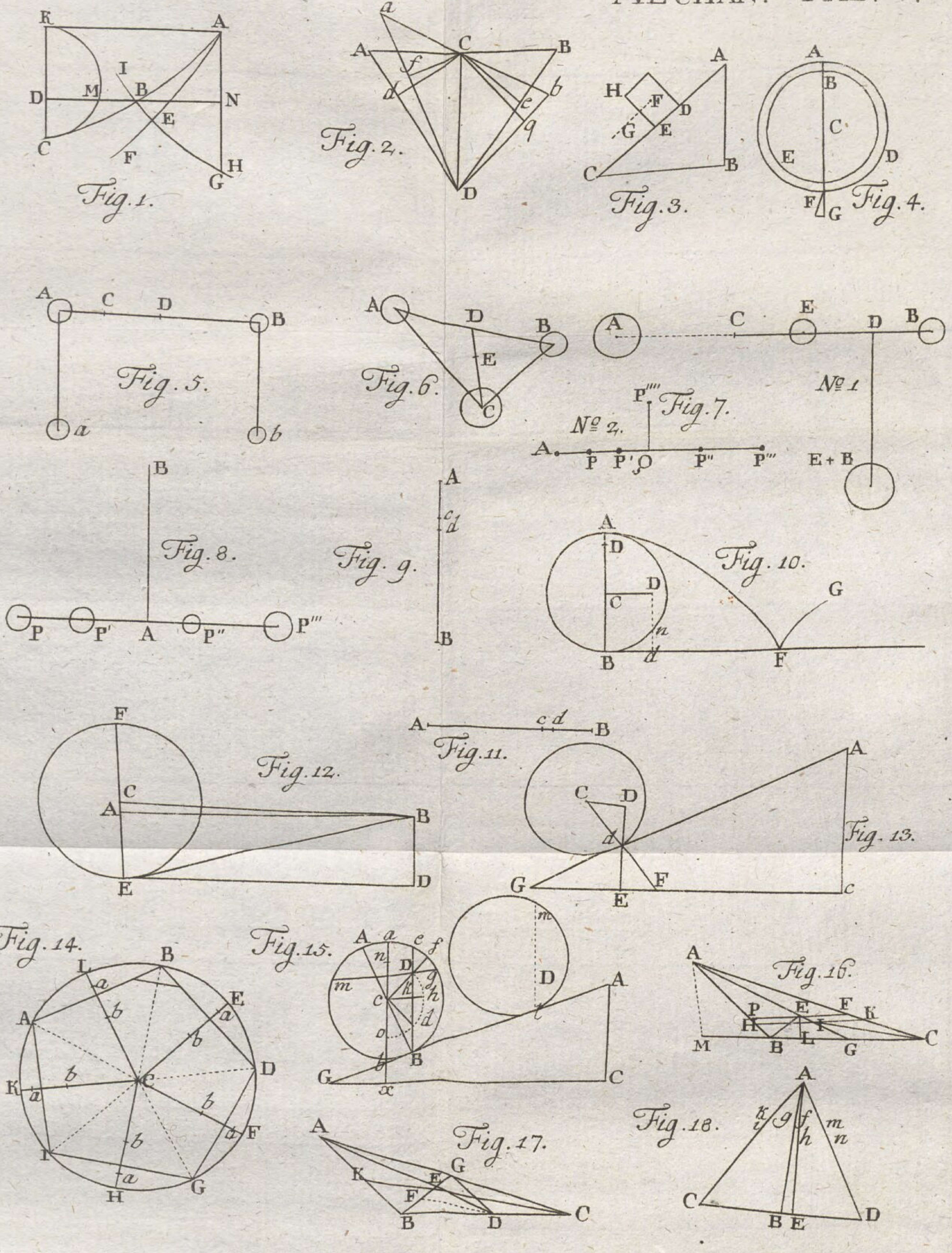
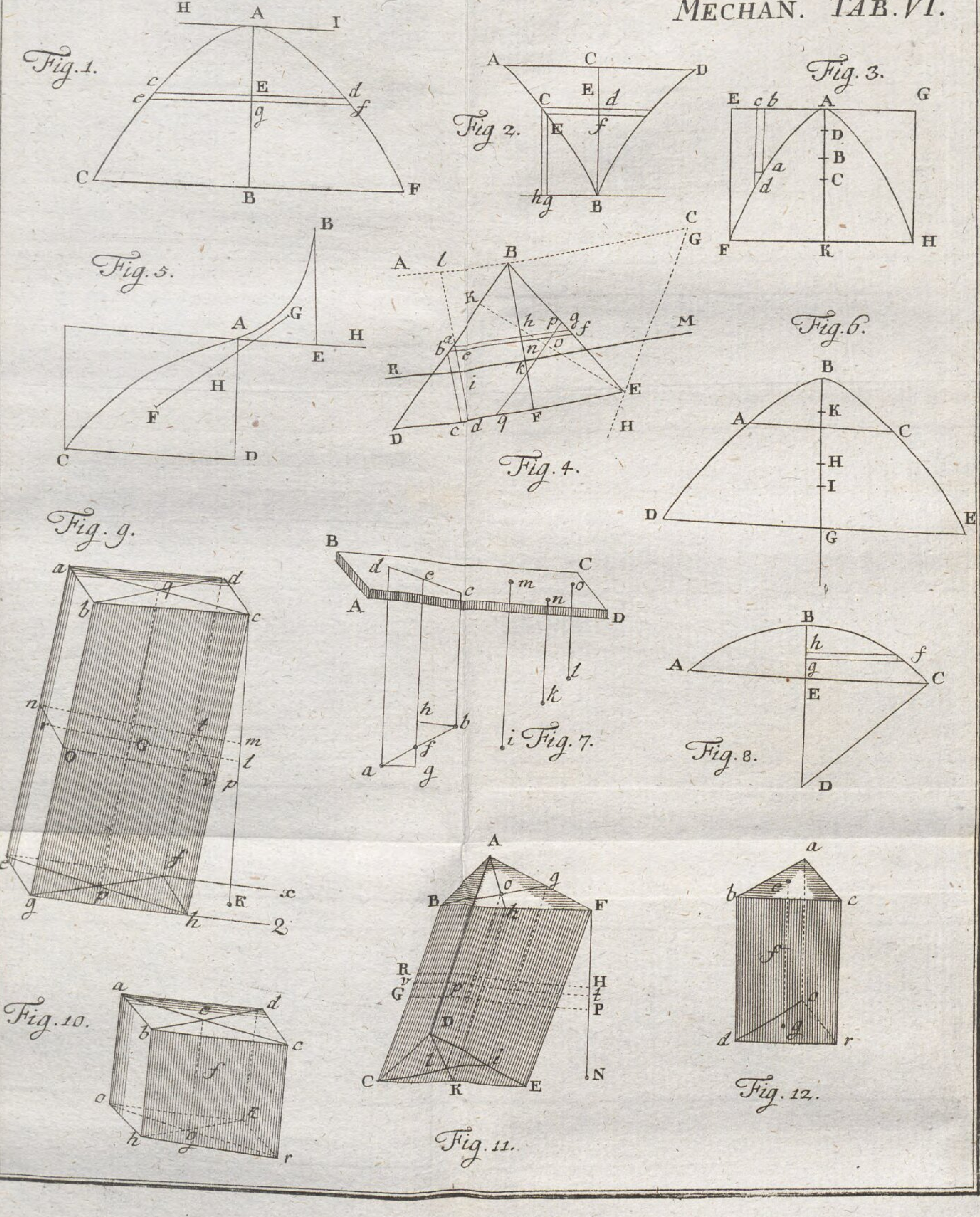
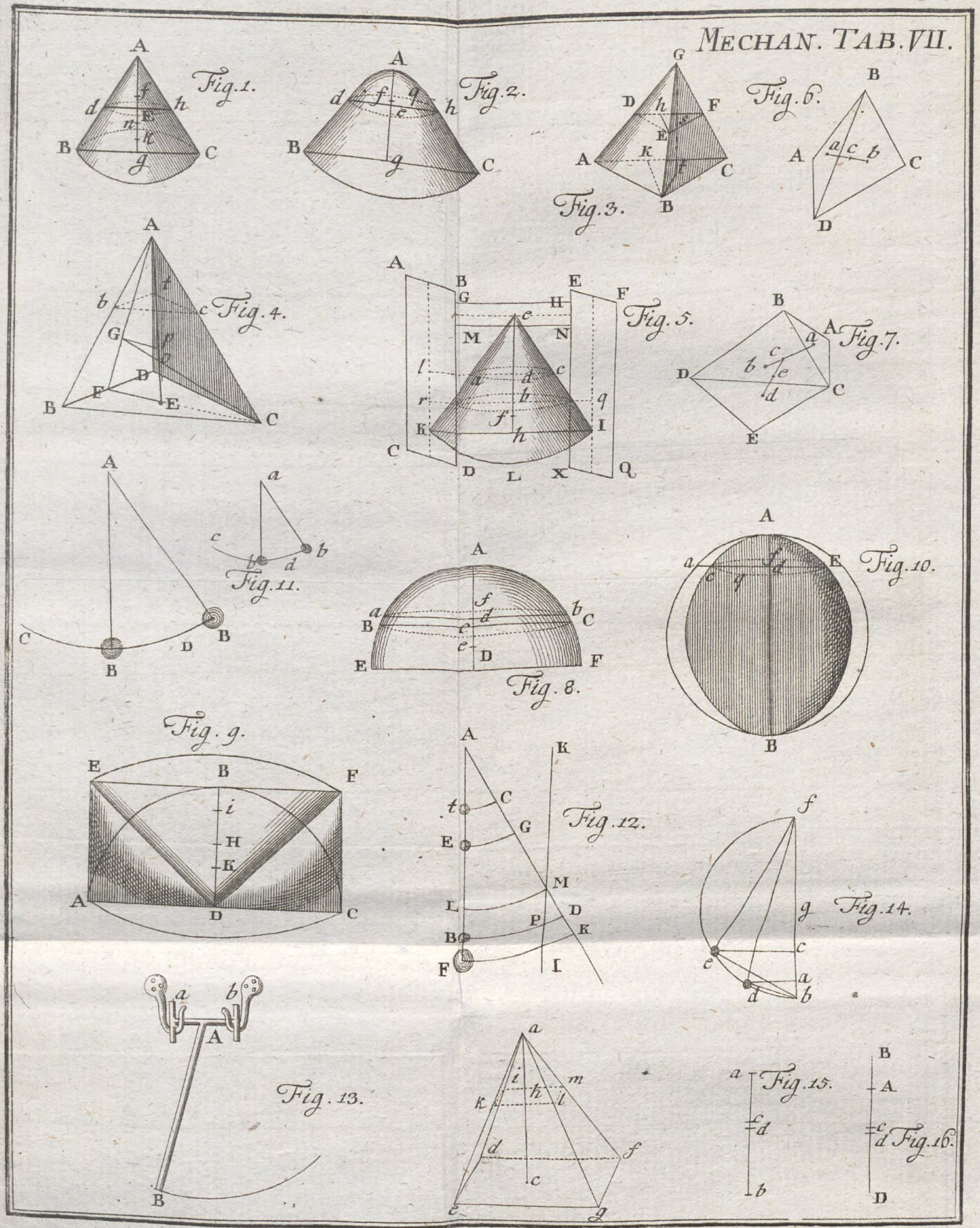


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
№ 1
№ 2.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

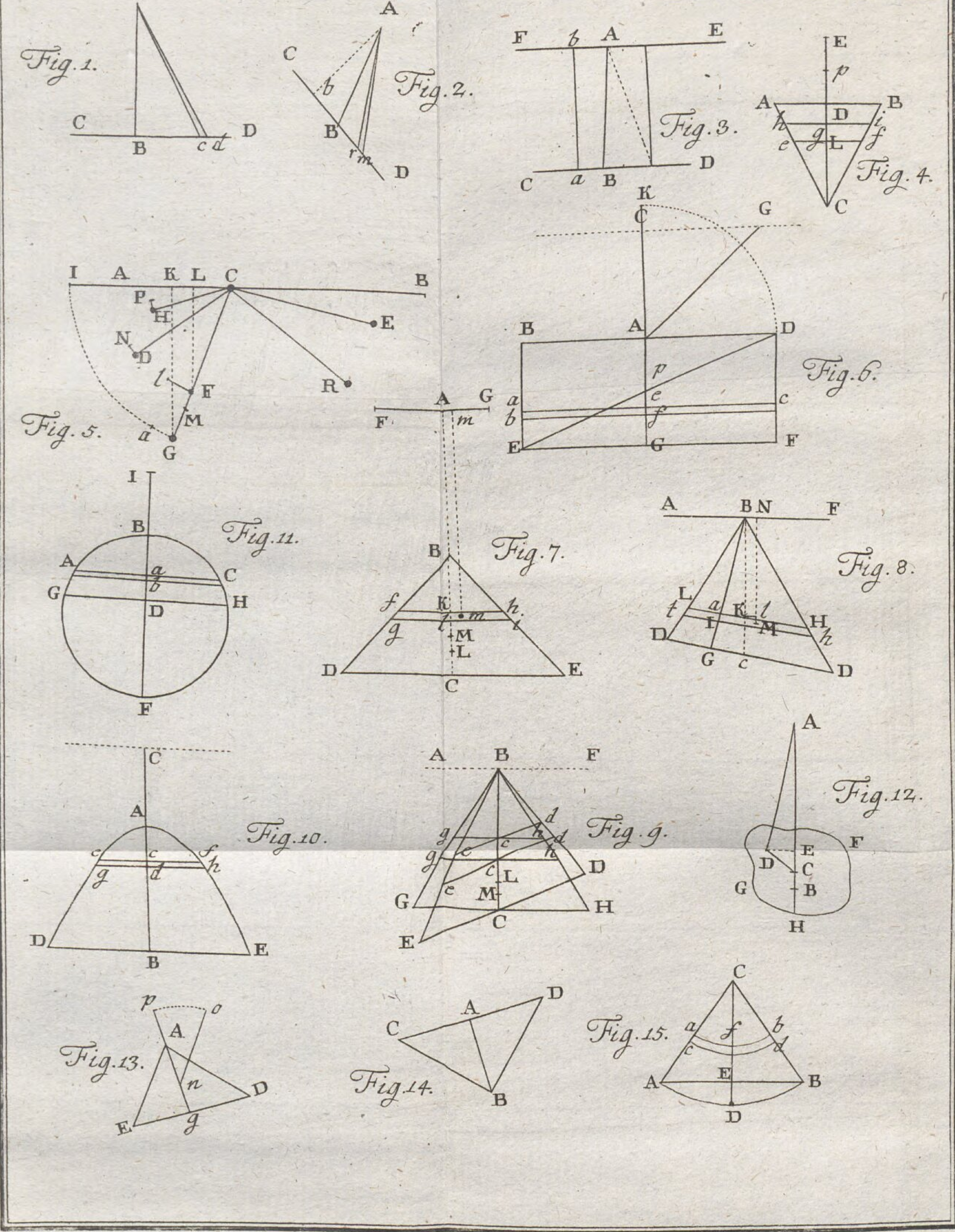
MECHAN. TAB. VI.



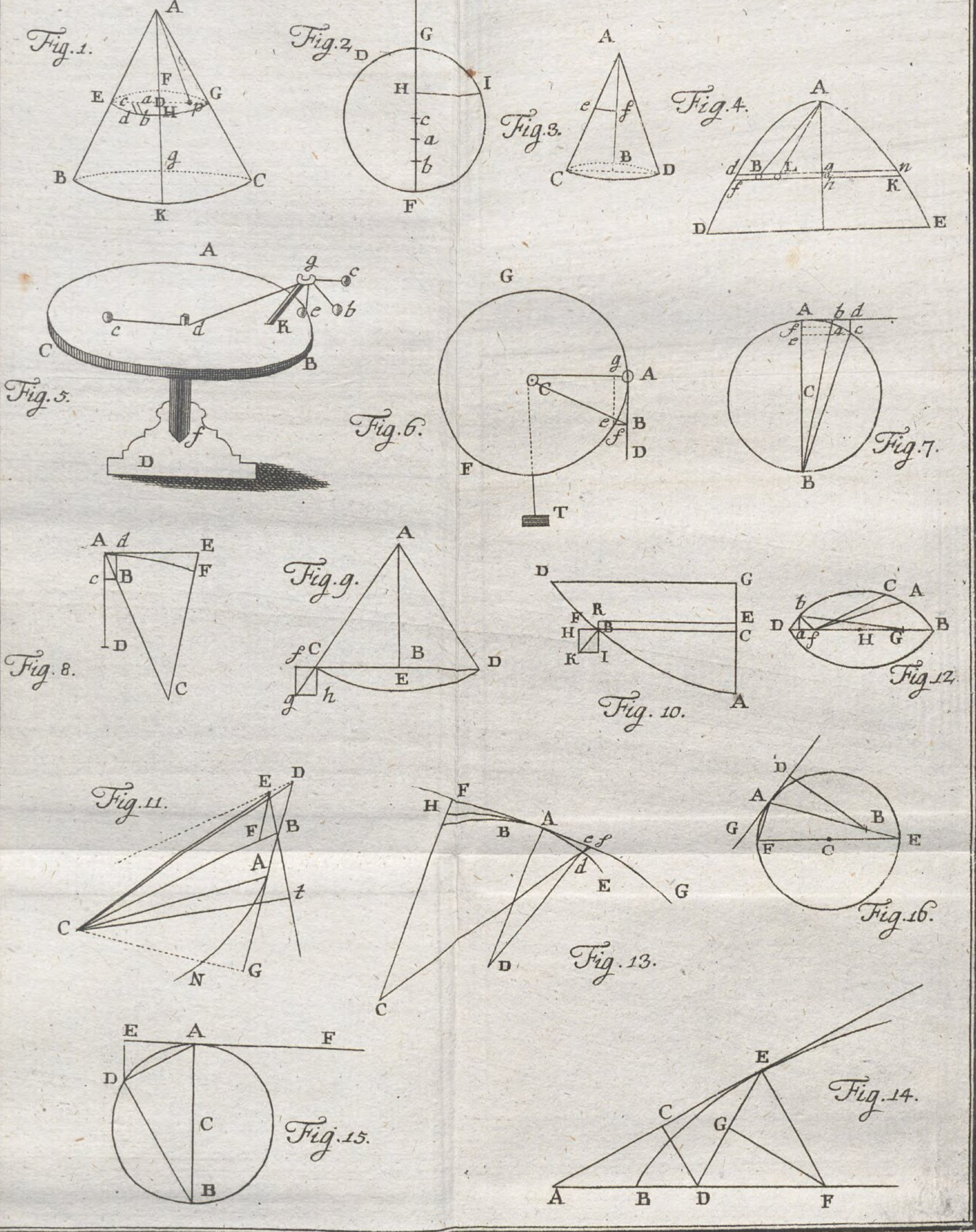
MECHAN. TAB. VII.



MECHAN: TAB. VIII.



MECHAN. TAB. IX.



MECHAN. TAB. X.

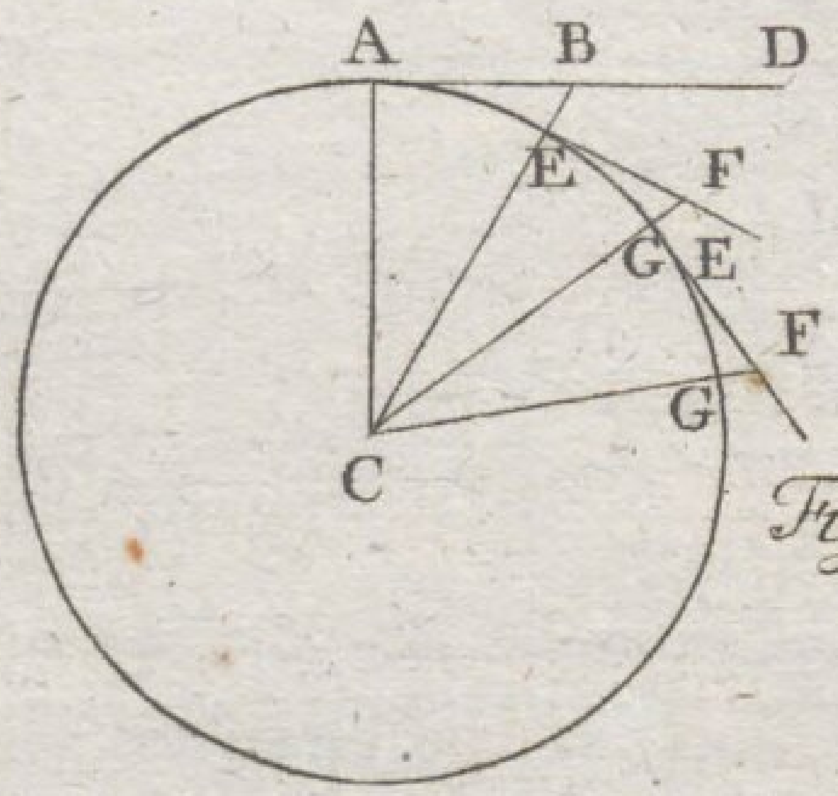


Fig. 1.

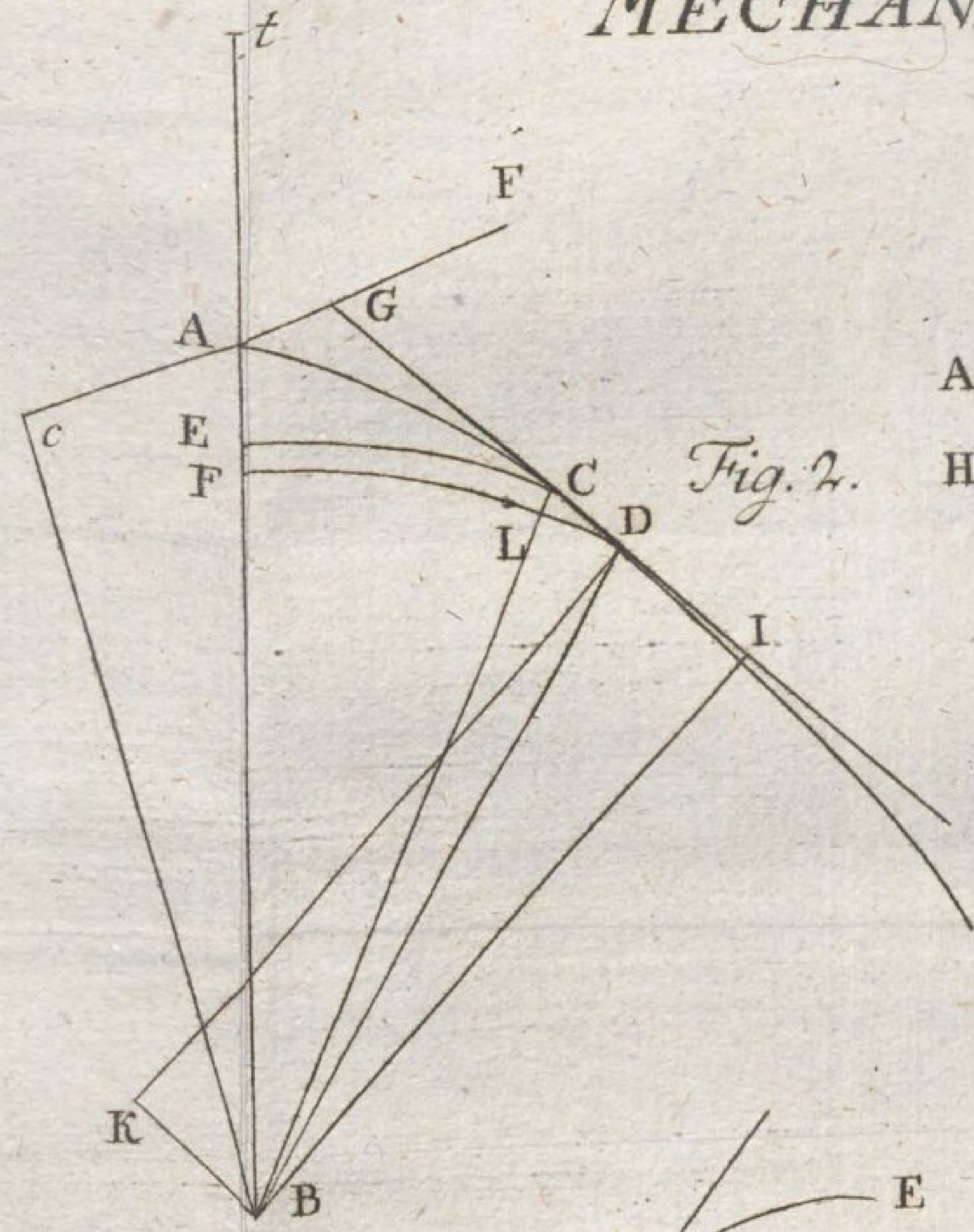


Fig. 2.

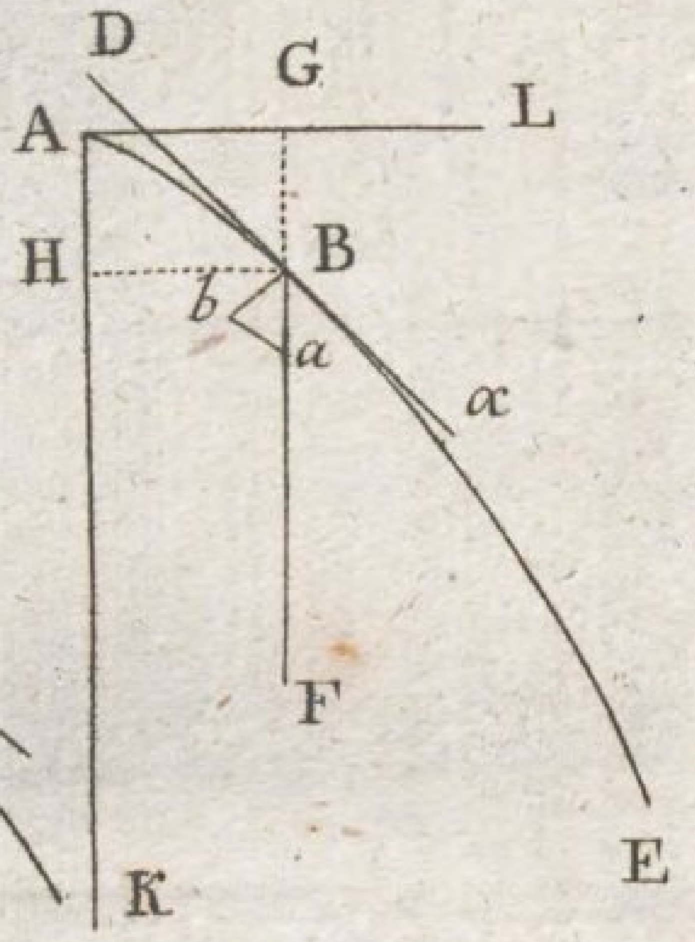


Fig. 8.

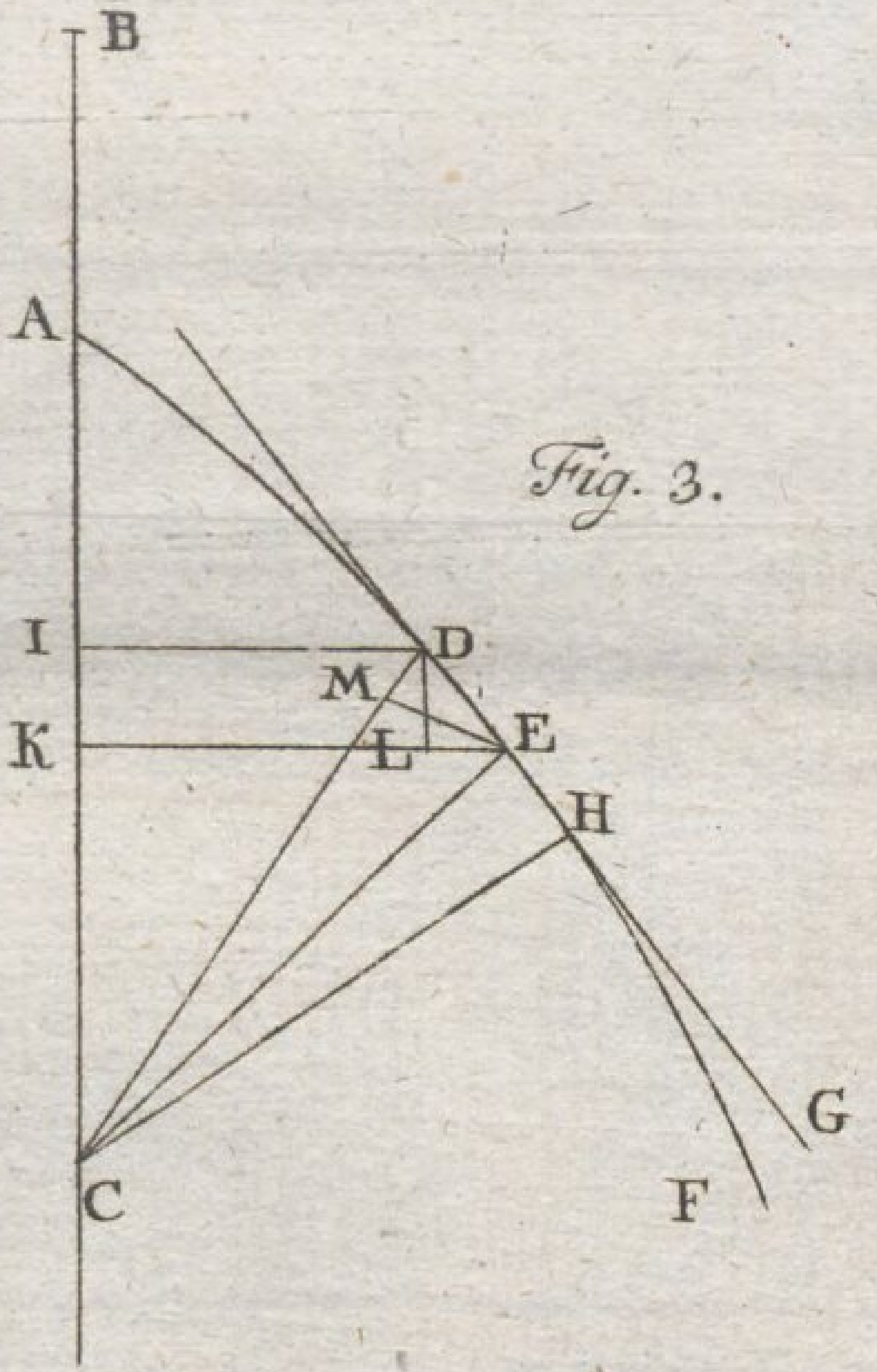


Fig. 3.

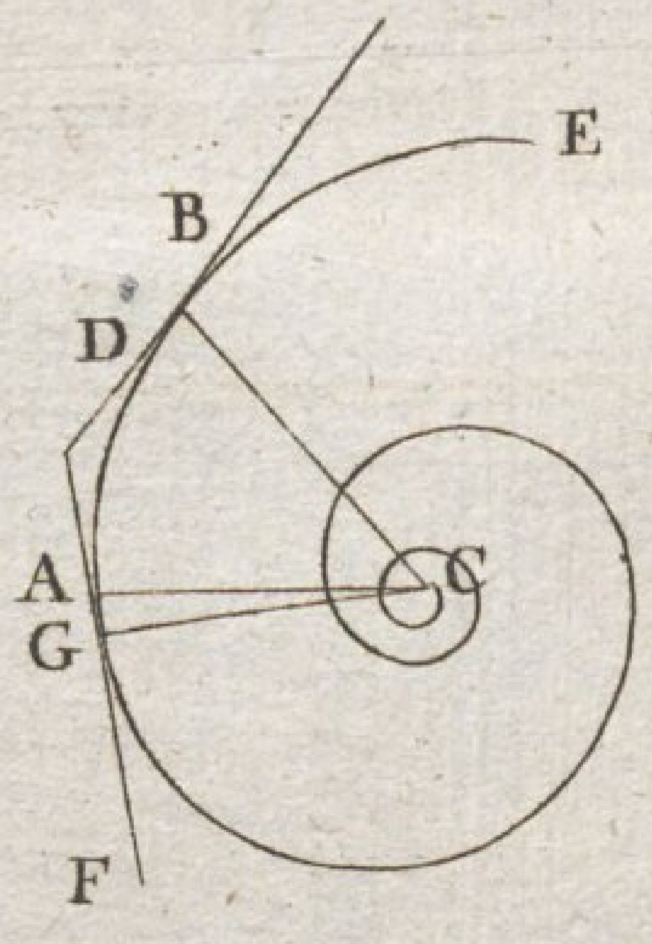


Fig. 4.

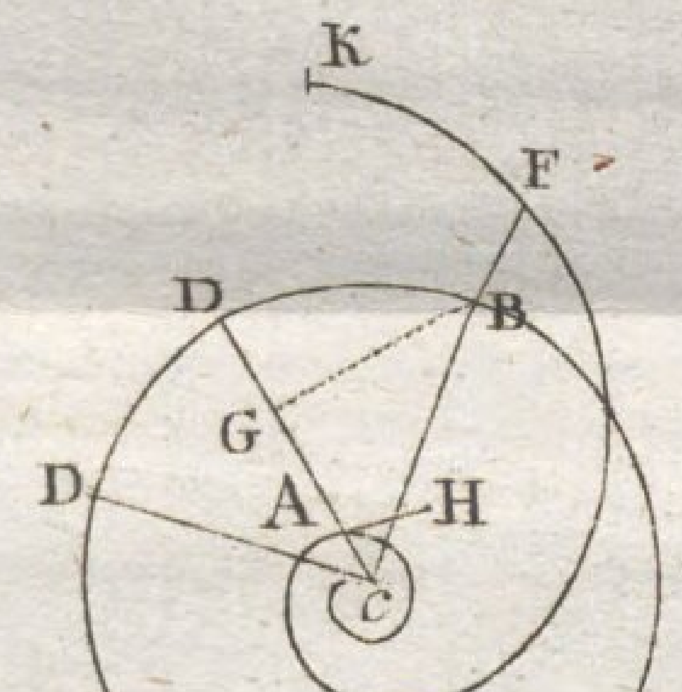


Fig. 5.

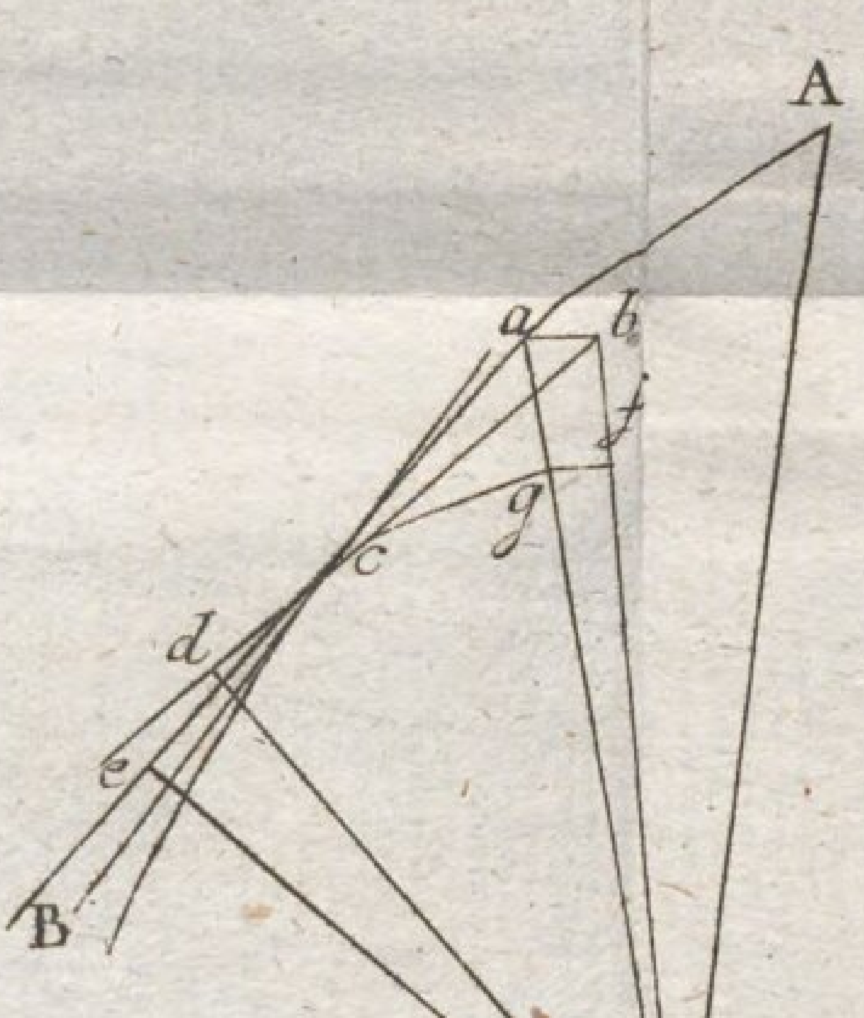


Fig. 6.

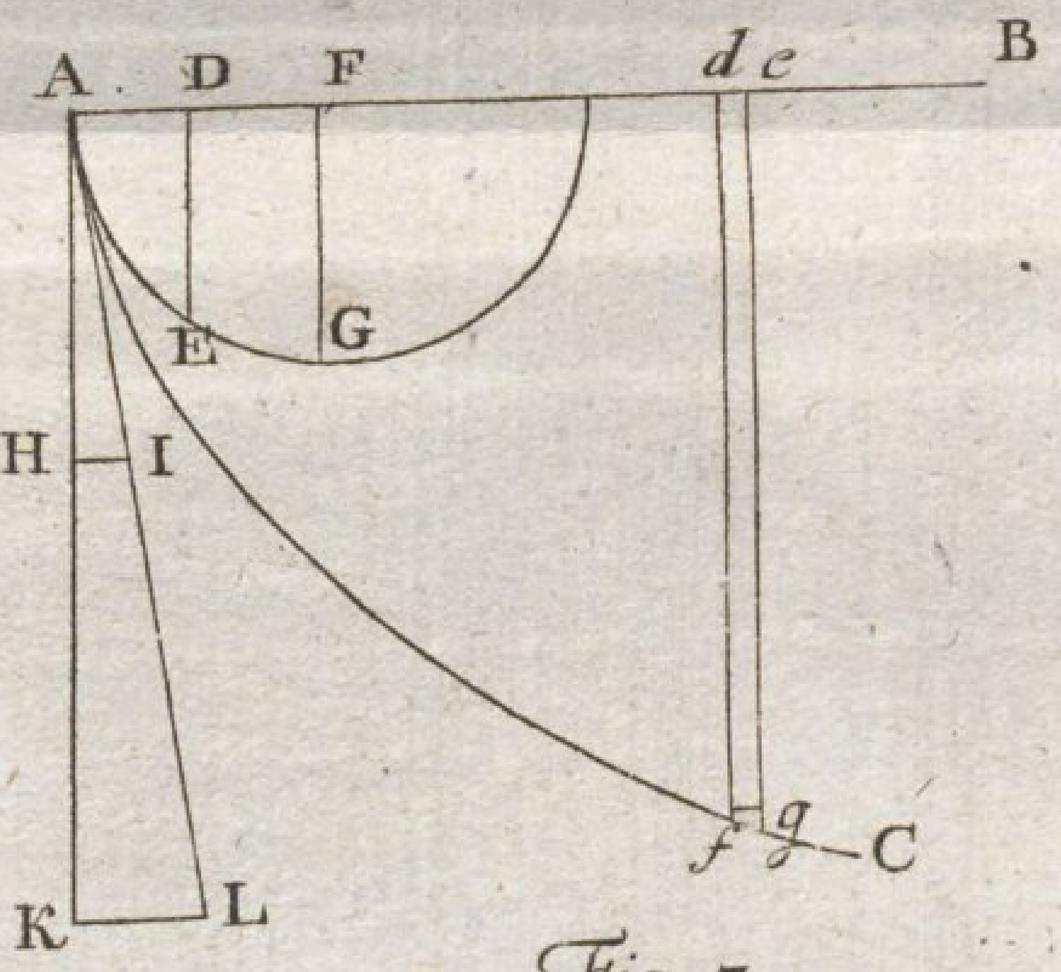
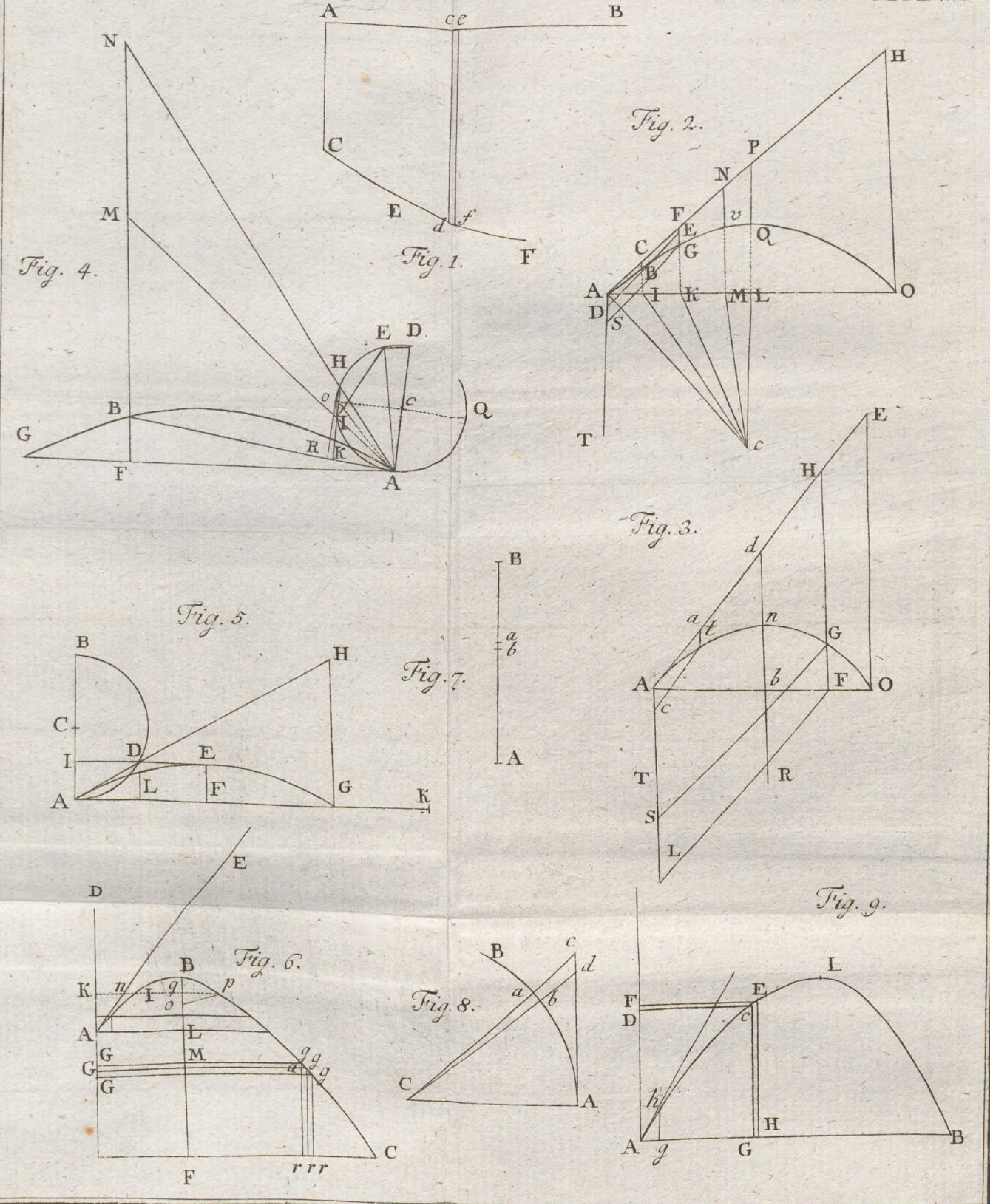


Fig. 7.

MECHAN. TAB. XI.



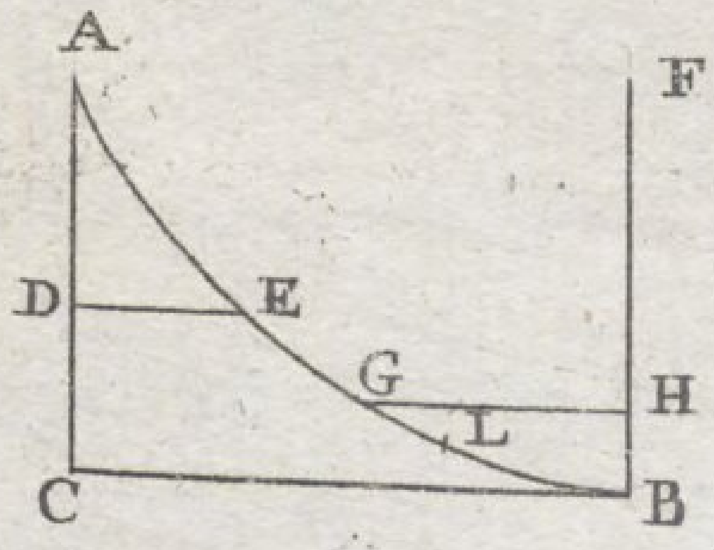


Fig. 1.

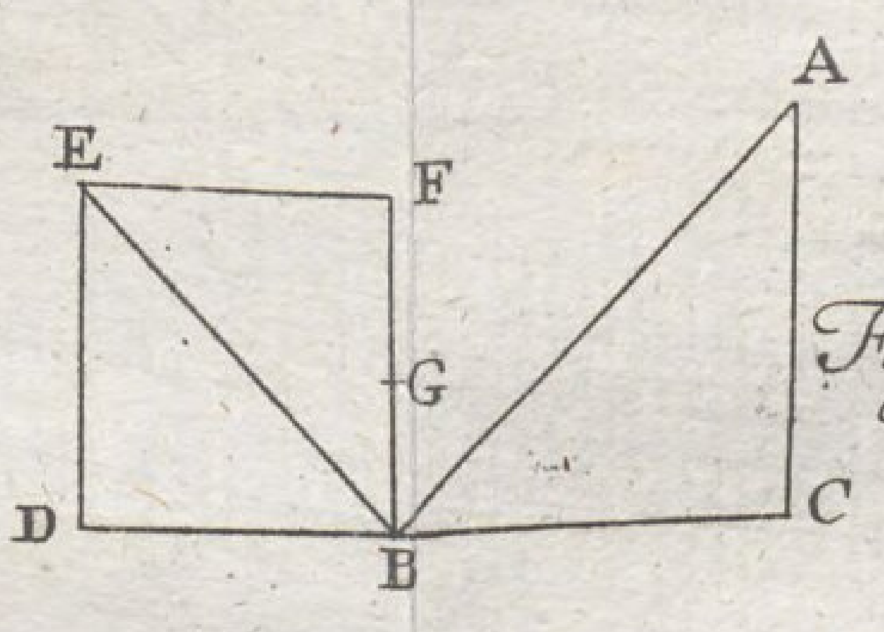


Fig. 2.

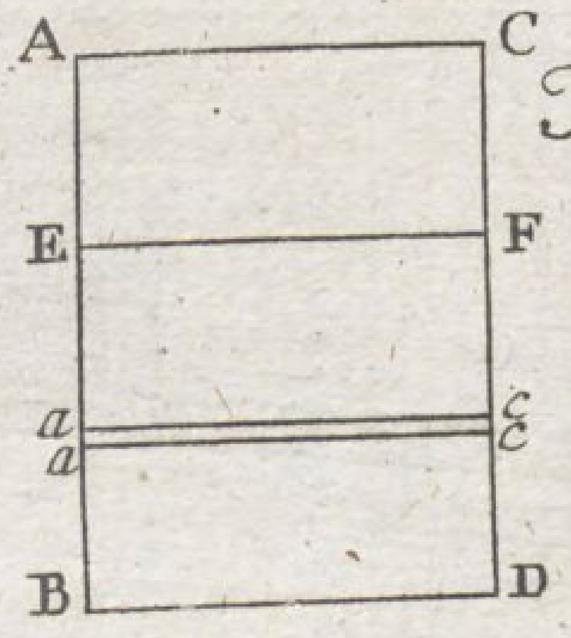


Fig. 4.

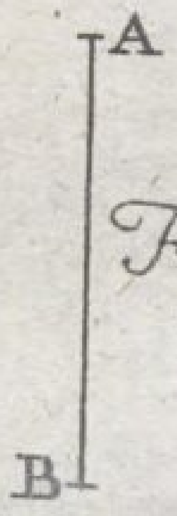


Fig. 3.

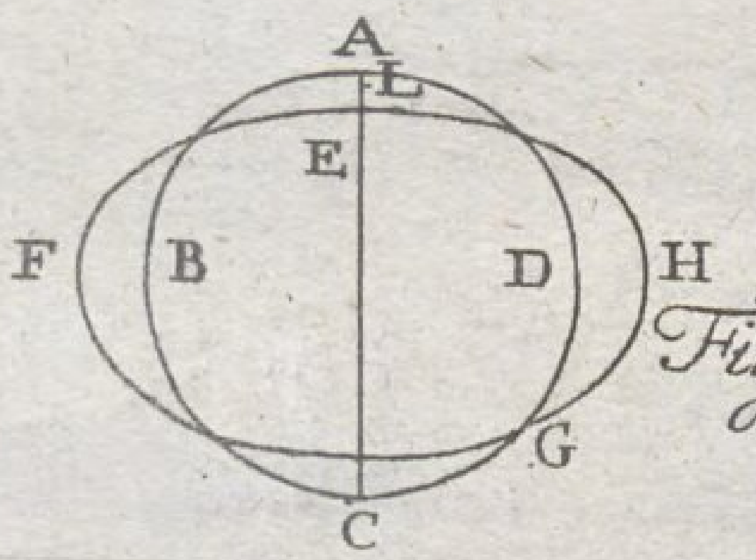


Fig. 5.

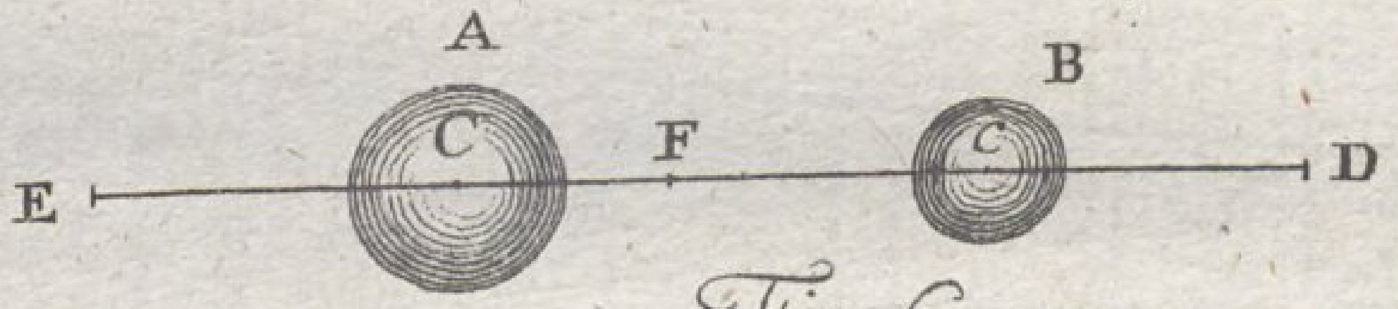


Fig. 6.

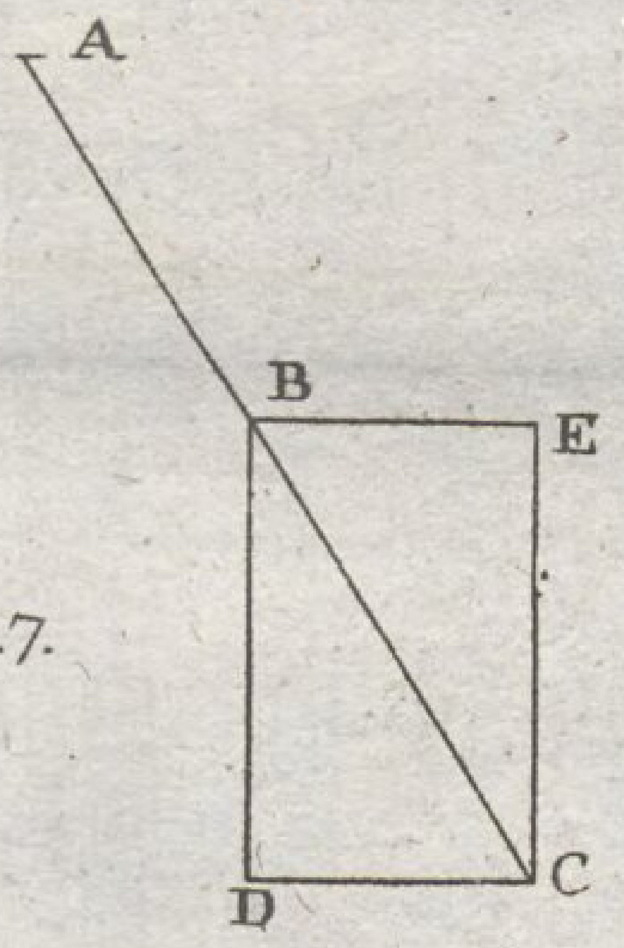


Fig. 7.

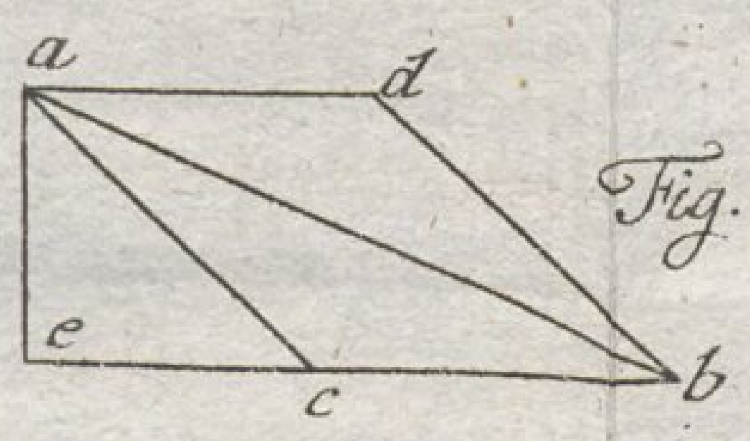


Fig. 8.

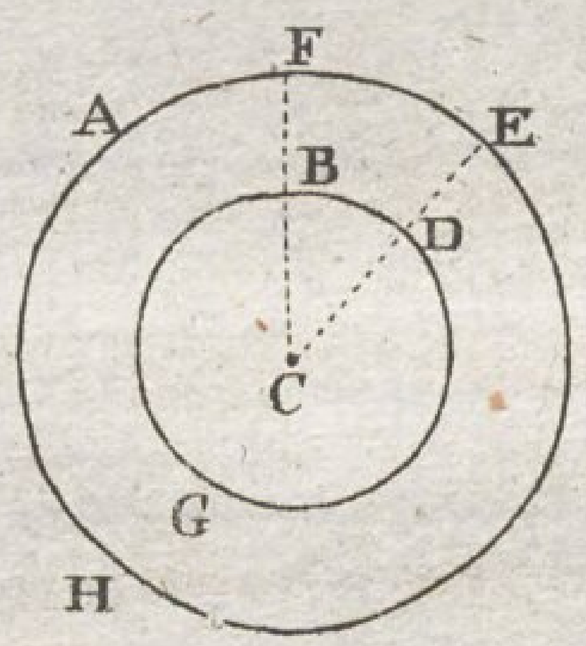


Fig. 9.

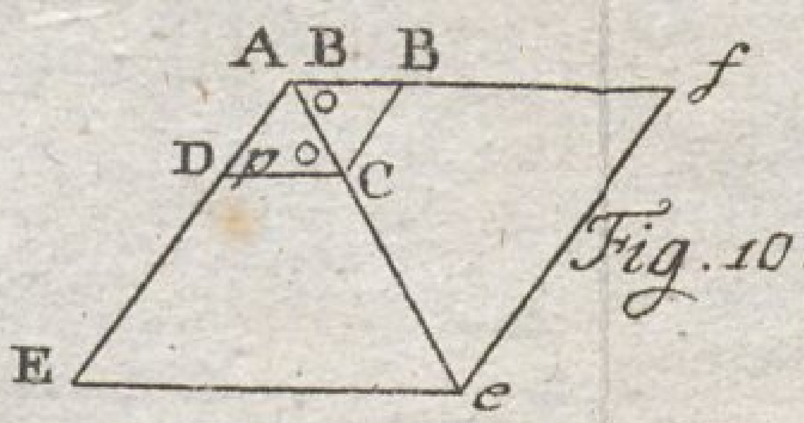


Fig. 10.

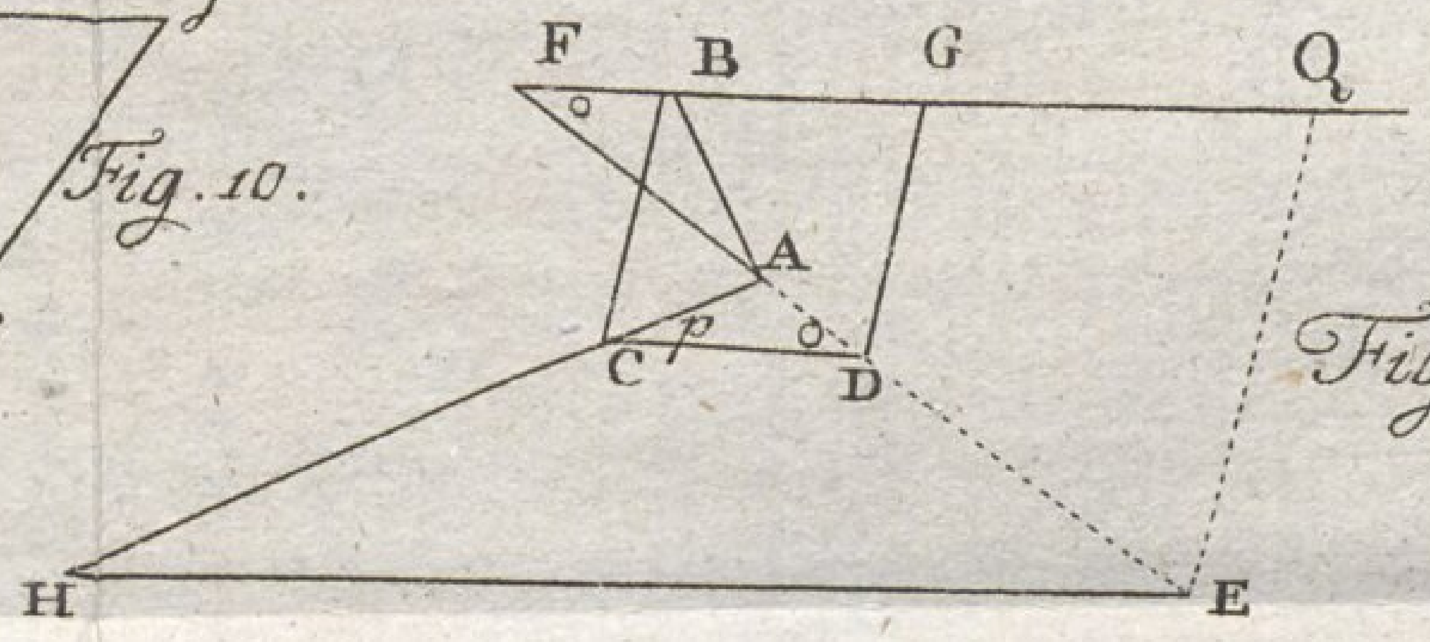


Fig. 11.

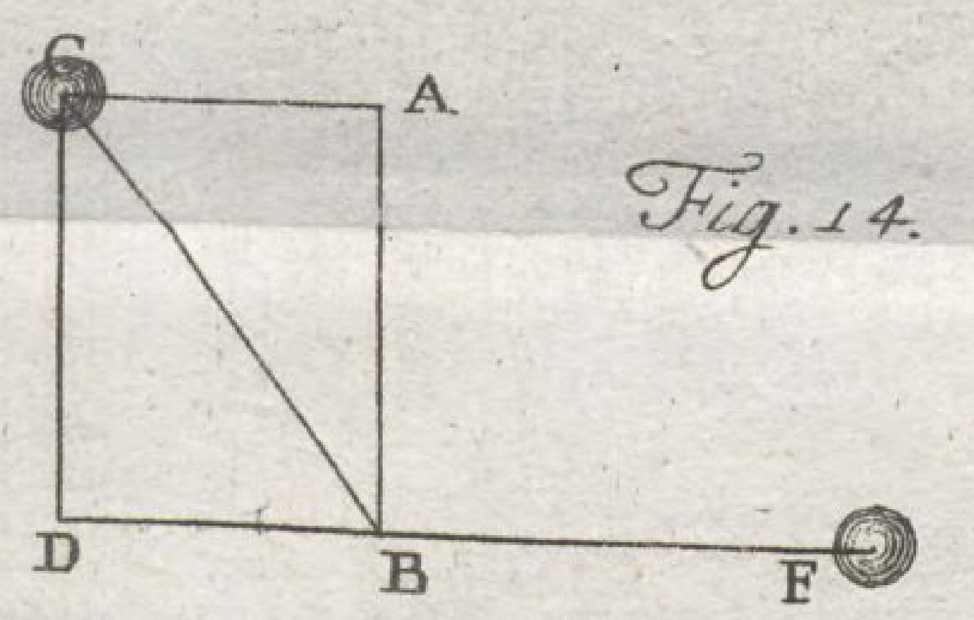


Fig. 14.

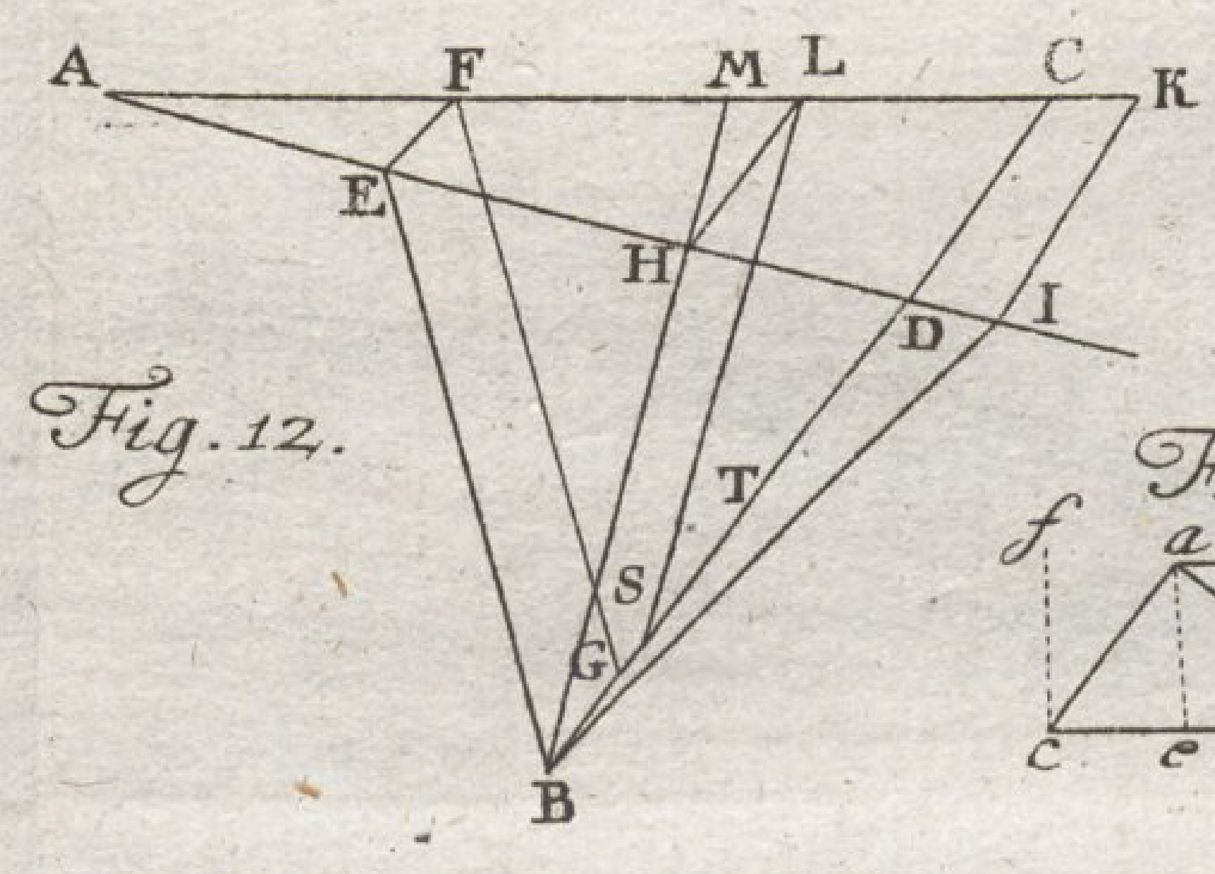


Fig. 12.

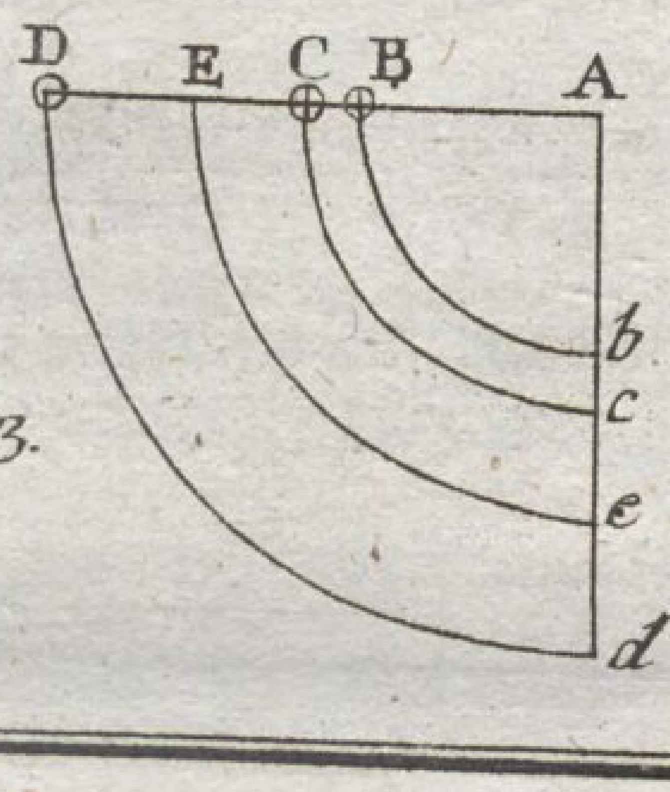
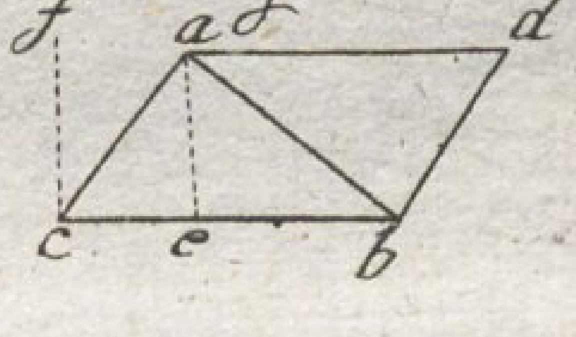
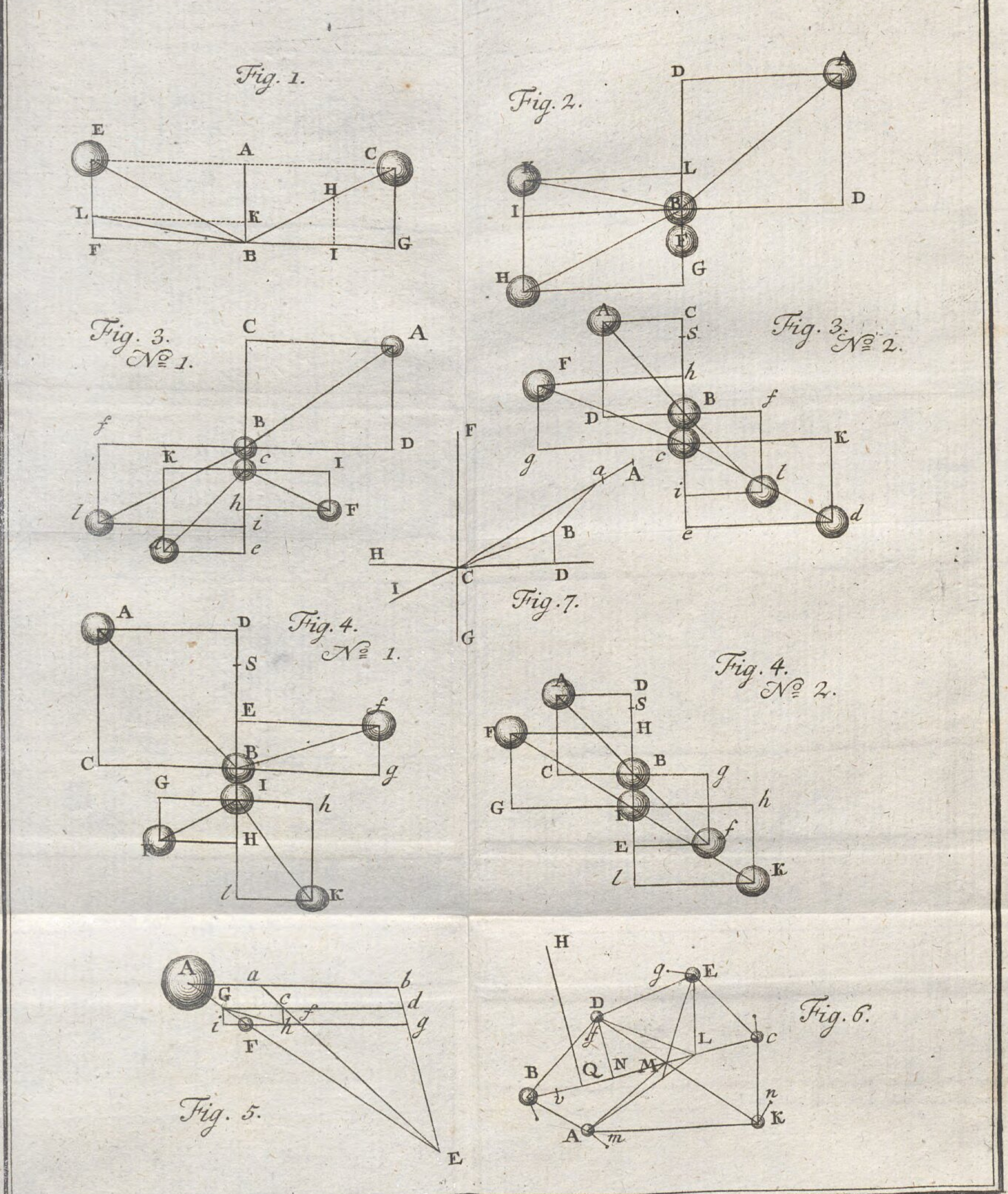


Fig. 13.

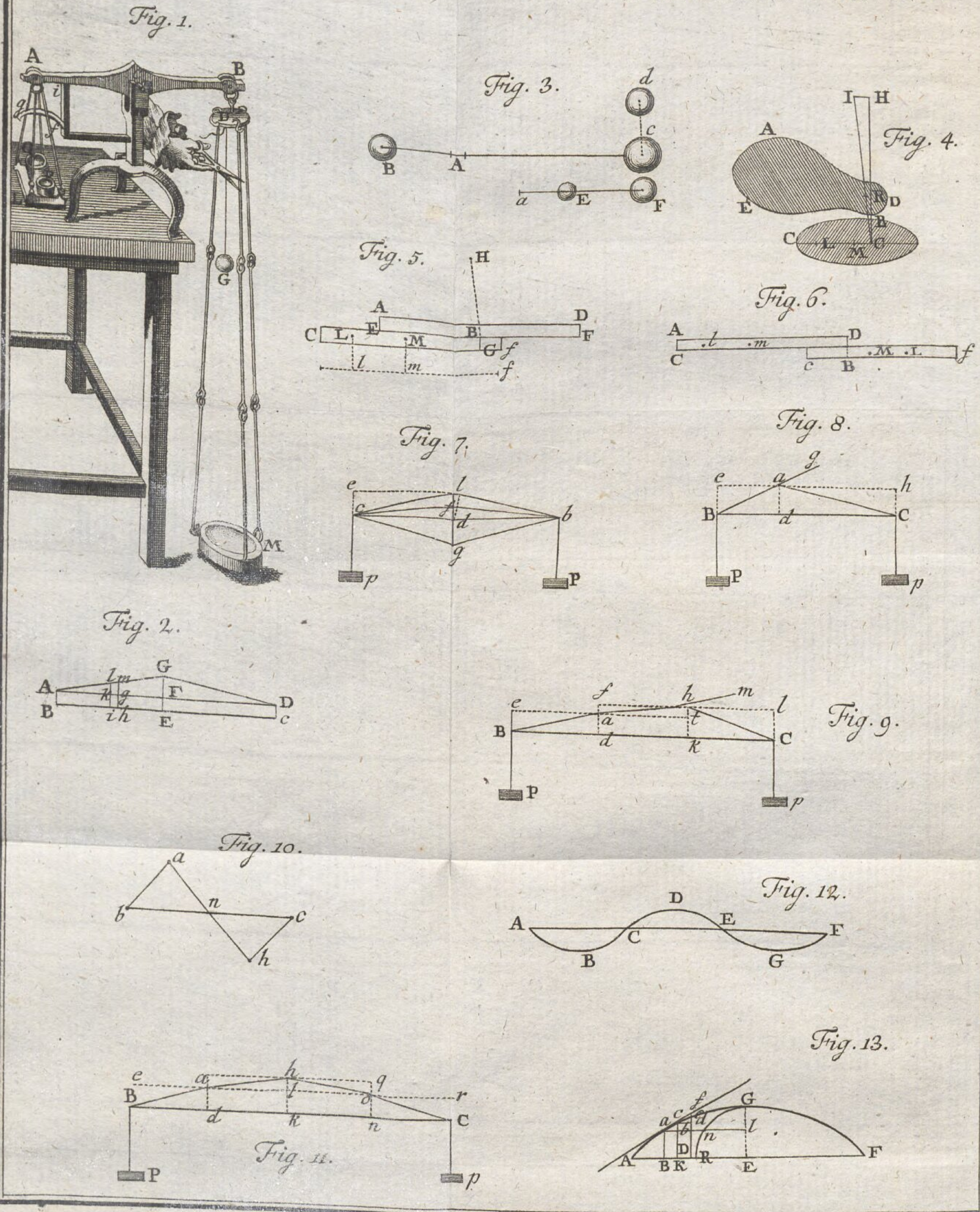
Fig. 15.


MECHAN. TAB. XIII.

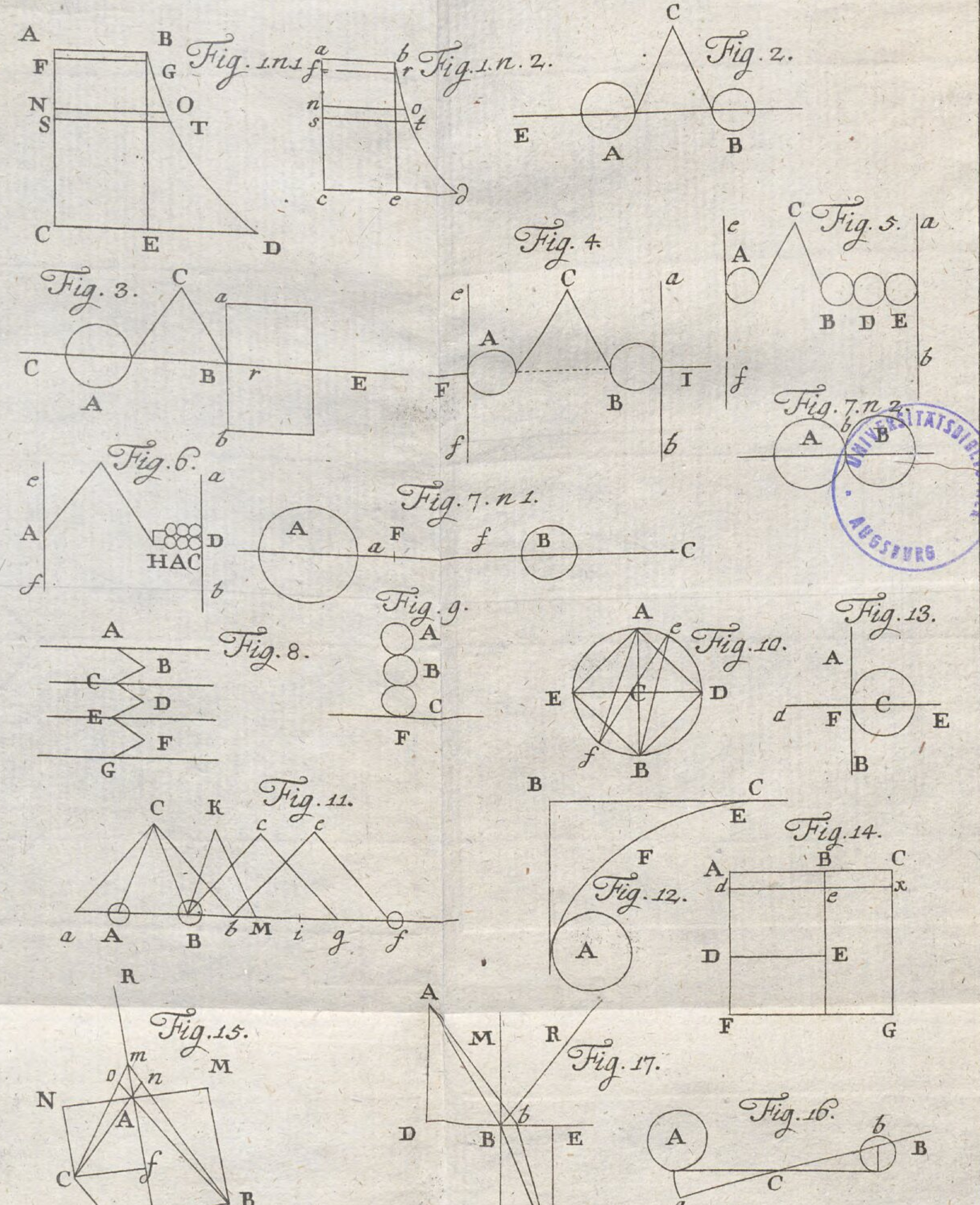


Bayerische
Staatsbibliothek
München

MECHAN. TAB. XIV.



MECHAN. TAB. XV.



UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK AUGSBURG

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kraft, Jens, / Steingrüber, Johann Christian August, / Tetens, Johann Nicolaus,

Jens Krafts, vormaligen Königl. Dänischen Justizraths und öffentlichen Lehrers der Mathematik auf der Ritterakademie zu Soroe, Mechanik

Dresden 1787

Math.a. 330 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081353-1
VD18 11535164